现代数学基础

24 变分学讲义

张恭庆 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

24

变分学讲义

张恭庆 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

变分学是数学分析的一个重要组成部分，是一门与其他数学分支密切联系、并有广泛应用的数学学科。近几十年来，变分学不论是在理论上还是在应用中都有了很大发展，与数学其他分支的联系也更加紧密，已经成为大学数学教育不可缺少的部分。

本书是作者在北京大学为高年级本科生和低年级研究生开设“变分学”课程所用的讲义。全书共二十讲，分为三大部分：第一部分（一到八讲）是经典变分学的基本内容，第二部分（九到十四讲）重点介绍直接方法及其理论基础，第三部分（十五到二十讲）是专题选讲。其材料的选取，内容的编排，问题与概念的表述，以及证明的分析与讲解均极具特色。

本书适用于数学及相关专业的本科生、研究生、教师以及研究人员，也可供工科、经济学、管理学等专业的教师和学生使用参考。

图书在版编目（CIP）数据

变分学讲义 / 张恭庆编著．—北京：高等教育出版社，2011.6

ISBN 978-7-04-031958-3

Ⅰ．①变… Ⅱ．①张… Ⅲ．①变分学—高等学校—教材 Ⅳ．① O176

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 094078 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 赵天夫　　封面设计 赵 阳　　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 中国农业出版社印刷厂
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 20.75
字　　数 350 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　　次 2011 年 6 月第 1 版
印　　次 2011 年 6 月第 1 次印刷
定　　价 49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究

物 料 号 31958-00

前言

变分学 (calculus of variations) 差不多和微积分同时诞生, 至今已有三百多年的历史. 它曾是大学数学系本科的必修课程, 安排在学完微积分和常微分方程之后讲授, 主要内容是把变分问题的求解化归为微分方程. 然而只有很少几类常微分方程能够把解显式地写出来, 因此能够深入研究的变分问题是很有限的. 过去半个多世纪, 这门课在许多学校逐渐地被削减、合并, 直至分散到其他课程中去了.

然而变分学与许多数学分支有紧密的联系, 在 Hilbert 的 23 个问题中就有 3 个问题属于变分问题, 足以表明其重要性. 变分问题又直接来源于力学、物理、经济、控制、工程等学科. 特别是自 20 世纪 70 年代以来, 有限元方法和最优化技术使得变分极值问题得以数值求解, 明显地提高了变分学在应用数学中的地位.

近几十年来, 变分学不论在理论上还是在应用中都有了重大的发展. 国内外数学界都已经注意到在数学系本科教学中没有变分学不能适应学科发展的要求. 至于怎样弥补不足, 则尚在探索之中. 本书就是在这种背景下的一种尝试.

作者分别于 2006 年与 2010 年在北京大学数学科学学院为高年级本科生和低年级研究生讲授了一门 "变分学" 课程, 并按照下列三条原则来组织教学内容:

1. 既要讲经典理论, 也要讲近代变分理论和它的现代发展, 根据研究问题的不同层次逐步深入.
2. 最经常用到的理论和方法作为重点.
3. 面向全院各专业 (包括基础数学、计算数学、统计数学、信息数学与金融数学) 的学生.

我们要求听课的学生除了学过 "三高" (数学分析、高等代数、解析几何) 外, 还需

具备常微分方程、实变函数、泛函分析、微分几何、数学物理方程等方面的预备知识.

整个课程分三个阶段: 经典变分学、解的存在性与正则性、专题选讲, 后者涉及变分学的现代发展. 本书不但介绍变分学的基本概念、基本理论和基本方法, 而且还通过大量列举正例和反例来阐述这些内容: 界定新概念的内涵与所建立理论和方法的适用范围. 在前两个阶段的每讲之后附有习题, 帮助巩固学过的内容.

本书是在授课讲义的基础上整理编写而成的.

由于这门课程的开设尚在探索之中, 其内容之选取、深浅之掌握都不成熟, 加之作者学识所限, 疏漏、不足之处在所难免, 热忱欢迎读者批评指正.

作者感谢高等教育出版社的赵天夫编辑和陆珊年编辑. 他们细心的阅读和校对以及提出的宝贵意见为本书增色不少.

张恭庆　谨识

2010 年 12 月于北京大学

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目录

前言

第一讲　变分学与变分问题 **1**

§1.1　前言 1

§1.2　泛函 3

§1.3　典型例子 3

§1.4　进一步的例子 7

第二讲　Euler-Lagrange 方程 **13**

§2.1　函数极值必要条件之回顾 13

§2.2　Euler-Lagrange 方程的推导 14

§2.3　边值条件 19

§2.4　求解 Euler-Lagrange 方程的例子 21

第三讲　泛函极值的必要条件与充分条件 **29**

§3.1　函数极值的再回顾 29

§3.2　二阶变分 30

§3.3　Legendre-Hadamard 条件 32

§3.4　Jacobi 场 34

§3.5 共轭点 36

第四讲 强极小与极值场 43

§4.1 强极小与弱极小 43

§4.2 强极小值的必要条件与 Weierstrass 过度函数 44

§4.3 极值场与强极小值 46

§4.4 Mayer 场, Hilbert 不变积分 52

§4.5 强极小值的充分条件 54

§4.6 定理 4.4 的证明 ($N > 1$ 的情形)* 56

第五讲 Hamilton-Jacobi 理论 61

§5.1 程函与 Carathéodory 方程组 61

§5.2 Legendre 变换 62

§5.3 Hamilton 方程组 64

§5.4 Hamilton-Jacobi 方程 67

§5.5 Jacobi 定理* 69

第六讲 含多重积分的变分问题 75

§6.1 Euler-Lagrange 方程的推导 76

§6.2 边值条件 82

§6.3 二阶变分 83

§6.4 Jacobi 场 86

第七讲 约束极值问题 91

§7.1 等周问题 91

§7.2 逐点约束 96

§7.3 变分不等式 102

第八讲 守恒律与 Noether 定理 107

§8.1 单参数微分同胚与 Noether 定理 107

§8.2 能动张量与 Noether 定理 111

§8.3 内极小 117

§8.4 应用* 119

第九讲 直接方法 125

§9.1 Dirichlet 原理与极小化方法 125

§9.2 弱收敛与 *弱收敛 127

§9.3 *弱列紧性 130

§9.4 自反空间与 Eberlein-Schmulyan 定理* 135

第十讲 Sobolev 空间 139

§10.1 广义导数 139

§10.2 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 140

§10.3 泛函表示 143

§10.4 光滑化算子 144

§10.5 Sobolev 空间的重要性质与嵌入定理 145

§10.6 Euler-Lagrange 方程 151

第十一讲 弱下半连续性 157

§11.1 凸集与凸函数 157

§11.2 凸性与弱下半连续性 159

§11.3 一个存在性定理 162

§11.4 拟凸性* 163

第十二讲 线性微分方程的边值问题与特征值问题 171

§12.1 线性边值问题与正交投影 171

§12.2 特征值问题 175

§12.3 特征展开 179

§12.4 特征值的极小极大刻画 183

第十三讲 存在性与正则性 187

§13.1 正则性 $(n=1)$ 188

§13.2 正则性续 ($n > 1$) 192
§13.3 几个变分问题的求解 194
§13.4 变分学的局限 201

第十四讲 对偶作用原理与 Ekeland 变分原理 203
§14.1 凸函数的共轭函数 203
§14.2 对偶作用原理 207
§14.3 Ekeland 变分原理 210
§14.4 Fréchet 导数与 Palais-Smale 条件 212
§14.5 Nehari 技巧 215

第十五讲 山路定理及其推广与应用 219
§15.1 山路 (Mountain Pass) 定理 219
§15.2 应用 227

第十六讲 周期解、异宿轨与同宿轨 235
§16.1 问题 235
§16.2 周期解 237
§16.3 异宿轨 242
§16.4 同宿轨 246

第十七讲 测地线与极小曲面 251
§17.1 测地线 251
§17.2 极小曲面 255

第十八讲 变分问题的数值方法 267
§18.1 Ritz 方法 267
§18.2 有限元 269
§18.3 Cea 定理 274
§18.4 最优化方法 ——共轭梯度法 276

第十九讲　最优控制问题 **283**
§19.1　问题的提法 283
§19.2　Pontryagin 极大值原理 287
§19.3　Bang-Bang 原理 293

第二十讲　有界变差函数与图像恢复 **295**
§20.1　一元有界变差函数的回顾 295
§20.2　多元有界变差函数 299
§20.3　松弛函数 305
§20.4　图像恢复与 Rudin-Osher-Fatemi 模型 307

参考文献 **311**

索引 **315**

第一讲 变分学与变分问题

§1.1 前言

变分学是数学分析的一个重要组成部分，是一门与其他数学分支密切联系、并有广泛应用的数学学科. 例如:

◇ 大量重要的数学物理方程, 弹性、塑性力学中的微分方程, 生物薄膜方程, 几何中的微分方程等都是泛函的 Euler 方程.

◇ 最优控制理论问题是一类与传统不同的带有约束的变分问题, 在工程控制和经济学理论中经常出现.

此外, 智能材料、图像处理、最优工程设计中也出现大量新型的变分问题.

◇ 变分方法是证明椭圆型偏微分方程解的存在性的主要方法, 它已成为偏微分方程理论的重要组成部分. 变分学与偏微分方程关系之紧密可以从 Hilbert 第 19 问题与第 20 问题中看出.

◇ 偏微分方程的数值方法, 特别是有限元方法直接来自变分问题. 最优化技术的发展使得变分极值问题可以直接数值求解.

◇ 拓扑学与变分学的结合产生了一个新的分支 —— 大范围变分学, 也带来了临界点理论的大发展. 特别是 Morse 理论建立了分析与拓扑学的联系, 成为微分拓扑学的一个重要部分. Floer 同调也是这二者结合的产物.

◇ 变分理论深入到 Riemann 几何、Finsler 几何、辛几何、保形几何等学科之中. 一些几何变分问题如测地线、极小曲面、调和映射等的研究更激发了许多

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

对新理论 (如几何测度论)、新方法和新技巧的研究.

◇ 变分方法在 Hamilton 动力系统的周期轨道、Mather 集、混沌等的研究中起重要作用.

◇ 作为微分学与概率论合并之后产生的随机变分学 (Malliavin Calculus) 成为金融数学的重要部分.

由此可见, 变分学的问题、理论、方法已深入到许多近代数学包括基础数学、应用数学、计算数学、信息数学、经济数学等领域, 它在近代数学中已经占据了重要的地位.

本书与传统的教科书 (例如 [LL], [El], [Ka], [GF]) 相比, 有以下特点:

◇ 在经典变分学部分重点突出了极小点的一阶条件和二阶条件.

因为偏微分方程、微分几何、数学物理中大量有用的例子都是多个变量的, 所以对多个变量的情形花费了一定的篇幅展开讨论.

◇ 在经典理论部分增强了 Hamilton-Jacobi 理论与守恒律两节的内容, 因为它们在物理学与几何学中都是极为重要的.

◇ 除经典的变分理论外, 我们着重介绍了直接方法与应用. 直接方法是近代变分理论的重要组成部分, 也是微分方程解的存在性证明以及数值计算的基础. 这部分内容对学过泛函分析初步的学生是能够接受的. 它占据整个课程将近一半的篇幅.

◇ 特征值问题是分析数学的核心内容之一, 我们把它作为约束极值问题存在性理论的应用来介绍, 正好与泛函分析相应内容相呼应.

此外, 我们还对几个理论与应用问题做了专题介绍, 它们可以作为选讲的内容.

◇ 临界点理论是近几十年来变分学发展最快的一个分支, 也有许多应用. 特别是在微分方程解的存在性的证明中它是直接方法的一个重要补充. 这个理论的内容非常丰富, 我们只可能介绍其中最简单的一个定理 —— 山路定理, 作为临界点理论的入门.

◇ Hamilton 系统的周期解、同宿轨、异宿轨问题是动力系统与辛几何的热点问题, 在一定条件下可以用变分方法证明它们的解的存在性.

◇ 测地线与极小曲面是几何变分问题的最简单的例子. 这一讲也可以看成是几何分析的一个导引.

◇ 变分问题的数值求解主要用有限元与数值优化技术, 而有限元方法的理论

又是建立在变分理论基础之上的.

◇ 可以根据情况, 再选择一个有实际背景的问题, 如最优控制问题、图像处理问题, 以了解变分问题新的理论与应用. 这几讲的内容是相互独立的.

全书共分二十讲. 前八讲是经典的变分学, 第九讲到第十四讲介绍直接方法, 这两部分是本书基本的内容; 从第十五讲到第二十讲是一些专题介绍, 可以作为选讲的材料. 书中带星号 * 的章节, 初读时可以略去.

§1.2 泛函

变分学是研究泛函极值 (以及更一般的临界值) 的一个数学分支.

一般地, 人们把从任意集合 M 到实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 的映射通称为泛函. 但在变分学中, 泛函只取实值, 定义域 M 是一个函数集合, 即 $I: M \to \mathbb{R}$.

例如, 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开集, $x_0 \in \Omega$ 是一个固定点, $F \in C(\bar{\Omega})$, $M = C^1(\bar{\Omega})$.

$$I_1(u) = \max_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)|, \quad I_2(u) = u(x_0), \quad I_3(u) = \int_\Omega [|\nabla u(x)|^2 - F(u(x))]dx$$

都是泛函. 但不论取什么样的 M 和一元函数 f, 复合函数

$$I_4(u) = f(u(x))$$

都不是泛函!

给定一个函数 $L \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$, 变分学主要研究如下形式的泛函:

$$I(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))dx,$$

其中 M 是连续可微函数类 $C^1(\bar{\Omega})$ 的子集合, 或者是某种广义可微函数类的子集合, 它由一些限制条件如 (积分形式的、逐点的、带微分的、不带微分的) 边值条件和约束条件等所规定.

有时, I 的积分中还可以含有高阶导数项, M 也应做相应的改变.

§1.3 典型例子

例 1.1 (最速下降线) 在垂直平面上给定两点 $A = (x_1, y_1)$ 和 $B = (x_2, y_2)$, 其中 $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$. 一个质点沿着一条连接这两点的光滑曲线仅借重力下滑. 设初速度为零, 问沿怎样的一条曲线滑行时间最短 (见图 1.1)?

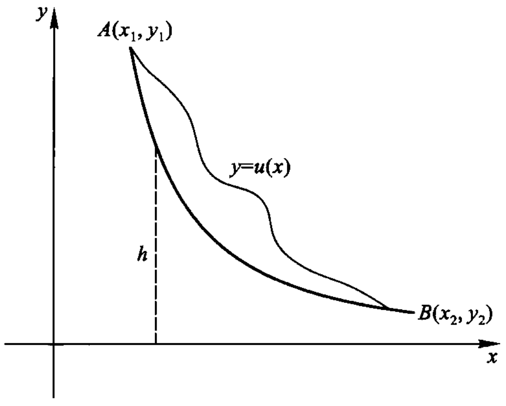

图 1.1　最速下降线

设 $u \in C^1[x_1,x_2], \{(x,u(x)) \mid x \in [x_1,x_2], u(x_i)=y_i, i=1,2\}$ 是连接 A,B 的一条曲线. 因为有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 = mgh, \\ v = \dfrac{ds}{dt}, \end{cases}$$

所以

$$v = \sqrt{2g(y_1 - u(x))},$$

以及

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1+|u'(x)|^2}{2g(y_1-u(x))}}dx,$$

总时间

$$T = \int_{x_0}^{x_1} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+|u'(x)|^2}{y_1-u(x)}}dx.$$

令

$$M = \{u \in C^1([x_1,x_2]) \mid u(x_i)=y_i, i=1,2\},$$

则映射

$$M \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto T$$

是一个 "泛函". 这里 u 是自变量, $T=T(u)$ 是因变量. 我们要在 M 中求 u 以使 T 达到极小. □

例 1.2 (测地线)　在单位球面 $S^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$ 上给定两点 $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0), P_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, 求连接这两点的弧长最短的曲线.

我们采用球面坐标 $v=(\theta,\varphi)\in[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]\times[0,2\pi)$, 则

$$\begin{cases} x_1=x_1(v)=\cos\theta\cos\varphi, \\ x_2=x_2(v)=\cos\theta\sin\varphi, \\ x_3=x_3(v)=\sin\theta, \end{cases}$$

确定出 $v^i=(\theta^i,\varphi^i)$, 满足 $P_i=(x_1(v^i),x_2(v^i),x_3(v^i)),i=0,1$.

设 $M=\{v\in C^1([0,1],[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi))\,|\,v(i)=v^i,i=0,1\}$, 则 $\forall v\in M$, $u(t)=(x_1(v(t)),x_2(v(t)),x_3(v(t)))$ $(t\in[0,1])$ 是连接 P_0,P_1 两点的曲线.

这曲线弧元的平方是

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=d\theta^2+\cos^2\theta d\varphi^2=(\theta'(t)^2+\cos^2\theta(t)\varphi'(t)^2)dt^2.$$

故弧长 $L:M\to\mathbb{R}$ 为

$$L(v)=\int_0^1|ds|=\int_0^1\sqrt{(\theta'(t)^2+\cos^2\theta(t)\varphi'(t)^2)}dt.$$

弧长 L 是曲线函数 $v(t)=(\theta(t),\varphi(t))$ 的泛函. 我们要在 M 中求出一个函数 $v(t)=(\theta(t),\varphi(t))$ 使得泛函 $L(v)$ 达到极小值. □

例 1.3 (极小曲面) 在空间 $\mathbb{R}^3$ 中给定一条 Jordan 曲线 Γ, 能否找到一个盘状的曲面 S 张在 Γ 上使其面积达到极小值? 用参数方程描写 $S:(u,v)\mapsto Z=(x,y,z):\bar{D}\to\mathbb{R}^3$, 其中 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是单位圆, $u^2+v^2\leqslant1$,

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v). \end{cases}$$

这曲面的面积是

$$\begin{aligned} A(Z)&=\int_D|Z_u\times Z_v|dudv \\ &=\int_D\sqrt{(x_uy_v-y_ux_v)^2+(y_uz_v-z_uy_v)^2+(z_ux_v-x_uz_v)^2}dudv. \end{aligned}$$

面积 A 是曲面函数 Z 的泛函. 我们要在 $Z|_{\partial D}$ 与 Γ 同胚的条件下求 A 的极小值, 即取

$$M=\{Z\in C^1(\bar{D},\mathbb{R}^3)\,|\,Z|_{\partial D}\simeq\Gamma\},$$

求向量函数 $Z(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in M$, 使得 $A(Z)$ 达到极小值. □

例 1.4 (特征值问题与不等式) 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域 Ω. $\forall u \in H_0^1(D)$, 其中 $H_0^1(D)$ 是边值为零的 Sobolev 空间 (详见第十讲), 我们定义能量

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx,$$

以及约束

$$G(u) = \int_\Omega |u(x)|^2 dx = 1.$$

定义

$$M = \{u \in H_0^1(D) \mid G(u) = 1\}.$$

我们要在 M 中寻求函数 u_1 使得泛函 $E : M \to \mathbb{R}$ 在 u_1 达到极小值.

$$\lambda_1 = \min\{E(u) \mid G(u) = 1\}$$

称为第一特征值, u_1 称为第一特征函数. 它们在几何、物理以及工程中都有重要的意义.

许多分析与几何上的不等式都可以提成变分问题求解. 例如, Sobolev 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx \leqslant S_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{2N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{N}},$$

其中

$$S_N = N(N-2)\pi \left(\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N/2)} \right)^{-2/N}.$$

我们可以把它化成在

$$M = \left\{ u \in H_0^1(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{2N}{N-2}} dx = 1 \right\}$$

中求泛函

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx$$

的极大值.

如其极大值是 S_N, 还表明 S_N 是使这个不等式成立的最佳常数. □

例 1.5 (薄板的振动) 弹性 (齐次、各向同性的) 薄板受外力振动. (所谓薄板是指板的厚度 h 与其最小跨度 a 之比 $h/a \ll 1$. 对于这类弹性力学问题, Kirchoff 提出 "直法线假设", 即薄板在变形时, 它的法线仍保持为法线, 且没有伸长应变.)

设一块薄板占有平面区域 Ω, 它的密度是 $\rho(x,y)$. 用 $w(x,y)$ 表示在 $(x,y) \in \Omega$ 处的位移.

把内力与外力合在一起, 其总效果通过位能密度表现出来.

由应力及应变关系产生的部分位能密度依赖于 $w(x,y)$ 的 Hesse 矩阵

$$\begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{pmatrix}.$$

任何物理量都与坐标的选取无关, 所以这部分位能密度只依赖于 $w_{xx}+w_{yy}$ 与 $w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2$ 这两个量.

作用在 Ω 上的外力面密度 $f(x,y)$ 产生的部分位能密度表现为外力功. 如果略去作用在边界 $\partial\Omega$ 上的力与边界弯曲矩不计, 那么总位能

$$U(w)=\int_\Omega \left\{\frac{1}{2}[(w_{xx}+w_{yy})^2-2(1-\mu)(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2)]+f(x,y)w(x,y)\right\}dxdy,$$

其中 μ 是由材料本身决定的, 称为 Poisson 比.

若我们固定薄板的边界, 即 $w|_{\partial\Omega}=\varphi(x)$, 其中 φ 是 $\partial\Omega$ 上给定的一个函数.

引入 $M=\{w\in C^2(\bar{\Omega})\,|\,w|_{\partial\Omega}=\varphi(x)\}$, 则总位能 U 便是 M 上位移函数 w 的泛函.

力学原理告诉我们: 薄板的平衡 w 遵从变分原理. 也就是说, 那些实现总位能泛函 U 极小的位移函数 w 是薄板的平衡位置. □

§1.4 进一步的例子

除了典型的例子外, 还有一些问题, 从表面上看似乎与泛函极值联系不起来, 但经过一定的转化, 仍可归为变分问题.

例 1.6 (商品的再投资) 生产一种商品, 单位时间产出率为 $q=q(t)$, 生产增长的速度 $\dot{q}$ 与产品的再投资的百分比 $u(t)$ 成正比, 即

$$\dot{q}=\alpha uq,$$

其中 $\alpha>0$ 是一个常数. 因此在时间区间 $[0,T]$ 内市场的总商品量是

$$J(u,q)=\int_0^T(1-u(t))q(t)dt.$$

已知 $q(0)=q_0$, 怎样选择再投资的百分比 $u(t)$, 以使市场的总商品量达到极大值?

在这个问题中, 取

$$M=\{(u,q)\in C[0,T]\times C^1[0,T]\,|\,0\leqslant u(t)\leqslant 1, \dot{q}=\alpha uq, q(0)=q_0\}.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com