高等学校教材

线性代数

高雷阜　主编

Linear Algebra

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

高雷阜　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书由实际问题出发，以逐步解决问题的方式，系统地介绍了线性代数的基本知识，以及相关问题的数学建模思想和数学实验的实现技术。主要内容包括行列式，矩阵，线性方程组，相似矩阵及二次型，线性空间和线性变换，各章均配有适量习题，书末附有习题答案。为了培养和提高学生的应用能力，本书还编写了 MATLAB 数学软件应用于线性代数和线性代数综合应用实例两个附录。全书涵盖了本科非数学类专业线性代数课程所有内容和研究生数学考试大纲有关线性代数的相关知识。

本书取材精炼，讨论角度独具特色，各章前有历史展望，章末有小结，有益于学生开拓视野，加深对数学本身的理解。

本书可作为普通高等学校非数学类专业本科学生教材，也可供高等学校教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/高雷阜主编. —北京：高等教育出版社，2011.2

ISBN 978-7-04-031419-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①高… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 002106 号

策划编辑 兰莹莹 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 张申申
责任绘图 尹文军 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 胡晓琪
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2011 年 2 月第 1 版
印　　张	11.25	**印　　次**	2011 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	200 000	**定　　价**	16.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 31419-00

前　言

本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)”和“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”中线性代数基本要求,在多年教学经验和讲义的基础上整理而成的。

线性代数是研究线性空间(向量空间)、模(代数结构与表示理论)、线性变换以及与之有关问题(如线性、双线性、二次函数等)的一门课程。

“线性”是线性代数的本质问题。当独立变量改变很小时,任意光滑函数均接近于线性函数(误差是一个高阶无穷小)。比例性和无关性是线性问题的两个主要特性,在研究依赖于某些因素作用的量时,在作用很小的情况下,关于该量变动的任何问题,在它的第一级逼近的范围内一般可以看作是线性问题,即具有比例性和无关性的问题。

用现代数学的观点来重新审视与认识数学基础课是数学教育现代化的重要途径。数学本身理论与方法和数学实验技术是两个很重要的驱动因素。外微分形式使微积分从古典走向现代,而模的理论使线性代数从古典走向现代。数学实验和数学理论的相互推动和延伸也是加快代数几何化和代数分析化也即数学形式统一化的重要因素。

认识一门课程所涉及知识的发展历史和问题产生的背景,无疑会帮助读者明晰问题产生的渊源和问题的本质,使系统问题统一化,从而达到走进历史、和历史人物对话的效果。

本书尝试以上述几点为主要特色,将线性代数各部分内容发展历史和问题产生的背景结合起来,将数学实验技术和数学建模思想融合进去,将离散化数学处理和数值实现作为线性代数经典理论内容的补充。

全书共5章,并附2个附录,其中*号内容供选修。每章均配有习题,书末附参考答案。第1、2章由齐俊玲编写,第3、4章由柴岩编写,第5章由高雷阜编写,附录由胡行华编写。全书由高雷阜统稿、定稿。

本书在编写过程中得到高等教育出版社的支持和评审专家的关心和改进意见,谨此表示衷心感谢。

由于编者水平所限,错误与疏漏之处在所难免,还望读者不吝赐教。

编者

2010年7月

目　　录

第1章　行列式(Determinant)

研究多因素的量所引起的问题,需要考察多元函数.如果因素之间的关联性是线性的,那么称这个问题为线性问题.历史上线性代数的第一个问题是解线性方程组的问题,而线性方程组理论的发展又促成了作为工具的矩阵论和行列式理论的创立与发展.最初的线性方程组问题大都是来源于生活实践,正是实际问题刺激了线性代数这一学科的诞生与发展.另外,近现代数学分析与几何学等数学分支的要求也促进了线性代数的进一步发展.

行列式出现于线性方程组的求解,它最早只是一种速记的表达式.行列式理论是在1683年和1693年由日本数学家关孝和(Takakazu Seki Kowa)与德国数学家莱布尼茨(Leibniz)提出的,大约比形成独立体系的矩阵理论早160年.

1750年,瑞士数学家克莱姆(G. Cramer)对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述,并给出了解线性方程组的克莱姆法则.随后法国数学家贝祖(E. Bezout)将确定行列式每一项符号的方法进行了系统化,利用系数行列式概念指出了如何判断一个齐次线性方程组有非零解.

第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述,即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人,是法国数学家范德蒙德(A. - T. Vandermonde),给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则.1772年,法国数学家拉普拉斯(Laplace)在一篇论文中证明了范德蒙德提出的一些规则,推广了其展开行列式的方法.

1815年,法国数学家柯西(Cauchy)在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理.其中主要结果之一是行列式的乘法定理.另外,第一个把行列式的元素排成方阵,采用双足标记法;引进了行列式特征方程的术语;给出了相似行列式概念;改进了拉普拉斯的行列式展开定理并给出了一个证明等.

柯西之后,在行列式理论方面最多产的人就是德国数学家雅可比(J. Jacobi),引进了函数行列式,指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用,给出了函数行列式的导数公式.其著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式系统理论的建成.由于行列式在数学分析、几何学、线性方程组理论、二次型理论等多方面的应用,促使行列式理论自身在19世纪也得到了很大发展.

1.1　二、三阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的. 例如用消元法解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \tag{1.2}$$

规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**. 其中 $a_{ij}\,(i,j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的第 i 行,第 j 列元素,i 是行标,j 是列标.

上述二阶行列式的计算方法可用对角线法则来记忆. 如图1－1,把 a_{11},a_{22} 所在的对角线称为主对角线,a_{12},a_{21} 所在的对角线称为副对角线. 于是二阶行列式可看作由主对角线元素之积减去副对角线元素之积得到的.

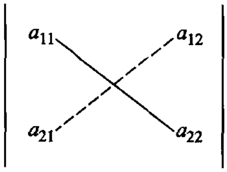

图1－1

利用二阶行列式,(1.2)式可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.4}$$

类似地,规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.5}$$

为**三阶行列式**.

三阶行列式的计算方法也可用对角线法则. 如图1－2,平行于主对角线的实线上的元素乘积取正号,平行于副对角线的虚线上的元素乘积取负号.

同样用消元法求解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

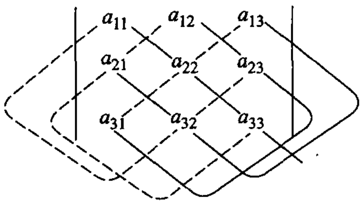

图 1－2

当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，

解得

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得到的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.1 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则得

$$D=0\times2\times1+1\times0\times1+2\times1\times(-1)-2\times2\times1-1\times1\times1-0\times0\times(-1)=-7.$$

为引入 n 阶行列式定义，首先介绍一些预备知识.

1.2 逆序数与对换

把 n 个不同元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**（以下简称排列）. n 个不同元素所有排列的种数是 $n!$（一般地讨论 $1,2,\cdots,n$ 的排列）.

其中从小到大的排列顺序规定为标准次序.

在 n 个不同元素的任一排列中，某两个元素的先后次序与标准次序不同，就说构成一个**逆序**，一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，若 j_i 前面出现 t_i 个比它大的数，则此排列的逆序数为 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$. 例如 $\tau(2431)=4$，是偶排列. $\tau(35241)=7$，是奇排列.

在排列中,仅互换两个元素的位置,其余元素位置不变,称对此排列做了一次对换.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证明 先证相邻元素对换的情形:

设排列为 $a_1\cdots a_m abb_1\cdots b_n$. 对换 a,b 后的排列为 $a_1\cdots a_m bab_1\cdots b_n$. 若 $a<b$,则对换后新排列比原排列逆序数增加 1. 若 $a>b$,则对换后新排列比原排列逆序数减少 1. 总之,相邻两个元素对换一次,排列的奇偶性改变.

再证非相邻对换的情形:

设排列为 $a_1\cdots a_m ab_1\cdots b_n bc_1\cdots c_l$. 将 a 先作 n 次相邻对换,得到排列 $a_1\cdots a_m b_1\cdots b_n abc_1\cdots c_l$,再将 b 作 $n+1$ 次相邻对换得到 $a_1\cdots a_m bb_1\cdots b_n ac_1\cdots c_l$,共进行 $2n+1$ 次相邻对换,所以排列的奇偶性改变.

推论 奇排列经过奇数次对换变成标准排列,偶排列经过偶数次对换变成标准排列.

证明 由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而标准排列是偶排列,因此推论成立.

1.3 n 阶行列式定义

n 阶行列式定义方式不唯一,在这里通过研究二、三阶行列式的结构,来给出 n 阶行列式的结构式定义.

由三阶行列式展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

观察其具有如下特点:

(1) 共 3! 项的和,每一项都是取自不同行不同列 3 个元素的乘积. 因此一般项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,其中 $p_1p_2p_3$ 为 1,2,3 的全排列,n 阶行列式共 $n!$ 项,每一项都是取自不同行不同列 n 个元素的乘积,一般项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的全排列.

(2) 当每一项中元素的行标都是标准次序,而列标次序不同,因此符号由列标决定. 且列标是偶排列时,该项取正号,列标是奇排列时,该项取负号. 故每一项的符号可记为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2} (-1)^{\tau(p_1 p_2)} a_{1p_1} a_{2p_2}.$$

定义 1.1 将 $n\times n$ 个数排成 n 行 n 列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列.

由定理 1.1 的推论可知，n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n},$$

其中 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列.

例 1.2 用定义法计算下列特殊的 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$（对角行列式）；

(2) $\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$(下三角行列式);

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$(上三角行列式).

其中未写出的元素为0.

解 (1) 由 n 阶行列式定义可得,除了$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,其他项均为零,因此行列式的值为主对角线元素的乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(2) 由 n 阶行列式定义可得,除了$(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$,其他项均为零,因此行列式的值为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

(3) 由于当 $j>i$ 时,$a_{ij}=0$,除了$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,其他项均为零,因此行列式的值为主对角线元素的乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(4) 同理 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

显然,行列式中若某一行(列)元素均为零,则行列式的值为零.

1.4 行列式的性质

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

即 $b_{ij}=a_{ji}$,则按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

又 $D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，

则根据 n 阶行列式定义有 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式中凡是对行成立的性质对列也成立，反之亦然.

性质 2 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则该行列式等于下列两个行列式之和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明

$$\begin{aligned} D &= \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots(a_{iq_i}+a_{iq_i}')\cdots a_{nq_n} \\ &= \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}+ \\ &\quad \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{iq_i}'\cdots a_{nq_n}. \end{aligned}$$

性质 3 对行列式做如下变换时成立：

(1) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

(2) 行列式中的某一行(列)中所有元素都有公因子 k，则数 k 可以提到行列式外面.

推论 2 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式等于零.

(3) 把行列式的某一行(列)的各元素乘同一数 k 加到另一行(列)对应的元素上去，行列式值不变.

证明 (1) 记 $D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 是由行列式 D 对换 i,j 两行得到的,即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;当 $k=i,j$ 时,$b_{ip}=a_{jp}$,$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

显然 $(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}$,故 $D_1=-D$.

$$(2)\ D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论1,推论2,(3)的证明留给读者.

以 r_i,c_i 分别表示行列式的第 i 行,第 i 列. 交换 i,j 两行(列)记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;对第 i 行(列)乘数 k,记作 $kr_i(kc_i)$;将第 j 行(列)元素乘数 k 后加到第 i 行(列),记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

性质3介绍了行列式关于行(或列)的三种运算,即 $r_i\leftrightarrow r_j,kr_i,r_i+kr_j$(或 $c_i\leftrightarrow c_j,kc_i,c_i+kc_j$),利用这些运算可简化行列式的计算,特别是利用运算 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 可以把行列式化为上(下)三角行列式. 从而简化行列式的计算.

例 1.3 求行列式 D 的值:

$$D=\begin{vmatrix} 103 & 2 & 3 \\ 205 & 4 & 5 \\ -194 & -4 & 6 \end{vmatrix}.$$

解 $D=\begin{vmatrix} 100 & 2 & 3 \\ 200 & 4 & 5 \\ -200 & -4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 6 & -4 & 6 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}=0.$

例 1.4 求行列式 D 的值：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -8 & 6 & 8 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_2-3r_1 \\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & -9 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+3r_2 \\ \frac{1}{2}r_4}}{=\!=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 21 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3-7r_4 \\ r_3\leftrightarrow r_4}}{=\!=\!=\!=} 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -36.$$

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_1,a_2,\cdots,a_n\neq 0)$.

解法一 将第 1 行乘(-1)加到第 $2,3,\cdots,n$ 行后，再将第 $2,3,\cdots,n$ 列依次乘$\frac{a_1}{a_i}(i=2,3,\cdots,n)$加到第 1 列得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)a_2a_3\cdots a_n=\prod_{i=1}^{n}a_i\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right].$$

解法二 第 i 行提出 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1}\\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right].$$

1.5 行列式按行(列)展开法则

由于低阶行列式的计算比高阶行列式的计算更简单，于是考虑将高阶行列式化成低阶行列式来计算，为此先引入元素余子式及其代数余子式的概念.

定义 1.2 在 n 阶行列式中，将第 i 行以及第 j 列所有元素全部划去，余下的元素按原来的位置保持不变构成的$(n-1)$阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，用 M_{ij} 表示. $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，用 A_{ij} 表示，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

中元素 a_{34} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{34}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}.$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

引理 在 n 阶行列式 D 中，若第 i 行元素除 a_{ij} 外其余都为零，则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}.$$

证明 先证 $a_{ij}=a_{11}$ 的情形：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)}a_{11}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

$$=a_{11}\sum(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1,i-2,\cdots,1$ 行对换，此时 a_{ij} 位于第 1 行第 j 列，对换的次数为 $i-1$ 次. 再把第 j 列依次与第 $j-1,j-2,\cdots,1$ 列对换，此时 a_{ij} 位于第 1 行第 1 列，对换的次数为 $j-1$ 次. 共经过 $i+j-2$ 次对换，使 a_{ij} 位于第 1 行第 1 列，令得到的行列式为 D_1，则 $D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}D_1$，而 D_1 中第 1 行第 1 列元素的余子式就是 D 中第 i 行第 j 列元素的余子式