

二十一世纪普通高等院校实用规划教材·经济管理系列

经济数学

(第2版)

JINGJI SHUXUE

张杰明 主 编
张晋珠 郝建华 副主编

- 先进性与基础性相统一 •
- 教材建设与教学改革相统一 • 综合性与针对性相统一 •

清华大学出版社



二十一世纪普通高等院校实用规划教材 经济管理系列

经 济 数 学

(第2版)

张杰明 主 编

张晋珠 郝建华 副主编

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是根据高等学校经济类专业微积分课程的教学大纲组织编写的。在体系编排上注重突出数学课程的循序渐进、由浅入深的特点。全书以“注重概念、强化应用、培养技能”为重点,充分体现了“以应用为目的,以基本够用为标准”的原则。

本书的主要内容有一元函数微积分学、微分方程、多元函数微积分学、无穷级数。为了更好地适应现代数学教学的要求,本书在附录 A 和附录 B 分别介绍了数学建模和数学软件 MATLAB 的内容。各节配有习题和自测题,书末附有习题答案。带 * 号内容供学时较多的专业选用。

本书可作为高等学校、成人高校及本科院校举办的二级学院和民办高校的教材。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/张杰明主编;张晋珠,郝建华副主编. --2 版. --北京:清华大学出版社,2011.9

(二十一世纪普通高等院校实用规划教材 经济管理系列)

ISBN 978-7-302-26356-2

I. ①经… II. ①张… ②张… ③郝… III. ①经济数学—高等学校—教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 156625 号

责任编辑:彭欣 桑任松

封面设计:山鹰工作室

版式设计:杨玉兰

责任校对:周剑云

责任印制:王秀菊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京密云胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印 张:29.25 字 数:707 千字

版 次:2011 年 9 月第 2 版 印 次:2011 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:49.00 元

产品编号:040533-01

前 言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，是人类文化和文明的重要组成部分，是训练思维的体操。随着现代科学技术和数学科学的发展，“数量关系”和“空间形式”具备了更丰富的内涵和更广泛的外延。能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志，数学教育在培养高素质科学技术人才中具有其独特的、不可替代的重要作用。

步入二十一世纪，学科间的交叉与融合越来越普遍，作为一种定量分析工具，数学方法在经济、管理研究中被大量运用，尤其是在金融工程、保险精算等行业。因此，普通高校经管类各专业对数学课程提出了新的更高的要求，数学教学更加注重培养学生运用数学知识解决实际经济问题的能力。针对新形势下大学数学教育的改革思路以及教育部高等院校应用型人才的培养目标，结合课程组多年的教学实践，编写了适用于经管类各专业学生使用的数学教材《经济数学》，旨在全面培养优秀的经济应用及经济管理人才，使他们更快地掌握数学方法，为经济建设服务。通过三年的试用和三年的使用，取得了很好的教学效果，极大地提高了数学教学质量。在 2010 年的山西省普通高等学校教学成果奖评选中，以该教材为主的独立学院《经济数学》教材内容与教学方法改革的研究荣获省级教学成果二等奖。

本书在编写过程中，注重以高等学校经管类专业微积分课程的教学大纲为基础，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，注意与经管类专业课程的衔接，并保持数学学科的科学性和系统性，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂，满足了高等教育实践性、应用性强的特点。在概念引入、理论分析等环节上注意结合经管类学生的实际，尽可能从学生熟悉的问题入手，进行深入浅出的讲解，力求使基本概念、基本定理直观化、具体化，这样可以使学生从实际背景中理解微积分概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示，从而最大限度地降低学习难度。本书在例题和习题的选配上，遵循由易到难的原则，同时辅以前年研究生入学考试中的经典题型，以满足不同层次学生的需求。

为了更好地适应高等教育应用型人才的培养，我们结合高校教材最新的发展趋势，对本



书进行了全面的修改,对部分内容进行了增、减、删的处理,特别把数学文化修养提到了一个新的高度。

数学是人类文化的重要组成部分,数学与文化有着密切的关系。把数学看成是一种崭新的文化,是人类如何对待世界的一种新态度和一种新思维。但是长期以来,人们总是视数学为工具性学科,数学教育也往往只重视数学的工具性价值,而忽略了数学的文化教育价值,导致数学素质教育不能全面正确地贯彻落实。因此,深刻理解数学的文化内涵十分重要与必要。有鉴于此,本书在各章结尾附有与其内容相关的数学文化知识,包括数学史、数学家简介、数学轶事等内容,使学生真正体会到数学之美,充分展现数学课程的人文教育功能。

随着信息技术的飞速发展,计算机辅助教学受到了国内外同行的普遍认可,国内外许多高校已开始了利用计算机进行微积分教学的实践。因此,本书在附录中对 MATLAB 数学软件进行了简要介绍,包括 MATLAB 的基本使用方法,并给出了借助其完成公式演算、数值计算、图形绘制的习题,其目的是为了突出对学生建模能力的培养,提高学生的分析能力和运用数学知识解决实际问题的能力。

本书共分十一章,建议课时分配如下:

章 序	内 容	课 时	课时分配	
			必 学	选 学
一	函数	8	8	
二	极限 连续	10	10	
三	导数与微分	14	14	
四	导数的应用	12	12	
五	不定积分	10	8	2
六	定积分	12	10	2
七	定积分的应用	6	5	1
八	微分方程	13	9	4
九	多元函数微分学	15	12	3
十	多元函数积分学	9	6	3
十一	无穷级数	14	11	3
	合 计	123	105	18

书中部分内容加了*号,任课教师可根据教学的需要决定是否讲授。

本书由山西大学商务学院张杰明教授提出编写思想和提纲、列出章节目录,并负责全

书的策划、统稿、定稿，并且编写了第一章和附录 C；赵转萍老师编写第二章，景冰清老师编写第三章，赵丽霞编写第四章，安勇老师编写第五章，杨秀萍副教授编写第六章，山西省青干院的郝建华副教授编写第七章和附录 B，范新英编写第八章，杨晨编写第九章，太原工业学院的张晋珠副教授编写第十章和附录 A，王丽丽老师编写第十一章。在编写过程中，山西大学的郭耀鹏教授、山西财经大学的王拉娣教授和太原理工大学的张洪斌教授仔细审阅本书，并提出许多宝贵的指导意见，给本书增色不少。本书还得到山西大学商务学院的徐仲安教授、俞士谦教授、杨继平教授的大力支持。

由于编者的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，希望能得到读者的批评指正。

编 者

目 录

第一章 函数	1	习题 1-4	27
第一节 集合	1	阅读资料	28
一、集合的概念	1	本章小结	29
二、集合的运算	2	第二章 极限 连续	31
三、绝对值	3	第一节 极限	31
四、区间和邻域	4	一、数列极限	31
习题 1-1	5	二、函数极限	35
第二节 函数	6	习题 2-1	40
一、函数的概念	6	第二节 极限的运算	41
二、函数的性质	9	一、极限运算法则	41
三、建立函数关系的例题	12	二、两个重要极限	43
习题 1-2	13	习题 2-2	48
第三节 反函数、复合函数和		第三节 无穷小量与无穷大量	49
初等函数	14	一、无穷小量	49
一、反函数	14	二、无穷大量	51
二、基本初等函数	15	三、无穷小量的比较	53
三、复合函数	20	习题 2-3	56
四、初等函数	21	第四节 连续	56
习题 1-3	21	一、函数连续的概念	56
第四节 经济学中的几个常用函数	22	二、连续函数的性质与初等函数	
一、需求函数与供给函数	22	的连续性	60
二、成本函数、收益函数与利润		三、闭区间上连续函数的性质	63
函数	24	习题 2-4	65
三、其他经济函数	26	知识拓展 复利、贴现模型(极限)	66



阅读资料	70	第四章 导数的应用	110
本章小结	71	第一节 微分中值定理	110
第三章 导数与微分	73	一、罗尔定理	110
第一节 导数概念	73	二、拉格朗日中值定理	111
一、导数定义	73	* 三、柯西中值定理	113
二、几个基本初等函数的导数		习题 4-1	114
公式	77	第二节 洛必达法则	114
三、可导与连续的关系	80	习题 4-2	118
习题 3-1	81	第三节 函数的单调性与极值	118
第二节 导数的运算法则	82	一、函数单调性的判别法	118
一、函数的和、差、积、商的求导		二、函数极值的判别法	120
法则	82	三、最大值和最小值的求法	125
二、反函数求导法则	85	习题 4-3	128
三、复合函数求导法则	86	第四节 函数图形的描绘	129
四、初等函数的求导问题	88	一、曲线的凹凸性与拐点	129
习题 3-2	89	二、函数图形的描绘	132
第三节 高阶导数、隐函数及由参数		习题 4-4	137
方程所确定的函数的导数	91	第五节 导数在经济分析中的应用	137
一、高阶导数	91	一、边际与边际分析	137
二、隐函数的导数	93	二、弹性与弹性分析	141
* 三、由参数方程所确定的函数		习题 4-5	146
的导数	95	知识拓展 生产函数模型(微分)	147
习题 3-3	97	阅读资料	149
第四节 微分	98	本章小结	150
一、微分的定义及几何意义	98	第五章 不定积分	152
二、微分的运算法则	100	第一节 不定积分	152
三、近似计算	103	一、原函数与不定积分的概念	152
习题 3-4	106	二、不定积分的几何意义	153
阅读资料	107	三、基本积分表	154
本章小结	109		

四、不定积分的性质	155	二、定积分的分部积分法	194
习题 5-1	157	习题 6-3	197
第二节 换元积分法	158	第四节 广义积分	197
一、不定积分第一类换元法		一、无穷区间上的广义积分	198
(凑微分法)	158	二、无界函数的广义积分	200
二、不定积分第二类换元法	163	习题 6-4	202
习题 5-2	167	* 第五节 定积分的近似计算	202
第三节 分部积分法	168	一、矩形法	202
习题 5-3	171	二、梯形法	203
* 第四节 有理函数的积分	171	三、抛物线法	204
一、有理真分式化为部分分式		习题 6-5	206
之和	171	阅读资料	206
二、有理真分式的积分	173	本章小结	207
习题 5-4	174		
第五节 积分表的使用方法	174	第七章 定积分的应用	209
习题 5-5	175	第一节 定积分的元素法	209
阅读资料	176	第二节 定积分在几何上的应用	211
本章小结	176	一、平面图形的面积	211
第六章 定积分	178	二、旋转体的体积	216
第一节 定积分	178	习题 7-2	218
一、定积分的概念	178	第三节 定积分在经济上的应用	220
二、定积分的性质	182	一、已知边际函数求总量	
习题 6-1	185	的问题	220
第二节 微积分基本定理	186	二、投资问题	221
一、变上限函数及其导数	186	三、国民收入分配问题	223
二、牛顿-莱布尼茨公式	187	四、消费者剩余和生产者剩余	
习题 6-2	190	问题	224
第三节 定积分的换元积分法和分部		习题 7-3	225
积分法	190	知识拓展 红绿灯管理模型(积分)	225
一、定积分的换元积分法	190	阅读资料	228
		本章小结	230



第八章 微分方程	231	一、空间直角坐标系	274
第一节 微分方程的基本概念	231	二、曲面与方程	276
习题 8-1	234	习题 9-1	280
第二节 一阶微分方程	234	第二节 多元函数的概念、极限	
一、可分离变量的微分方程	235	与连续	280
二、齐次方程	237	一、多元函数的概念	280
三、一阶线性微分方程	239	* 二、常见的多元经济函数	283
四、微分方程在几何中的应用	242	三、多元函数的极限与连续	285
习题 8-2	244	习题 9-2	288
* 第三节 可降阶的高阶微分方程	245	第三节 偏导数与全微分	289
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	245	一、偏导数的概念	289
二、 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程	246	二、高阶偏导数	291
三、 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程	247	三、偏导数的经济意义	293
习题 8-3	248	四、全微分的概念	295
第四节 二阶常系数线性微分方程	248	* 五、近似计算	298
一、二阶常系数齐次线性微分方程	248	习题 9-3	299
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	252	第四节 多元复合函数与隐函数的微分法	300
习题 8-4	258	一、复合函数的微分法	300
第五节 差分方程	259	二、隐函数的微分法	304
一、差分的概念与性质	259	习题 9-4	305
二、差分方程的概念	260	第五节 多元函数的极值	305
三、一阶常系数线性差分方程	262	一、二元函数的极值	306
习题 8-5	265	二、最大值与最小值	307
第六节 微分方程在经济中的应用	266	* 三、条件极值	309
阅读资料	270	* 四、最小二乘法	310
本章小结	272	习题 9-5	312
第九章 多元函数微分学	274	知识拓展 期权定价模型(偏微分)	313
第一节 空间解析几何简介	274	阅读资料	316
		本章小结	318

第十章 多元函数积分学	320	三、任意项级数	355
第一节 二重积分	320	习题 11-2	357
一、二重积分的概念	320	第三节 幂级数及其性质	358
二、二重积分的性质	322	一、幂级数及其收敛性	359
习题 10-1	323	二、幂级数的运算性质	362
第二节 二重积分的计算	324	习题 11-3	364
一、利用直角坐标系计算二重		第四节 函数展开成幂级数	364
积分	324	一、泰勒级数	365
二、交换累次积分次序计算二重		二、函数展开成幂级数	366
积分	331	* 三、幂级数在近似计算中	
* 三、利用极坐标计算二重		的应用	369
积分	332	习题 11-4	371
习题 10-2	336	第五节 级数在经济中的应用举例	371
* 第三节 二重积分的应用	337	知识拓展 人口预测模型	374
习题 10-3	339	阅读资料	378
阅读资料	339	本章小结	379
本章小结	341	附录 A 积分表	380
第十一章 无穷级数	342	附录 B 数学建模简介	390
第一节 数项级数	342	附录 C 数学软件 MATLAB 简介	414
一、数项级数的基本概念	343	部分习题参考答案	428
二、数项级数的性质	345	参考文献	451
习题 11-1	348		
第二节 数项级数收敛判别法	348		
一、正项级数及其比较判别法	349		
二、交错级数	353		



第一章 函 数

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学研究的主要对象是变动的量.而函数就是变量之间依赖关系的数学描述.本章将在集合的基础上介绍函数的基本概念及其主要性质.

第一节 集 合

一、集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一.研究任何对象都不可避免地用到集合,所有自然数的集合、一个方程的根的集合、某三角形内所有点的集合、一个班的全体学生的集合等.一般的,具有某种特定性质的对象的总体称为集合,其中的对象称为集合的元素.通常以大写字母 A 、 B 、 D 等表示集合,而以小写字母 a 、 b 、 x 等表示集合的元素.若 a 是集合 A 的元素,则记作 $a \in A$,读作 a 属于 A 或 a 在 A 中;否则记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.一个集合,若它只含有有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

集合常用的表示法有 3 种:列举法、图示法和描述法.

(1) 列举法.把集合的全体元素一一列举出来表示,并用花括号括起来.

例如,由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A ,可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

由元素 1, 2 组成的集合 B ,可表示成

$$B = \{1, 2\}.$$

注意:用列举法表示集合时,必须列出集合的所有元素,不得遗漏和重复.

(2) 图示法.以数轴或坐标系的点表示元素,用这些点所组成的区间或区域表示集合的方法.这种表示法在讨论集合关系时显得直观、形象.

(3) 描述法.若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可表示成

$$M = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}.$$

这里所谓 x 所具有的性质 P ,实际上就是 x 作为 M 的元素应满足的充分必要条件:符合性质 P 的任何对象都是集合 M 的元素;反之,集合 M 的元素都必须符合性质 P .



例如, 设集合 C 是方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的解集, 集合 C 就可表示成

$$C = \{x | (x-1)(x-2)=0\}.$$

而 xOy 平面上坐标满足方程 $x^2+y^2=R^2$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 M , 可记作

$$M = \{(x,y) | x^2+y^2=R^2, x \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \in \mathbf{R}\}.$$

这个集合 M 实际上就是 xOy 平面上以点 O 为圆心、以 R 为半径的圆周上的点的全体组成的集合.

以后要用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 如果没有特别声明, 以后提到的数都是在实数范围内讨论.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$, 全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$, 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 即若 $x \in A$, 则必 $x \in B$, 就说 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A), 如 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 就称集合 A 与 B 相等, 记作 $A=B$. 例如, 设

$$A = \{x | x^2=1\}, B = \{1, -1\},$$

则 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$, 且规定空集为任何集合的子集.

例如, $A = \{x | x^2+1=0, x \in \mathbf{R}\} = \emptyset$, 因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的.

二、集合的运算

集合的基本运算有以下几种: 并、交、差、补.

设 A, B 是两个集合, 由 A 和 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并集 (简称并), 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交集 (简称交), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的差集, 记作 $A-B$, 即

$$A-B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

由所研究的所有对象构成的集合称为全集, 记作 I . 全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合, 称为 A 的补集, 记作 A' , 即

$$A' = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}.$$

设 A, B, C 为任意 3 个集合, 则下列法则成立:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.



(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(4) 摩根律 $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

在两个集合之间还可以定义笛卡儿乘积.

设 A, B 是任意两个集合, $x \in A, y \in B$, 所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合, 称为 A 与 B 的笛卡儿乘积, 记作 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

例如, 设 $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4\}$, 则

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4), (7, 2), (7, 4)\}.$$

三、绝对值

绝对值是一个重要的概念. 下面介绍一下实数绝对值的定义及性质.

一个实数的绝对值, 记为 $|x|$, 定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值及其运算有下列性质:

(1) $|x| \geq 0$.

(2) $|x| = \sqrt{x^2}$.

(3) $|-x| = |x|$.

(4) $-|x| \leq x \leq |x|$.

(5) 如果 $a > 0$, 则

$$\{x | |x| < a\} = \{x | -a < x < a\}.$$

(6) 如果 $b > 0$, 则

$$\{x | |x| > b\} = \{x | x < -b \text{ 或 } x > b\}.$$

(7) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(8) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

(9) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(10) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$.



四、区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$.

数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$. a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点, 这里 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$.

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$. a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 这里 $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$.

类似地,

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1(a) 与图 1-1(b) 所示. 此外, 还有无限区间. 引入记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间. 例如,

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-2(a) 和图 1-2(b) 所示.

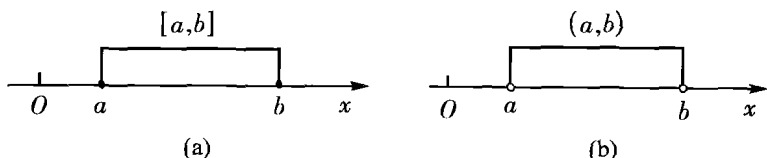


图 1-1

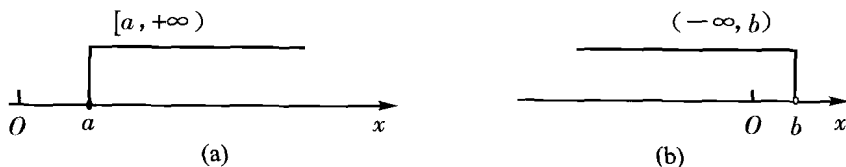


图 1-2

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间的场合, 就简单地称它为“区间”, 通常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域, 这个邻域称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即



$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径(见图 1-3).

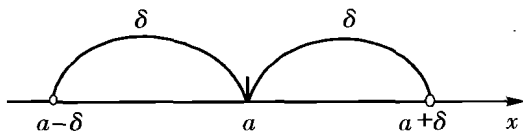


图 1-3

由于 $a - \delta < x < a + \delta$ 相当于 $|x - a| < \delta$, 因此

$$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}.$$

因为 $|x - a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离, 所以 $U(a, \delta)$ 表示: 数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉, 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的空心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里 $|x - a| > 0$ 表示 $x \neq a$.

为了方便, 有时把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域, 把开区间 $(a, a + \delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

习题 1-1

1. 用列举法表示下列集合.

- (1) 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的根的集合.
- (2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合.
- (3) 集合 $\{x | |x - 1| \leq 3 \text{ 的整数}\}$.

2. 用描述法表示下列集合.

- (1) 小于 3 的所有实数集合.
- (2) 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内部(不包含圆周)一切点的集合.
- (3) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合.

3. 如果全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求:

- (1) $A \cap B$, (2) A' , (3) $(A \cup B)'$, (4) $A - B$, (5) $A \cap B'$.

4. 已知 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$, 求 $A \times B$.

5. 某班有学生 50 人, 其中 30 人订日报, 20 人订晚报, 两种报纸都订的有 10 人, 试用集



合关系表示下列各类学生,并计算出学生的数目.

- (1) 至少订一种报纸的学生.
- (2) 不订报纸的学生.
- (3) 只订晚报不订日报的学生.

6. 解下列不等式.

- (1) $|x-2| < 3$.
- (2) $0 < |2x-3| < 1$.

7. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来.

- (1) $A = \{x | |x+1| < 2\}$.
- (2) $B = \{x | 1 < |x-2| < 3\}$.

第二节 函 数

一、函数的概念

在观察自然现象和应用技术的过程中,会遇到各种不同的量,其中有的量在这一过程中不发生变化,这种量叫做**常量**;还有一些量在这一过程中是不断变化着的,也就是可以取不同的数值,这种量叫做**变量**.

通常用字母 a, b, c 等表示常量,用字母 x, y, u 等表示变量.

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的对应法则 f , 总有唯一确定的数值 y 和它对应, 则称对应法则 f 为定义在数集 D 上的一个函数, 或称变量 y 是变量 x 的**函数**, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的**定义域**, x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 通过对应法则 f , 与 x_0 对应的 y 的数值 y_0 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时, 对应函数值的全体组成的数集 $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可用其他字母表示, 如 φ, F 等, 这时函数就记作 $y = \varphi(x), y = F(x)$.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而抽象地研究用算式表达的函数, 这时函数的定义域就是使算式有意义的自变量取值的全体所组成的集合.

定义域和对应法则是函数的两个要素. 只要定义域相同, 且 f 代表同一对应法则, 则 $y = f(x)$ 和 $u = f(v)$ 就是同一个函数, 而与自变量和因变量用什么字母表示无关.

如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值不唯一, 以前叫做多值函数. 以后