

王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊辉



6大特色引发学考热潮
推动学习模式全面升级

独具创意 ✓
考向指引 ✓
考试工具 ✓

同步突破 ✓
典例导思 ✓
核心预测 ✓



YZLI0890160896

数学 八年级(下)

RJSX

丛书主编：王后雄
本册主编：张丰收



中国青年出版社

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊辉

数学 八年级(下)

RJSX

丛书主编：王后雄

本册主编：张丰收

陈国庆

孙方华

张方华

殷佑春

陈俊文

夏仲文

易丹

程明

黄玲

谢文

赵阳

叶舟

卢银森

祝友明

钟细珍

涂敏成

陶小梅

王小艺



YZLI0890160896



中国青年出版社

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读: 人教版. 八年级数学. 下/王后雄主编.

—6版. —北京: 中国青年出版社, 2011

ISBN 978-7-5006-6743-8

I.教... II.王... III.数学课—初中—教学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第151324号

总策划: 熊辉

责任编辑: 李扬

封面设计: 钟培

教材完全解读

数学 八年级(下)

中国青年出版社 出版发行

社址: 北京东四12条21号 邮政编码: 100708

网址: www.cyp.com.cn

编辑部电话: (010) 64034328

读者服务热线: 4006-980-700

咸宁市中南科择印务有限责任公司印制 新华书店经销

889 × 1194 1/16 11印张 292千字

2011年11月北京第6版 2011年11月湖北第7次印刷

印数: 35001—40000册

定价: 19.30元

本书如有任何印装质量问题, 请与承印厂联系调换

联系电话: (027) 61883355

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

明确每课学习要求

以课标为依据，三维目标全解教材学习要求，提供总体的学习策略，提出具体的学习要诀，体现目标控制学习规则。

三层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路，揭示考点实质和内涵。

16

第十六章 分式

16.1 分式

16.1.1 从分数到分式

课标三维目标

(1)了解分式的意义，知道分式与整式的区别与联系。(A.了解) (2)了解分式有意义的条件，会根据具体的分式，求出分式有意义时字母所满足的条件。(B.理解) (3)理解分式为整式、分式、分母具备的条件，会求分式为0时，相应字母的值。(B.理解) (4)通过分式与分数的比较，进一步体会类比的作用和意义。(C.应用)

知识·能力聚焦

1. 分式的概念

形如 $\frac{A}{B}$ (A, B 都是整式，且 B 中含有字母，B ≠ 0) 的式子，叫做分式。其中 A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母。即分母中含有字母的代数式叫分式。因

例题·典例

下列式子中，哪些是分式？哪些是整式？

$\frac{2}{a}, \frac{a-1}{3}, 3+a^2, \frac{5}{a}, \frac{a^2}{a}, \frac{2}{3}$

【解析】 $\frac{2}{a}, \frac{5}{a}, \frac{a^2}{a}$ 具有分式的形式，但分母不含字母，其中 $\frac{2}{a}$ 的分母中 a 表示一个常数，因此这三个式子都不是分式。

【答案】 整式： $\frac{a-1}{3}, 3+a^2, \frac{a^2}{a}$ ；分式： $\frac{2}{a}, \frac{a^2}{a}$ 。

中难题——2010年四川凉山

16

教材完全解读 数学 八年级(下)

(1) $\frac{m}{m-a} = \frac{m}{-(m-a)} = -\frac{m}{m-a}$ (2) $-\frac{m}{-(m-a)} = \frac{m}{m-a}$

(3) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x \cdot xy} = \frac{1}{x^2y}$ (4) $\frac{a+1}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} (x \neq 0)$

2. 分式的符号法则

分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中任意两个，分式的值不变。用式子表示为： $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ 或 $\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}$ 等。分式的符号法则由两条法则概括而成。

(1) 第一条法则是根据分式的基本性质推导出来的。分子、分母同乘以 -1，就有 $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ ，反之也成立。或 $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ ，反之也成立。即“分子和分母同时改变符号，分式的值不变”。

(2) 第二条法则是根据除法法则得到的，即“只改变分子(或分母)的符号，分式本身的符号也要改变”。如 $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ 中分子与分母的符号相异，若改变分子的符号，则分式本身的符号也要变为负号，故 $-\frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$ 。

(3) 因为分数线在分式中具有括号的作用，所以当分子或分母为多项式时，应把它看作一个整体来变号，将多项式的各项都改变符号，如 $\frac{-x-y}{x-y}$ 中将分子分母都改变符号时即为 $\frac{x+y}{x-y}$ 。

3. 创新·思维拓展

3. 约分

根据分式的基本性质，把一个分式的分子与分母的公因式约去，叫做分式的约分。

约分的关键是正确找出分式的分子与分母的公因式，约分的根据是分式的基本性质。若分式的分子与分母为多项式，应先把分式的分子与分母分解因式，然后约去分子与分母的公因式。

目录 CONTENTS

名师学法指津 1

第十六章 分式 3

16.1 分式 3

16.1.1 从分数到分式 3

16.1.2 分式的基本性质 9

16.2 分式的运算 14

16.2.1 分式的乘除 14

16.2.2 分式的加减 19

16.2.3 整数指数幂 25

16.3 分式方程 29

单元知识梳理与能力整合 39

最新3年中考名题诠释 43

知识与能力同步测控题 45

第十七章 反比例函数 47

17.1 反比例函数 47

17.2 实际问题与反比例函数 47

单元知识梳理与能力整合 57

最新3年中考名题诠释 60

知识与能力同步测控题 64

第十八章 勾股定理 66

18.1 勾股定理 66

18.2 勾股定理的逆定理 71

单元知识梳理与能力整合 77

最新3年中考名题诠释 80

知识与能力同步测控题 82

目录

CONTENTS

第十九章 四边形

84

- 19.1 平行四边形 84
- 19.2 特殊的平行四边形 91
- 19.3 梯形 100
- 19.4 课题学习 重心(略) 100
- 单元知识梳理与能力整合 106
- 最新3年中考名题诠释 109
- 知识与能力同步测控题 112

第二十章 数据的分析

114

- 20.1 数据的代表 114
 - 20.1.1 平均数 114
 - 20.1.2 中位数和众数 121
- 20.2 数据的波动 127
- 20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析(略) 127
- 单元知识梳理与能力整合 134
- 最新3年中考名题诠释 137
- 知识与能力同步测控题 140

教材学业水平考试试题

142

答案与提示

144

第十六章 分式

16.1 分式

16.1.1 从分数到分式

- 1. 分式的概念 3
- 2. 确定分式值为零的条件 3
- 3. 分数与分式间的联系 3
- 4. 分式的概念包括三个方面 4
- 5. 分式的特殊值中,注意分母一定不能为零 4
- 6. 关于同底数幂相除的法则 4
- 7. 单项式除以单项式 5
- 8. 多项式除以单项式 5

16.1.2 分式的基本性质

- 1. 分式的基本性质 9
- 2. 分式的符号法则 10
- 3. 约分 10
- 4. 最简分式 11
- 5. 通分 11
- 6. 最简公分母 11

16.2 分式的运算

16.2.1 分式的乘除

- 1. 分式乘除法法则 14
- 2. 分式的乘方 15
- 3. 分式运算结果的注意要点 15
- 4. 在进行乘方、乘除运算时,通常是先算乘方,再算乘除 15
- 5. 运算过程中应注意的要点 16
- 6. 较复杂运算中应注意的要点 16
- 7. 分式乘除法法则的应用 16

16.2.2 分式的加减

- 1. 约分 19
- 2. 通分 19
- 3. 分式的加减法 19
- 4. 分式的混合运算 19
- 5. 运算结果必须是最简分式 20
- 6. 通分的依据 20
- 7. 求最简公分母的步骤 20
- 8. 通分的步骤 20
- 9. 分式的加减法应注意的几个问题 21
- 10. 约分与通分的联系及区别 21
- 11. 分式加减法较复杂运算中应注意的要点 21

- 12. 分式运算重在“活”上,归纳为如下几点 22

16.2.3 整数指数幂

- 1. 乘方的定义 25
- 2. 几个常见的性质 25
- 3. 零指数幂的意义 25
- 4. 负整数指数幂的意义 26
- 5. 科学记数法的定义 26
- 6. 零指数幂与负整数指数幂 26
- 7. 零指数与负整数指数幂的条件 26
- 8. 科学记数法 26

16.3 分式方程

- 1. 分式方程的意义 29
- 2. 可化为一元一次方程的分式方程的解法 29
- 3. 列分式方程解应用题与列整式方程解应用题 30
- 4. 列分式方程解应用题的一般步骤 30
- 5. 列分式方程解应用题的两步检验 30
- 6. 解分式方程为什么要验根 30
- 7. 分式方程的无解与增根的联系和区别 31
- 8. 列方程(组)解应用题的技巧 31
- 9. 几种典型问题的数量之间的关系 32
- 10. 解分式方程比分式运算更具有技巧性,它是方程知识与分式的有机结合 32
- 11. 如何解分式方程组 33

第十七章 反比例函数

17.1 反比例函数

17.2 实际问题与反比例函数

- 1. 反比例关系 47
- 2. 反比例函数的概念 47
- 3. 用待定系数法求反比例函数的表达式 47
- 4. 反比例函数的图象和画法 48
- 5. 反比例函数的性质 48
- 6. 反比例关系与反比例函数的区别和联系 49
- 7. 特别注意 49
- 8. 反比例函数图象的性质 50
- 9. 特别提醒 50

第十八章 勾股定理

18.1 勾股定理

- 1. 勾股定理 66

2. 勾股定理的探索过程	66
3. 用面积法证明勾股定理	67
4. 勾股定理的各种表达式及其作用	67
5. 注意问题	67
18.2 勾股定理的逆定理	
1. 勾股定理的逆定理	71
2. 如何判定一个三角形是否是直角三角形	71
3. 应用	71
4. 用勾股定理的逆定理判定一个三角形是直角三角形的方法,与以前学过的判定方法不同,它是通过代数计算“算”出来的	72
5. 勾股定理的逆定理,对测量也有许多实用价值,可以用它来确定直角	72
6. 勾股数是一种重要的数组,找勾股数可以用实验的方法	72

第十九章 四边形

19.1 平行四边形

1. 平行四边形	84
2. 平行四边形的性质	84
3. 平行四边形的判定	85
4. 平行四边形性质的作用	85
5. 平行四边形的判定定理的选择	85
6. 平行四边形知识的运用	85
7. 两条平行线间的距离	86
8. 平行四边形的面积	86
9. 平行四边形的作图	86

19.2 特殊的平行四边形

1. 矩形的性质定理与推论	91
2. 矩形的判定定理	91
3. 菱形的性质定理	92
4. 菱形的判定定理	92
5. 正方形的性质定理	92
6. 正方形的判定定理	93
7. 正方形、矩形、菱形、平行四边形的关系	93
8. 特殊的平行四边形的性质一览表	94
9. 特殊的平行四边形的判定一览表	94
10. 顺次连接特殊的平行四边形各边中点得到的四边形的形状	94
11. 其他问题	94

19.3 梯形

19.4 课题学习 重心(略)

1. 梯形的定义	100
----------	-----

2. 等腰梯形和直角梯形	100
3. 等腰梯形的性质	100
4. 等腰梯形的判定	100
5. 梯形的结构特征	100
6. 梯形的分类	101
7. 等腰梯形性质及判定的作用	101
8. 梯形的中位线	101
9. 解决梯形问题的基本思路	101
10. 梯形的面积	101

第二十章 数据的分析

20.1 数据的代表

20.1.1 平均数

1. 总体和样本	114
2. 平均数	114
3. 平均数的概念	114
4. 平均数的计算方法	115
5. 平均数的意义	116
6. 新数据法计算的步骤	116
7. 平均数的使用	116
8. 警惕平均数的误区	117
9. 平均数的使用范围	117
10. 平均数的一些性质	117

20.1.2 中位数和众数

1. 众数	121
2. 中位数	121
3. 平均数、中位数和众数的选用	121
4. 用计算机求平均数、中位数和众数	122
5. 众数、中位数及平均数的异同点	122
6. 需要注意的几个问题	123

20.2 数据的波动

20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析(略)

1. 表示一组数据离散程度的指标	127
2. 方差的计算公式	127
3. 化简公式	127
4. 标准差的定义和计算	128
5. 用计算器求标准差	128
6. 方差是反映样本数据波动大小的一个特征数,由方差公式可以推出它的三个基本性质	129
7. 平均数、方差、标准差的几个规律	129



名师学法指津

同学们,刚刚学完八年级上学期的数学,你们对初中数学一定有了更深入的认识,学到了更多的数学知识,而八年级下学期的数学将会带你遨游在更广阔的知识海洋中,你将体会到更多的学习数学的乐趣.在这学期里你将会学习到以下几章的知识:分式、反比例函数、勾股定理、四边形和数据的分析.下面我将会对每一章的主要内容、重点及其难点作一下简单地介绍,对每一章的学习方法谈一谈自己一些浅显的认识.

分式这一章的主要内容包括:分式的概念,分式的基本性质,分式的约分与通分,分式的加、减、乘、除运算,整数指数幂的概念及运算性质,分式方程的概念及可化为一元一次方程的分式方程的解法.分式是不同于整式的另一类有理式,是代数中重要的基本概念;相应地,分式方程是一类有理方程,解分式方程的过程比解整式方程更复杂些.然而,分式或分式方程更适合作为某些类型的问题的数学模型,它们具有整式或整式方程不可替代的特殊作用.本章的重点是分式的各种运算法则,熟练进行分式的运算,解分式方程.难点是熟练应用分式的各种运算法则进行混合运算;把分式方程转化为整式方程的转化思想以及在解完可化为一元一次方程的分式方程后是否含有增根问题.通过分式的运算可进一步提高同学们的运算能力和代数恒等变形能力.

对于分式这一章的学习,在学法上我提出以下几点建议:(1)体会和掌握类比的学习方法:①通过与分数性质及运算的联系,学习分式的性质与运算.②通过与正整数指数幂的性质的联系,学习负整数指数幂的性质,学会在原有知识的基础上学习和构建新的知识体系.(2)重视分式与实际生活的联系,领会数学建模思想.(3)重视数学转化思想方法的掌握和运用,达到优化解题思路,简化解题过程的目的.(4)整数指数幂的意义由正整数的范围扩大到了全体整数,渗透了分类讨论思想.(5)在学习本章内容时,要认真仔细,防止在变形、计算上的错误,及时总结学习方法、规律.

反比例函数这一章的内容属于“数与代数”领域,是在已经学习了平面直角坐标系和一次函数的基础上,再一次进入函数范畴,反比例函数是最基本的函数之一.本章主要学习反比例函数的意义、图象及其性质,以及反比例函数在实际问题中的应用,其中反比例函数的图象及其性质,能用反比例函数解决某些简单的实际问题是本章的难点;逐步形成用函数观点处理问题的意识,体验数形结合的思想方法是本章难点,同时也是新课标的落脚点.

本章在学法上应注意以下几点:(1)新课标提出“抽象概念的数学,要关注概念的实际背景与形成过程”,学习概念时,注意联系实际,加深对概念的理解与应用,淡化形式化的叙述.(2)注意联系正比例函数的相关知识,用类比的方法学习反比例函数的图象及性质,找出两类函数之间的异同点,从中体会数学中的类比、化归思想的作用.(3)熟练掌握正比例、反比例函数的图象的交点问题.(4)学习本章要结合反比例函数图象,掌握反比例函数性质,同时要注意数形结合的思想,在图象中研究反比例函数的性质、规律.

直角三角形是一种特殊的三角形,它有许多重要的性质,如两个锐角互余, 30° 的角所对的直角边等于斜边的一半.勾股定理这一章的内容,也是直角三角形的性质,而且是一条非常重要的性质.本章分为两节,第一节介绍勾股定理及其应用,第二节介绍勾股定理的逆定理.在本章中,我们将探索直角三角形的三边关系并利用所得的结论解决问题.同时还能根据三角形三边的长,判断这个三角形是否为直角三角形.本章的重点是会用勾股定理和勾股定理的逆定理解决简单的实际问题,难点是勾股定理及其逆定理的探索过程及其运用.

在学习本章时,应注意以下两点:(1)在学习中要注意知识的获得过程,通过亲自经历发现规律,增强记忆,循序渐进,逐步培养和增强推理能力,并反复训练,从而达到灵活运用目的.(2)学习时注意理论与实践相结合,深入生活,仔细体验,认真观察、思考,并在思考中总结经验.

四边形是人们日常生活中应用较广的一种几何图形,尤其是平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形等特殊四边形的用处更多.四边形既是几何中的基本图形,也是“图形与几何”领域的主要研究对象之一.四边形这一章正是在前面学段学过的四边形知识,本学段学过的平行线、三角形、多边形等有关知识的基础上来学习的.本章的内容是围绕着两类特殊的四边

形——平行四边形和梯形展开的,四边形是继三角形后的又一个封闭图形,它既是图形变换的直接应用,又为以后学习圆奠定基础,它们都是平面几何中的基本图形,又是平面几何研究的主要对象,起着承前启后的作用.本章重点是平行四边形的定义、性质和判定,矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形.它们的性质都是在平行四边形的基础上拓展的.难点是平行四边形与各特殊平行四边形之间的联系与区别.

学习本章内容可从以下几个方面入手:(1)通过具体问题创设情境,主动探索和自觉总结四边形的有关性质,进一步深化自己对四边形性质的理解,以及对识图、操作等技能的掌握.(2)在亲自经历观察实验的基础上,将对四边形性质的探索和简单说理有机结合起来,得到图形的有关结论.(3)学好本章要注意数学转化思想方法的应用,学会把四边形问题转化为三角形的有关知识解题;充分利用好图形的平移、旋转等变换来构造图形,逐步体会变换思想和方程思想.

数据的分析这一章属于“统计与概率”领域.我们在七年级下册学习了“第10章 数据的收集、整理与描述”,本章主要学习分析数据的集中趋势和离散程度的常用方法.本章主要内容有:数据的代表——平均数、中位数和众数,它们是反映数据集中程度的.理解算术平均数与加权平均数之间的联系与区别;数据的波动——极差和方差,它们是反映数据离散程度的,而极差和方差是从不同角度反映离散程度的.常用方差比较两组数据的稳定程度.方差越小越稳定,方差越大越不稳定.在此基础上掌握用样本平均数估计总体平均数,用样本方差估计总体方差的统计思想方法.

学习本章内容着重注意以下两点:(1)平均数、众数和中位数都是描述一组数据的集中趋势的量,它们从不同角度描述一组数据的集中趋势.平均数的大小与一组数据里的每个数据均有关系,其中任何数据的变动都会相应引起平均数的变化;众数着眼于对各数据重复出现的次数的考查,其大小只与这组数据中的部分数据有关;中位数则与数据排列位置有关,某些数据的顺序变动对中位数没有影响.(2)极差、方差是用来反映一组数据的波动情况的特征数,需要注意的是,当两组数据的个数相等,平均数比较接近时才用方差进行比较,方差较大的波动大,方差较小的波动小.

以上是我对八年级下学期数学的主要内容的概述及在学法上的一些指点,希望能给同学们的学习起到一些作用.最后祝愿同学们学好数学,用好数学,在快乐中学习!



学习中可运用类比的思想,对照分数的有关知识来学习分式,这也是掌握本章关键知识的有效方法.

4. 分式的概念包括三个方面

(1)分式是两个整式相除的商式,其中分子为被除式,分母为除式,分数线起除号作用.

(2)分式的分母中必须含有字母,而分子中可以含有字母,也可以不含有字母.这是区别于整式的重要依据.

如: $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{2}{x-y}$ 、 $\frac{a}{3x}$ 是分式; $\frac{a}{2}$ 、 $\frac{x-y}{3}$ 不是分式,而是整式.

(3)在任何情况下,分式的分母的值都不能为零,否则分式无意义.这里,分母是对整个除式而言,而不只是就分母中某一个字母来说的.也就是说,分式的分母不为零是隐含在此分式中,而无需注明.像分式 $\frac{1}{x-1}$ 中, $x \neq 1$ 是隐含在 $\frac{1}{x-1}$ 中,否则 $\frac{1}{x-1}$ 就失去了意义.

5. 分式的特殊值中,注意分母一定不能为零

(1)分式 $\frac{A}{B}$ 的值为零,当且仅当 $A=0$,
 $B \neq 0$.

(2)分式 $\frac{A}{B}$ 的值为1,当且仅当 $A=B$,
 $B \neq 0$.

(3)分式 $\frac{A}{B}$ 的值为-1,当且仅当
 $A=-B \neq 0$.

从上面进一步说明:分式 $\frac{A}{B}$ 中 $B \neq 0$ 是构成分式 $\frac{A}{B}$ 的必要条件.

3. 创新·思维拓展

6. 关于同底数幂相除的法则

“同底数幂相除底数不变,指数相减.”

即 m, n 为正整数, $m > n$, $a \neq 0$,有
 $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

例题4 中难题

当 x 为何值时,分式 $\frac{x^2-9}{x+3}$ 的值为0?

[解析] 要使分式的值为0,必须满足分子等于0且分母不等于0.

[答案] 由题意,得 $\begin{cases} x^2-9=0, \\ x+3 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $x=3$.

\therefore 当 $x=3$ 时,分式 $\frac{x^2-9}{x+3}$ 的值为0.

[点评] 先求出使分子为0的字母的值,再检验这个值是否使分母的值等于0,当它使分母的值不等于0时,这个值就是要求的字母的值.

例题5 中难题

当 x 取何值时,分式 $\frac{x-2}{2x+6}$ 的值恒为负数?

[解析] 由分式的意义可知 $\frac{x-2}{2x+6} = (x-2) \div (2x+6)$,类比有理数的除法符号法则可知 $x-2$ 与 $2x+6$ 异号,所以有两种情况,即 $\begin{cases} x-2 > 0, \\ 2x+6 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2 < 0, \\ 2x+6 > 0. \end{cases}$ 解这两个不等式组即可.

[答案] 由题意可知 $\begin{cases} x-2 > 0, \\ 2x+6 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2 < 0, \\ 2x+6 > 0. \end{cases}$

解不等式组 $\begin{cases} x-2 > 0, \\ 2x+6 < 0, \end{cases}$ 该不等式组无解.

解不等式组 $\begin{cases} x-2 < 0, \\ 2x+6 > 0, \end{cases}$ 得 $-3 < x < 2$.

所以当 $-3 < x < 2$ 时,分式 $\frac{x-2}{2x+6}$ 的值恒为负数.

[解题策略] 当分子、分母异号时分式的值为负数.

例题6 难题

将一个分数的分子、分母同时加上一个正数,这个分数是变大了,还是变小了?请先举例发现其中的规律,再设法说明理由.

[解析] 应选择不同特点的分数来试验探索.

[答案] $\frac{1}{2} : \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$; $\frac{5}{4} : \frac{5+2}{4+2} = \frac{7}{6} < \frac{5}{4}$;

$-\frac{2}{3} : -\frac{2+2}{3+2} = -\frac{4}{5} < -\frac{2}{3}$; $-\frac{8}{3} : -\frac{8+2}{3+2} = -2 > -\frac{8}{3}$;...

我们发现:对于真的真分数,分子、分母都加相同的正数时分数变大;对于真的假分数,分子、分母都加相同的正数时分数变小;对于负分数,结论与上两条恰好相反.

说明:(1)对于 $\frac{b}{a}$ (a, b 均为正整数,且 $a > b$),分子、分母同时加上正数 m ,则变成 $\frac{b+m}{a+m}$.因为 $\frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{a(b+m) - b(a+m)}{a(a+m)} = \frac{am - bm}{a(a+m)} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)} > 0$,所以 $\frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}$. ①

(2)对于 $\frac{b}{a}$ (a, b 均为正数,且 $a < b$),分子、分母同时加上正数 m ,则变成了 $\frac{b+m}{a+m}$,因为 $\frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)} < 0$,所以 $\frac{b+m}{a+m} < \frac{b}{a}$. ②

(3)对于负分数的情形,只要将①、②两式两边同乘-1即得结论.

[点评] 通过特例发现问题,得出一般结论,并去证明,是我们常用研究、探索问题的手段.



可用比较法加强记忆. 我们已经熟知“同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加”的法则. 乘法与除法、加法与减法是互逆的运算, 比较可以加深理解, 有利于记忆.

例如: $3^8 \div 3^2 = \frac{3^8}{3^2} = \frac{3^6 \cdot 3^2}{3^2} = 3^6$, 即 $3^8 \div 3^2 = 3^{8-2} = 3^6$; $x^{10} \div x^6 = \frac{x^{10}}{x^6} = \frac{x^6 \cdot x^4}{x^6} = x^4$, 即 $x^{10} \div x^6 = x^{10-6} = x^4$. 由此对于两个正整数 m 和 n , 且 $m > n$, 当 $a \neq 0$ 时, $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^{m-n}}{a^n} = a^{m-n}$, 即 $a^m \div a^n = a^{m-n}$. 我们利用相除和相比的统一性, 可以得到这个法则.

7. 单项式除以单项式

两个单项式相除, 只要将系数及同底数幂分别相除, 并把它们在被除式中含有的字母连同它的指数作为商的一个因式.

可用类比的方法及相除与相比的统一性, 帮助理解记忆这个法则.

例如: $6a^4b^2c^2 \div 2ab^2 = \frac{6a^4b^2c^2}{2ab^2} = \frac{2ab^2 \cdot 3a^3c^2}{2ab^2} = 3a^3c^2$, 可以发现, 商的系数 3 是被除式的系数 6 除以除式的系数 2 所得的商, 以 a 和 b 为底数的幂分别相除, 得到 a^3 是商的一个因式, 只在被除式中出现的字母 c 连同它的指数都不改变, 作为商的一个因式. 通过一个简单例子的分析, 可以概括出如上单项式除以单项式的法则.

8. 多项式除以单项式

多项式除以单项式, 先将多项式的每一项都分别除以这个单项式, 再把所得的商相加.

可用公式记忆法: $(am + bm + cm) \div m = a + b + c$, 其中的 a, b, c, m 都表示一个单项式.

[说明] 有了单项式除以单项式的经验, 对于类似 $(10x^4 - 15x^2 + 5x) \div (5x)$ 这样的多项式除以单项式, 容易发现被除式可以分解因式, 其结果是 $5x(2x^3 - 3x + 1)$, 显然被除式除以 $5x$ 所得的商是 $2x^3 - 3x + 1$. 这个多项式的各项正是被除式中的各项分别除以除式的结果. 于是可概括出如上多项式除以单项式的法则.

例题 7 中难题

某商场销售一批电视机, 1 月份每台毛利润是售出价的 20% (毛利润 = 售出价 - 买入价), 2 月份该商场将每台售出价降低 10% (买入价不变), 结果销售台数比 1 月份增加了 120%, 那么 2 月份的毛利润总额与 1 月份的毛利润总额的比是多少?

[解析] 理解利润和销售量, 再由题意找出关系, 解决实际问题.

[答案] 设 1 月份每台电视机的售出价是 a 元, 销售量为 b 台, 则 1 月份的毛利润是 $20\%ab$ 元. 2 月份每台的毛利润是 $(90\%a - 80\%a)$ 元, 2 月份的销售量为 $(1 + 120\%)b$ 台, 根据题意, 得 $\frac{(90\%a - 80\%a) \cdot (1 + 120\%)b}{20\%a \cdot b} = \frac{11}{10}$, 所以 2 月份的毛利润总额与 1 月份的毛利润总额的比是 $\frac{11}{10}$.

[点评] 弄清题目中存在的数量关系是解此题的关键.

例题 8 中难题

当 x 取什么数时, 下列分式有意义? 当 x 取什么数时, 下列分式的值为零?

$$(1) \frac{x}{x^2 + 1}; (2) \frac{x-5}{x^2}; (3) \frac{2x-10}{x-5}$$

[解析] 分母不为零时, 分式有意义; 分子的值为零, 而分母的值不为零时, 分式的值为零.

[答案] (1) 当 $x^2 + 1 \neq 0$, 即 $x^2 \neq -1$ 时, 分式有意义.

$\because x^2$ 为非负数, 不可能等于 -1 , \therefore 对于任意实数 x , 分式都有意义;

当 $x = 0$ 时, 分式的值为零.

(2) 当 $x^2 \neq 0$ 即 $x \neq 0$ 时, 分式有意义;

当 $\begin{cases} x \neq 0, \\ x - 5 = 0, \end{cases}$ 即 $x = 5$ 时, 分式的值为零.

(3) 当 $x - 5 \neq 0$, 即 $x \neq 5$ 时, 分式有意义;

当 $\begin{cases} x - 5 \neq 0, & \text{①} \\ 2x - 10 = 0 & \text{②} \end{cases}$ 时, 分式的值为零,

由①得 $x \neq 5$, 由②得 $x = 5$, 互相矛盾.

\therefore 不论 x 取什么值, 分式 $\frac{2x-10}{x-5}$ 的值都不等于零.

例题 9 中难题

若 $\frac{x}{y} = -2$, 求 $\frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 6xy - 7y^2}$ 的值.

[解析] 本题可利用分式的基本性质, 采用整体代入法, 或把分式的分子与分母化成只含同一字母的因式, 使问题得到解决.

[答案] 解法一: 因为 $\frac{x}{y} = -2$, 可知 $y \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 6xy - 7y^2} = \frac{(x^2 - 2xy - 3y^2) \cdot \frac{1}{y^2}}{(x^2 - 6xy - 7y^2) \cdot \frac{1}{y^2}} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{y} - 3}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x}{y} - 7} =$$

$$\frac{(-2)^2 - 2 \times (-2) - 3}{(-2)^2 - 6 \times (-2) - 7} = \frac{5}{9}.$$

解法二: 因为 $\frac{x}{y} = -2$,

所以 $x = -2y$, 且 $y \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 6xy - 7y^2} = \frac{(x-3y)(x+y)}{(x-7y)(x+y)} = \frac{x-3y}{x-7y} = \frac{-2y-3y}{-2y-7y} = \frac{5}{9}.$$

[点评] 本题的整体代入思想是教学中一种十分重要的思想. 一般情况下, 在条件中含有不定量时, 不需求其具体值, 只需将其作为一个“整体”代入进行运算, 就可以达到化简的目的.



4. 能力·题型设计

速效基础演练

1. 下列式子: $\frac{x}{2}, \frac{3}{x}, \frac{1}{x}, -\frac{1}{3}, \frac{x^2}{x}, \frac{2x+1}{2x-1}, \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$ 中, 是分式的是_____.
2. 已知分式 $\frac{x+1}{x-1}$ 的值为 0, 那么 x 的值为_____.
3. 船从甲地到乙地逆水航行, 航程为 100 km, 若船在静水中速度为 x km/h, 水流速度为 2 km/h, 则所需时间为_____ h.
4. 若分式 $\frac{1}{x-2}$ 无意义, 则实数 x 的值是_____.
5. 若一个分式含有字母 m , 且当 $m=5$ 时, 它的值为 12, 则这个分式可以是_____. (写出一个即可)
6. 若 $\frac{x}{|x|} = 1$ 成立, 则 x _____ 0; 若 $\frac{|x|}{x} = -1$ 成立, 则 x _____ 0.
7. 甲完成一项工作需 m 小时, 乙完成同样的工作比甲少用 1 小时, 则甲、乙合作每小时完成这项工作的_____.
8. 观察下列一组分式: $\frac{y}{x}, -\frac{3y}{x^2}, \frac{7y}{x^3}, -\frac{13y}{x^4}, \frac{21y}{x^5}, \dots$, 则第 10 个分式为_____, 第 n 个分式为_____. (n 为正整数)
9. 若分式 $\frac{2}{x-1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是().
- A. $x \neq 1$ B. $x > 1$
C. $x = 1$ D. $x < 1$
10. 下列说法正确的是().
- A. $\frac{a^2b}{a}$ 是整式
B. 若分式的分子为零, 则分式的值为零
C. 对于任意实数 x , 分式 $\frac{5x}{x^2+5}$ 总有意义
D. 将式子 $a \div (m+n)$ 写成分式的形式是 $\frac{a}{m+n}$
11. 要使分式 $\frac{x+1}{(x+1)(x-2)}$ 有意义, 则 x 应满足().

点击考例

测试要点 4

[例题 8]

测试要点 1

[例题 1]

测试要点 4

[例题 3]

测试要点 2

[例题 4]

2009 年漳州

测试要点 3、7

测试要点 4

测试要点 5

[例题 3]

2009 年漳州

测试要点 1

测试要点 5

[例题 5]

测试要点 1

[例题 2]

测试要点 7、8

[例题 7]

测试要点 4

测试要点 5

[例题 6]

测试要点 1

[例题 3]

2010 年福州

测试要点 2

测试要点 1

[例题 8]

测试要点 2、4

测试要点 4、8

测试要点 1

- A. $x \neq -1$ B. $x \neq 2$
C. $x \neq -1$ 或 $x \neq 2$ D. $x \neq -1$ 且 $x \neq 2$

12. 若 $\frac{|x|-3}{x-3}$ 的值是 1, 则 x 的取值范围是().

- A. $x \geq 0$ B. $x > 3$
C. $x \geq 0$ 且 $x \neq 3$ D. $x \neq 3$

13. 当 x 为任意实数时, 下列分式一定有意义的是().

- A. $\frac{x+1}{x}$ B. $\frac{x}{x^2-4}$
C. $\frac{x^2+1}{x^2}$ D. $\frac{x}{x^2+1}$

14. 使分式 $\frac{-2}{1-3x}$ 的值为正值的条件是().

- A. $x < \frac{1}{3}$ B. $x > \frac{1}{3}$
C. $x < 0$ D. $x > 0$

15. 要使分式 $\frac{m}{m^2-2m+1}$ 的值为非负数, 则 m 应满足().

- A. $m > 0$ B. $m \geq 0$
C. $m \geq 0$ 且 $m \neq 1$ D. 无法确定

16. 当 x 取何值时, 下列分式有意义?

- (1) $\frac{x+1}{x^2-6}$;
(2) $\frac{3x^2}{|x|-4}$;
(3) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{3x}{x-2}$;
(4) $\frac{5-x^2}{2|x|+3}$.

17. 当 x 取何值时, 下列分式的值为零?

- (1) $\frac{|x|-3}{x^2-6x+9}$;
(2) $\frac{(x+3)(x-6)}{6-2|x|}$.

18. 已知分式 $\frac{x-n}{2x+m}$, 当 $x=2$ 时值为 0, 当 $x=-2$ 时无意义, 试求 m, n 的值.

19. (1) 已知分式 $\frac{2x+3}{x^2}$ 的值为正数, 求 x 的取值范围.

(2) 已知分式 $\frac{3x-6}{x^2}$ 的值为负数, 求 x 的取值范围.



知能提升突破

1. 若 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \neq 0$ 且 $2a + 3b - 4c =$

-4. 求 $a + b + c$ 的值.

2. 当 x 为何值时, 分式 $\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}$.

(1) 有意义;

(2) 值为零;

(3) 无意义.

3. 学完分式的概念后, 王老师要求学生编一道题. 小刚同学编了如下一道题: 对于分式

$\frac{2x-a}{3x+b}$; 当 $x = -1$ 时, 分式无意义; 当 $x = 4$ 时,

分式的值为 0, 求代数式 $\frac{a}{b}$ 的值, 请你帮小刚同

学求出答案.

4. 甲、乙两人两次同时到同一个粮店购买粮食, 第一次单价为 x 元, 第二次单价为 y 元, 且 $x \neq y$, 甲每次购粮 100 千克, 乙每次购 100 元的粮食.

(1) 用含 x, y 的代数式表示: 甲两次购买粮食共需付款 _____ 元; 乙两次共购买粮食 _____ 千克, 若甲两次购粮的平均价为每千克 m 元, 乙两次购粮的平均价为每千克 n 元, 则 $m =$ _____, $n =$ _____.

(2) 请你判断甲、乙两人的购粮方式哪一种更合算; 并说明理由.

5. 用分式表示:

(1) 面积为 1 200 平方厘米的长方形纸片的长为 x 厘米, 其宽为 _____ 厘米, 若长增加 1 厘米, 面积不变, 这时的宽为 _____ 厘米. 宽比原来减少的长度为 _____ 厘米.

(2) 一项工程, 甲队单独干需 x 天完成, 乙队单独干需 y 天完成, 现在先由甲队干 m 天, 然后乙队再加入, 合干 n 天后, 完成的工作量是 _____.

6. 观察下列各等式.

$$4 - 2 = 4 \div 2;$$

测试要点 5

测试要点 4、5

测试要点 1、2、4

测试要点 1

[例题 7]

测试要点 4

测试要点 1

测试要点 3

测试要点 1

[例题 7]

测试要点 3

[例题 6]

测试要点 3

[例题 6]

$$\frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} \div 3;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{2};$$

...

(1) 以上各等式都有一个共同的特征, 某两个实数的 _____ 等于这两个实数的 _____;

(2) 如果等号左边的第一个实数用 x 表示, 第二个实数用 y 表示, 那么这些等式的共同特征可用含 x, y 的等式表示为 _____;

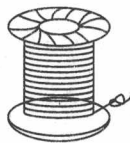
(3) 将以上等式变形, 用含 y 的代数式表示 x 为 _____;

(4) 请你再找出一组满足以上特征的两个实数, 并写出等式形式 _____.

7. 若 $(x-3)^2 = -\sqrt{y+1}$, 则 $\frac{(x-1)^2}{y-2}$ 的值是多少?

8. 要配制一种高效防腐剂, 将 m 克粉粒完全溶解于 n 克水中, 仍然达不到所需的质量分数. 又加入 10 克粉粒, 完全溶解后才符合要求, 求要配制的溶液的溶质的质量分数.

9. 如图 16-1-1-1 所示, 有一大捆粗细均匀的电线, 现要确定其长度, 从中先



取出 1 米的电线, 称出它的重量为 a , 再称其余电线和轴芯的重量为 b , 已知轴芯的重量为 c , 求这捆电线的长度.

10. 观察下列各式: $\frac{2}{1} \times 2 = \frac{2}{1} + 2, \frac{3}{2} \times$

$$3 = \frac{3}{2} + 3, \frac{4}{3} \times 4 = \frac{4}{3} + 4, \dots, \text{设 } n \text{ 为正整数,}$$

你能用含 n 的式子表示这个规律吗? 若能, 请写出这个式子.