读书是最美的姿态 Reading is most graceful

★经人民教育出版社授权使用★

新课程标准

释疑导学　探究给力
激活思维　启迪智慧

讲透®教材

总策划/毛文凤　教育学博士后

高中数学

选修1-1

配人教A版

吉林出版集团有限责任公司
北方妇女儿童出版社

释疑导学 · 探究给力

激活思维 · 启迪智慧

讲透® 教材

总策划/毛文凤 教育学博士后

高中数学

本册主编：李雪凤

选修1-1

配人教A版

吉林出版集团有限责任公司
北方妇女儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

讲透教材．高中数学／毛文凤主编．—3版．—长春：北方妇女儿童出版社，2009

（学习有方）

ISBN 978-7-5385-2913-5

Ⅰ．①讲… Ⅱ．①毛… Ⅲ．①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第046972号

讲透®教材·学习有方

数学选修1-1（配人教A版）

责任编辑 师晓晖

出　　版 吉林出版集团有限责任公司

北方妇女儿童出版社

发　　行 江苏可一出版物发行集团有限公司（电话:025-66989810）

集团网址 http://www.keyigroup.com

经　　销 全国新华书店

印　　刷 南京玄武湖印刷实业有限公司

（南京市栖霞区尧化门尧胜村109号　邮编:210046）

开　　本 880×1230毫米　1/16

总 印 张 108

总 字 数 3 500千字

版　　次 2009年6月第3版　2011年6月第4次印刷

标准书号 ISBN 978-7-5385-2913-5

总 定 价 216.00元

前言

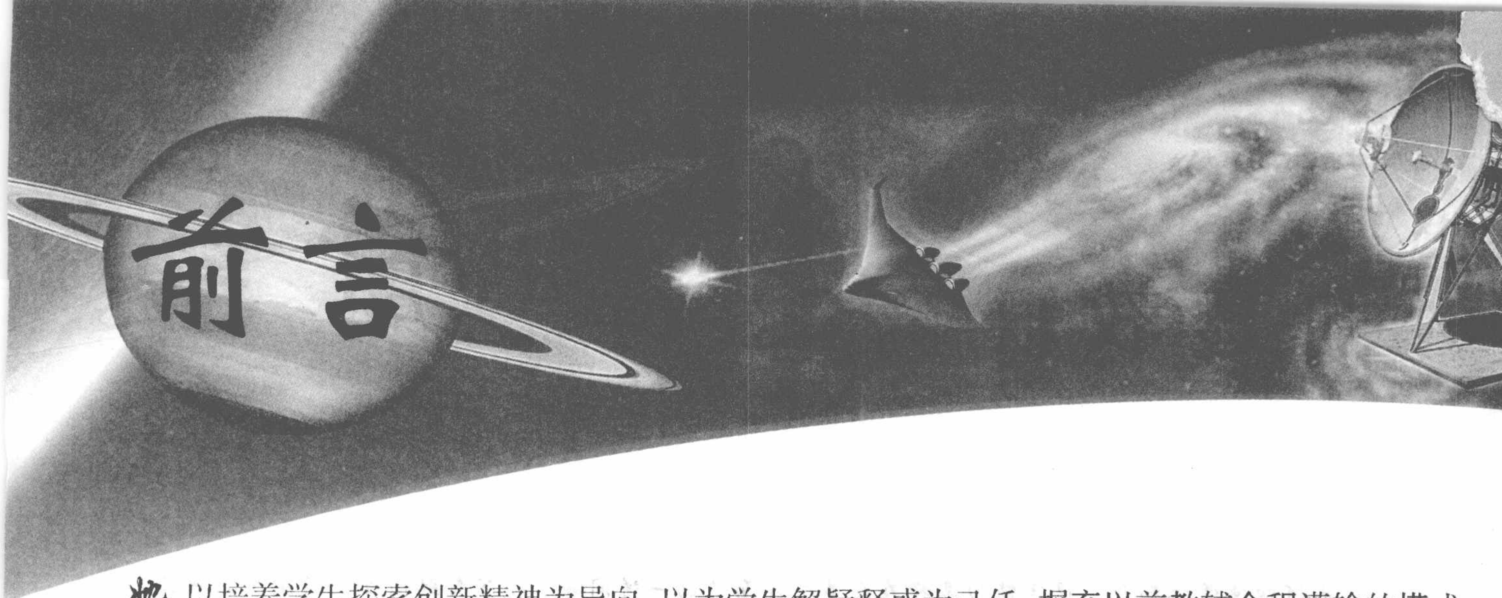
如何快速掌握知识、提高能力是摆在众多学子面前的一道问题。为了帮助同学们解决学习中遇到的困难、迅速提高成绩，我们组织山东、江苏等率先实行高中新课标地区的优秀教师竭诚为您打造了一套优秀的助学读物——《讲透教材》。

本系列丛书秉承素质教育理念，以系统的知识体系为载体，着重发展学生的各种能力。把学科知识准确、精炼、科学地传递给年轻学子的同时，着重培养学生良好的学习习惯、科学的思维方法，提升学生高中阶段必备的学习能力和应试能力，给人力量，催人奋发。

丛书特点

立足基础求拓展	引领您	自主学习夯实基础
感受体验与欣赏	激发您	学习的动机和乐趣
重视探索与领悟	帮助您	掌握最佳学习方法
关注迁移与应用	培养您	敏锐的题感和自信
牵引发现与创新	构筑您	展翅高飞的平台

智慧人生



前言

她 以培养学生探索创新精神为导向，以为学生解疑释惑为己任，摒弃以前教辅全程灌输的模式。

她 注重“引导探究、点拨技巧、启迪思维”，契合新课标、新高考的要求。

她 理念科学、体例创新、讲解透彻、材料新颖、选题经典，强调实用。

她 注重培养学生总结、分析和探究的能力，着力在学习方法和解题策略方面对学生进行科学有效地指导。

多样化编写板块

- **课标解读** 帮你深入准确理解每节内容的课标要求，把握每节内容的考查层次。
- **教材透析** 帮你领悟教材重难点，构建知识体系，总结规律、点拨方法和技巧。
- **拓展探究** 帮你拓宽思维和视野，归纳比较相关内容，全面提升综合分析能力。
- **解题探究** 帮你总结归纳每节题型，领悟解题策略，多角度掌握解题方法和技巧。
- **强化演练** 帮你精选习题、练中取胜、覆盖全面、重难点突出，提升解题能力。
- **易错探究** 帮你找出易错知识点、精选例题、分析错因、追根溯源，杜绝错误。
- **高考动态** 帮你触摸高考脉搏，名师分析考点分布及命题趋势，圆你名校梦想。
- **习题解答** 帮你全面详细地解答教材中的所有问题，为你的学习提供校对指导。

统一和谐的发展

感谢您关注和选择本书！我们期望以先进的教学理念和新课标精神，为您学好学透教材提供最大程度的帮助，实现您高中阶段的全面和谐发展。

丛书编写组

CONTENTS 目录

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系 …… 1
1.1.1 命　题 …… 1
1.1.2 四种命题 …… 5
1.1.3 四种命题间的相互关系 …… 5
1.2 充分条件与必要条件 …… 9
1.2.1 充分条件与必要条件 …… 9
1.2.2 充要条件 …… 9
1.3 简单的逻辑联结词 …… 14
1.3.1 且(and) …… 14
1.3.2 或(or) …… 14
1.3.3 非(not) …… 14
1.4 全称量词与存在量词 …… 19
1.4.1 全称量词 …… 19
1.4.2 存在量词 …… 19
1.4.3 含有一个量词的命题的否定 …… 19
本章总结 …… 24

第二章 圆锥曲线与方程

2.1 椭　圆 …… 27
2.1.1 椭圆及其标准方程 …… 27
2.1.2 椭圆的简单几何性质 …… 32

目录

2.2 双曲线 …… 39
2.2.1 双曲线及其标准方程 …… 39
2.2.2 双曲线的简单几何性质 …… 44
2.3 抛物线 …… 51
2.3.1 抛物线及其标准方程 …… 51
2.3.2 抛物线的简单几何性质 …… 55
本章总结 …… 61

第三章 导数及其应用

3.1 变化率与导数 …… 66
3.1.1 变化率问题 …… 66
3.1.2 导数的概念 …… 66
3.1.3 导数的几何意义 …… 66
3.2 导数的计算 …… 73
3.2.1 几个常用函数的导数 …… 73
3.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则 …… 73
3.3 导数在研究函数中的应用 …… 79
3.3.1 函数的单调性与导数 …… 79
3.3.2 函数的极值与导数 …… 84
3.3.3 函数的最大(小)值与导数 …… 84
3.4 生活中的优化问题举例 …… 92
本章总结 …… 99

参考答案 …… 102

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

1.1.1　命　题

读懂课标　明确方向

标解读

知识目标

记住命题的定义,能判别所给语句是否是命题,能分清命题的条件和结论.

能力要求

能够判断命题的真假,能将一个命题改写成“若 p,则 q”的形式,并会判断它们的真假.

疑难剖析　易错点拨

材透析

知能点一　命题的判断

我们把用语言、符号或式子表达的、可以判断真假的陈述句叫做命题.因此,并不是所有的语句都是命题,只有那些能够判断真假的陈述句才是命题.命题必须是能判断真假的陈述句.疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.一般地,判断一个语句是否是命题,首先要看给出的句型.句型必须是陈述句,其次要看能否判断句子的真假,陈述句能否成为命题,关键在于能否判断其真假,不能判断真假的就不是命题.例如“这是一棵大树”,由于“大树”没有一个清晰的界定,不能明确区分高度在几米以上的树是大树,所以不是命题.

特别提醒

假命题也是命题,是判断为假的命题.

知能点二　判断命题的真假

一个命题只有真、假两种情形中的一种,即要么是真的要么是假的,但不能同时既真又假,也不可能模棱两可、无法判断其真假.判断一个命题的真假时,可根据我们学过的定义、定理、公理、推论、公式及有关事实判断其真假,也可通过举反例判断其真假.若一个命题是“若 p,则 q”形式,可利用如下方法判断其真假:

若由“p”经过逻辑推理能得出“q”,则可确定“若 p,则 q”为真;而确定“若 p,则 q”为假时,只需举一反例即可.

知能点三　正确写出命题的“若 p,则 q”形式

一般地,命题由条件和结论组成.有些命题中没有明确的条件和结论,为了找到命题的条件和结论,需要把命题写成“若 p,则 q”的形式,其中 p 叫做命题的条件,q 叫做命题的结论.把命题改写成“若 p,则 q”的形式,要注意条件及结论的完整性,将条件写在前面,结论写在后面.

开阔视野　提升能力

展探究

拓展点一　判断命题及其真假

1. 一个语句能否成为命题,应该是绝对的,而不是相对的.能否判断真假并不因人、因时、因地而发生改变.如“每一个不小于6的偶数都是两个奇素数之和.”(哥德巴赫猜想)、“在2020年前,将有人登上火星”等.虽然目前还不能判断它们的真假,但随着科学技术的发展和时间的推移,总能确定它们的真假,因此

它们也是命题.

2. 判断一个命题为假命题,只要举出一个反例即可,而判断一个命题为真命题,一般要进行严格的逻辑推证.

拓展点二　命题的改写

数学中有一些命题表面上不是“若 p,则 q”的形式,但是我们可把它的表述作适当改变,就可以写成“若 p,则 q”的形式了,这样它们的条件和结论就非常清楚明显了.

将命题改写成“若 p,则 q”形式时,必须分清条件和结论,若命题中含有大前提,改写时,大前提不变,仍作为大前提,不能写在条件 p 中.有时也写成“如果 p,则 q”、“如果 p,那么 q”、“只要 p,就有 q”的形式,但要注意语言描述的流畅性.

精妙点拨　领悟方略

解题探究

题型一　命题的判断

【例 1】 判断下列语句是否为命题,并说明理由.

(1)$x-2>0$;

(2)如果 $x=1$,那么 $x>3$;

(3)一个实数不是正数就是负数;

(4)矩形是平行四边形吗?

(5)集合$\{a,b,c\}$有 3 个子集;

(6)这盆花太美了!

【点拨】 判断一个语句是不是命题,关键在于能否判断其真假.

【解析】 (1)不是命题,因为语句中含有变量 x,在没有给变量 x 赋值前,无法判断语句的真假.

(2)是命题,已经明确指定了 x 的值,能够判断真假.

(3)是命题,因为还有数 0 不是正数也不是负数,因此能够判断这个命题是个假命题.

(4)不是命题,疑问句不能判断真假,因此疑问句不是命题.

(5)是命题,因为“集合$\{a,b,c\}$有 3 个子集”是假的,所以它是命题.

(6)不是命题,感叹句不能判断真假,因此感叹句都不是命题.

拓展提升

判断一个语句是否为命题一般分为两步:第一步判断是否为陈述句;第二步是否能够判断真假.

【即时训练】

1. 下列语句:(1) $\sqrt{2}$是无限循环小数;(2)$x^2-3x+2=0$;(3)方程 $x^2-5x+6=0$ 的根是 $x=2$;(4)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?(5)把这道题解出来;(6)2^{100} 是个大数.其中不是命题的是________.

题型二　判断命题的真假

【例 2】 (2007·辽宁)若 m,n 是两条不同的直线,α,β,γ 是三个不同的平面,则下列命题中的真命题是　　(　　)

A. 若 $m\subset\beta,\alpha\perp\beta$,则 $m\perp\alpha$

B. 若 $\alpha\cap\gamma=m,\beta\cap\gamma=n,m/\!/n$,则 $\alpha\perp\beta$

C. 若 $m\perp\beta,m/\!/\alpha$,则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $\alpha\perp\gamma,\alpha\perp\beta$,则 $\beta\perp\gamma$

【点拨】 根据线面位置关系及线面平行、线面垂直、面面垂直的判定与性质进行判断.

【解析】 若 $m\subset\beta,\alpha\perp\beta$,则 m 与 α 可能平行也可能相交,所以 A 为假命题;选项 B 中,α 与 β 可能平行也可能相交,则 B 为假命题;选项 D 中,β 与 γ 也可能平行或相交(不一定垂直),则 D 为假命题.故选 C.

【答案】 C

拓展提升

(1)判定一个命题是真命题,需由命题的条件证明命题的结论成立.

(2)判定一个命题为假命题,只需举一个反例即可.

【即时训练】

2. 判断下列命题的真假.

(1)0 不能作除数;

(2)没有一个无理数不是实数;

(3)如果空间的两直线不相交,则这两条直线平行;

(4)集合 A 是集合 $A\cap B$ 的子集;

(5)空集是任何集合的子集.

题型三　命题的改写

【例 3】 把下列命题写成“若 p,则 q”的形式,并判断其真假.

(1)实数的平方是非负数;

(2)等底等高的两个三角形是全等三角形;

(3)能被 6 整除的数既能被 3 整除也能被 2 整除;

(4)弦的垂直平分线经过圆心,并平分弦所对的弧.

【点拨】 改写命题,关键在于明确命题的条件和结论.

【解析】 (1)若一个数是实数,则它的平方是非负数.真命题.

(2)若两个三角形等底等高,则这两个三角形是全等三角形.假命题.

(3)若一个数能被 6 整除,则它既能被 3 整除,也能被 2 整除.真命题.

(4)若一条直线是弦的垂直平分线,则这条直线经过圆心且平分弦所对的弧.真命题.

特别提醒

一个命题改写为“若 p,则 q”形式时,改法不一定唯一.如:将命题“负数的立方是负数”改为“若 p 则 q”的形式.改法一:若一个数是负数,则这个数的立方是负数;改法二:若一个数是负数的立方,则这个数是负数.

【即时训练】

3. 指出下列命题的条件和结论:

(1)对顶角相等;

(2)四边相等的四边形是菱形;

(3)负数的平方是正数.

4. 将下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,并判断真假.

(1)偶数能被 2 整除;

(2)奇函数的图象关于原点对称;

(3)同弧所对的圆周角不相等.

优化组合　科学训练

优化演练

1. 下列语句中命题的个数为　　(　　)

①$\{0\}\in\mathbf{N}$　②他长得很高　③地球上的四大洋　④5 的平方是 20

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 若 A,B 是两个集合,则下列命题中真命题是　(　　)

A. 如果 $A\subseteq B$,那么 $A\cap B=A$

B. 如果 $A\cap B=A$,那么 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$

C. 如果 $A\subseteq B$,那么 $A\cup B=A$

D. 如果 $A\cup B=A$,那么 $A\subseteq B$

3. 已知命题"非空集合 M 的元素都是集合 P 的元素"是假命题,那么命题

①M 的元素都不是 P 的元素　②M 中有不属于 P 的元素　③M 中有 P 的元素　④M 中元素不都是 P 的元素

其中真命题的个数为　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 有下列命题：

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;②若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;③若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$;④$x^2+1>0(x\in\mathbf{R})$;⑤22340 能被 3 或 5 整除;⑥不存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+x+1<0$. 其中假命题有________.

5. 命题"一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根",条件 p:________,结论 q:________;是________命题.(填"真"或"假")

6. 把命题"6 是 12 和 24 的公约数"写成"若 p,则 q"的形式是____________.

7. 判断下列语句是否是命题,若不是,说明理由;若是,判断命题的真假.

(1)奇数的平方仍是奇数;

(2)两对角线垂直的四边形是菱形;

(3)所有的质数都是奇数;

(4)$5x>4x$;

(5)$x^2+x+1>0$;

(6)未来是多么美好啊!

(7)把数学课本给我带来.

8. 指出下列命题的条件 p 和结论 q:

(1)若空间四边形为正四面体,则顶点在底面上的射影为底面的中心;

(2)若两条直线 a 和 b 都和直线 c 平行,则直线 a 和直线 b 平行.

9. 将下列命题改写成"若 p,则 q"的形式,并判断其真假.

(1)正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角全相等;

(2)末位数字是 0 或 5 的整数,能被 5 整除;

(3)方程 $x^2-x+1=0$ 有两个实根.

10. 已知命题 p:$|x^2-x|\geqslant6$,q:$x\in\mathbf{Z}$,且 p 假 q 真,求 x 的值.

追根溯源　探究分析

易错探究

易错点　判断一个语句是否为命题时,关键在于看它能否判断真假.能够判断真假的都是命题.不要误认为假命题不是命题

【例】　判断下列语句是否是命题：

(1)方程 $x^2+x+1=0$ 有实根;

(2)$x^2+5x+3=0$.

【错解】　(1)方程 $x^2+x+1=0$ 无解,因此"方程 $x^2+x+1=0$ 有实根"不是命题.

(2)$x^2+5x+3=0$ 的判别式 $\Delta=25-12=13>0$,方程 $x^2+x+1=0$ 有解,因此"$x^2+5x+3=0$"是命题.

【错因分析】　判别一个语句是否是命题,关键是看其能否判断真假.(1)中误认为错误的语句不是命题.(2)中把推断"$x^2+5x+3=0$"是否为命题与"方程 $x^2+5x+3=0$ 是否有解"混淆.

【正确解法】　(1)由于方程 $x^2+x+1=0$ 的判别式 $\Delta=1-4<0$,故方程 $x^2+x+1=0$ 无实根.故方程 $x^2+x+1=0$ 有实根是假的.因此该语句是命题,而且是假命题.

(2)因为语句中含有变量 x,而且未给变量 x 赋值,因此无法判断真假,所以该语句不是命题.

触摸高考 感悟提升

高考动态

考点聚焦

高考考点	试题分布	题型	分值
判断命题的真假	2008 安徽,3	选择题	5 分
	2008 江西,16	填空题	4 分
	2008 陕西,15	填空题	4 分

命题趋势

高考命题一般以基本概念为考查对象，主要是判断命题的真假，并且以本节知识作为工具，考查三角、立体几何、解析几何等其他章节的知识点. 题型以客观题为主，难度不大.

经典回眸

【例 1】 (2007·北京)对于函数①$f(x)=|x+2|$,②$f(x)=(x-2)^2$,③$f(x)=\cos(x-2)$,判断如下命题的真假：

命题甲：$f(x+2)$是偶函数；

命题乙：$f(x)$在$(-\infty,2)$上是减函数，在$(2,+\infty)$上是增函数. 能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是　　(　　)

A. ①②　　B. ①③

C. ②　　D. ③

【思路点拨】 ①若一个函数为偶函数，其图象必须以 y 轴为对称轴；②$f(x)=\cos(x-2)$是由函数 $y=\cos x$ 的图象向右平移 2 个单位得到，故不可能在$(2,+\infty)$上递增.

【解析】 对于函数①,$f(x+2)=|x+4|$,不是偶函数；对②，$f(x)=(x-2)^2$ 是以 $x=2$ 为对称轴的抛物线，故 $f(x)$在$(-\infty,2)$上是减函数，在$(2,+\infty)$上是增函数. 又 $f(x+2)=x^2$，图象关于 y 轴对称，所以 $f(x+2)$是偶函数；对③，$f(x)=\cos(x-2)$显然不是$(-\infty,2)$上的减函数，也不是$(2,+\infty)$上的增函数. 故选 C.

【答案】 C

【例 2】 (2008·安徽)已知 m,n 是两条不同直线，α,β,γ 是三个不同平面，下列命题中正确的是　　(　　)

A. 若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$,则 $m/\!/n$

C. 若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$,则 $m/\!/n$

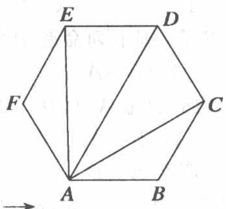
D. 若 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$

【思路点拨】 本题考查线面关系的判定.

【解析】 A 中，$\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,$\alpha$ 与 β 平行或相交，A 不正确；C 中，$m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$,m 与 n 可能平行，相交或异面，C 不正确；D 中，$m/\!/\alpha$,$m/\!/\beta$,α 与 β 平行或相交.

【答案】 B

【例 3】 (2008·江西)如图所示，正六边形 $ABCDEF$ 中，有下列四个命题，其中真命题的代号是________.



A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$

D. $(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF})\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF})$

【思路点拨】 考查向量的相关运算，注意正六边形的性质.

【解析】 设正六边形边长为 1，易知$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$,A 正确；又$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,B 正确；$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=3$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=1$,C 不正确；$(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF})\overrightarrow{EF}=(2\times1\times\cos 60°)\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF})=\overrightarrow{AD}(1\times1\times\cos 120°)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EF}$,D 正确.

【答案】 ABD

【例 4】 (2008·陕西)关于平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,有下列三个命题：

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$;②若 $\boldsymbol{a}=(1,k)$,$\boldsymbol{b}=(-2,6)$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $k=-3$;③非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°.

其中，真命题的序号为________.

【思路点拨】 利用向量的数量积的运算律及向量的坐标运算求解.

【解析】 向量的数量积不满足消去律，两边不能约分，①不正确；由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,得 $1\times6+2k=0$,$\therefore k=-3$,②正确；对于③,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 30°,故③不正确.

【答案】 ②

自主学习 自我校对

习题解答

思考(第 2 页)

这六个语句都是陈述句，并且可以判断真假，(1),(3),(5)为真，(2),(4),(6)为假.

练习(第 4 页)

1. 略

2. (1)真命题　(2)假命题　(3)真命题　(4)真命题

3. (1)若一个三角形是等腰三角形，则这个三角形两腰的中线相等，它是真命题.

(2)若一个函数是偶函数，则这个函数的图象关于 y 轴对称，它是真命题.

(3)若两个平面垂直于同一个平面，则这两个平面平行，它是假命题.

1.1.2 四种命题

1.1.3 四种命题间的相互关系

在商品大战中，广告成了电视节目中一道美丽的风景线，几乎所有的广告商都熟谙这样的命题变换艺术，如宣传某种食品，其广告词为："拥有的人们都幸福，幸福的人们都拥有."初听起来，这似乎只是几句普通的赞美词，然而它所起的实际效果可大哩！哪个家庭不希望幸福呢，掏钱买一盒就得了.你能理解广告词的寓意吗？

读懂课标 明确方向

课标解读

知识目标

记住命题的逆命题、否命题与逆否命题的定义，会分析四种命题的相互关系.

能力要求

1. 能够写出一个命题的逆命题、否命题、逆否命题，并能判断它们的真假.

2. 能够根据四种命题的关系判断命题的真假.

疑难剖析 易错点拨

教材透析

知能点一 四种命题的概念

1. 一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题叫做互逆命题.其中一个命题叫做原命题，另一个叫做原命题的逆命题.

2. 如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题叫做互否命题.如果把其中一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的否命题.

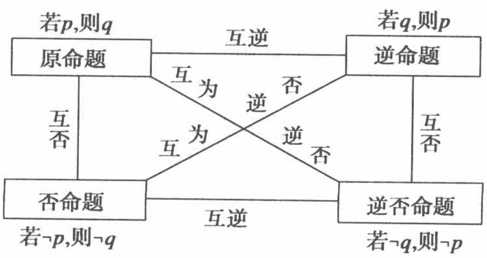
3. 如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们把这样的两个命题叫做互为逆否命题，如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的逆否命题.

友情提示

如果原命题为"若 p，则 q"，那么它的逆命题为"若 q，则 p"；它的否命题为"若 $\neg p$，则 $\neg q$"；它的逆否命题为"若 $\neg q$，则 $\neg p$".

知能点二 四种命题的相互关系

通过四种命题的构成形式，可以看出：原命题和逆命题是互逆的命题.否命题和逆否命题也是互逆的命题.原命题和否命题、逆命题和逆否命题分别是互否的命题.原命题和逆否命题、逆命题和否命题分别是互为逆否的命题.可用下表表示四种命题之间的关系：



开阔视野 提升能力

拓展探究

拓展点一 正确写出原命题的逆命题、否命题和逆否命题

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定.要写出一个命题的逆命题、否命题、逆否命题，只需根据定义把命题的条件和结论进行否定或交换即可.对于不是"若 p，则 q"形式的命题，要写出其他三种命题，应先把它改写成"若 p，则 q"形式的命题，以分清原命题的条件与结论.而当一个命题有大前提时，要保留大前提，也就是大前提始终不动.

拓展点二 四种命题的真假性

(1)原命题为真，它的逆命题不一定为真；

(2)原命题为真，它的否命题不一定为真；

(3)原命题为真，它的逆否命题一定为真；

(4)互为逆否的两个命题是等价命题.

也就是说，原命题与它的逆命题、否命题之间的真假是不定的.原命题与它的逆否命题(它的逆命题与它的否命题)之间在真假性上是始终保持同真或同假.一般地，四种命题的真假性，有且仅有下面的四种情况：

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

拓展点三 否命题与命题的否定的区别

否命题与命题的否定是两个不同的概念.若 p 表示命题，"非 p"叫做命题 p 的否定.如果原命题是"若 p，则 q"，那么这个命题的否定是"若 p，则非 q"，即只否定结论.

原命题的否命题是"若非 p，则非 q"，即既否定条件又否定结论.

精妙点拨 领悟方略

解题探究

题型一 根据原命题写出逆命题、否命题及逆否命题

【例 1】 把下列命题改写成"若 p，则 q"的形式，并写出它的逆命题、否命题和逆否命题.

(1)$ac>bc\Rightarrow a>b$；

(2)已知 x,y 为正整数，当 $y=x+1$ 时，$y=3,x=2$；

(3)当 $m>\frac{1}{4}$ 时，$mx^2-x+1=0$ 无实根；

(4)当 $abc=0$ 时，$a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$；

(5)若 $x^2-2x-3=0$，则 $x=3$ 或 $x=-1$.

【点拨】 将命题改写成"若 p，则 q"的形式时，要注意分清条件

和结论.写其他三种命题时,注意对“换质”与“换位”的顺序及其语言、符号的描述.

【解析】 (1)原命题:若 $ac>bc$,则 $a>b$.

逆命题:若 $a>b$,则 $ac>bc$.

否命题:若 $ac\leqslant bc$,则 $a\leqslant b$.

逆否命题:若 $a\leqslant b$,则 $ac\leqslant bc$.

(2)原命题:已知 x,y 为正整数,若 $y=x+1$,则 $y=3$ 且 $x=2$.

逆命题:已知 x,y 为正整数,若 $y=3$ 且 $x=2$,则 $y=x+1$.

否命题:已知 x,y 为正整数,若 $y\neq x+1$,则 $y\neq 3$ 或 $x\neq 2$.

逆否命题:已知 x,y 为正整数,若 $y\neq 3$ 或 $x\neq 2$,则 $y\neq x+1$.

(3)原命题:若 $m>\frac{1}{4}$,则 $mx^2-x+1=0$ 无实根.

逆命题:若 $mx^2-x+1=0$ 无实根,则 $m>\frac{1}{4}$.

否命题:若 $m\leqslant\frac{1}{4}$,则 $mx^2-x+1=0$ 有实根.

逆否命题:若 $mx^2-x+1=0$ 有实根,则 $m\leqslant\frac{1}{4}$.

(4)原命题:若 $abc=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$.

逆命题:若 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$,则 $abc=0$.

否命题:若 $abc\neq 0$,则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 且 $c\neq 0$.

逆否命题:若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 且 $c\neq 0$,则 $abc\neq 0$.

(5)原命题:若 $x^2-2x-3=0$,则 $x=3$ 或 $x=-1$.

逆命题:若 $x=3$ 或 $x=-1$,则 $x^2-2x-3=0$.

否命题:若 $x^2-2x-3\neq 0$,则 $x\neq 3$ 且 $x\neq -1$.

逆否命题:若 $x\neq 3$ 且 $x\neq -1$,则 $x^2-2x-3\neq 0$.

拓展提升

在写四种命题时,一定要先找出原命题的条件和结论,把结论作为条件,条件作为结论得到的命题为逆命题.否定条件作为条件,否定结论作为结论得到的命题为原命题的否命题.否命题的逆命题为原命题的逆否命题.

【即时训练】

1. 把下列命题写成“若 p 则 q”的形式,并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题.

(1)正数的平方根不等于0;

(2)当 $x=2$ 时,$x^2+x-6=0$;

(3)对顶角相等.

题型二 命题的四种形式及其真假判断

【例2】 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断其真假:

(1)质数不是正偶数;

(2)实数的平方是非负数;

(3)若 $m\leqslant 0$ 或 $n\leqslant 0$,则 $m+n\leqslant 0$.

【点拨】 在判断命题的真假时,要善于运用等价性.

【解析】 (1)原命题可写为:若一个数是质数,则这个数不是正偶数,是个假命题.

逆命题:若一个数不是正偶数,则这个数是质数,假命题.

否命题:若一个数不是质数,则这个数是正偶数,假命题.

逆否命题:若一个数是正偶数,则这个数不是质数,假命题.

(2)逆命题:若一个数的平方是非负数,则这个数是实数,真命题.

否命题:若一个数不是实数,则它的平方不是非负数,真命题.

逆否命题:若一个数的平方不是非负数,则这个数不是实数,真命题.

(3)逆命题:若 $m+n\leqslant 0$,则 $m\leqslant 0$ 或 $n\leqslant 0$,真命题.

否命题:若 $m>0$ 且 $n>0$,则 $m+n>0$,真命题.

逆否命题:若 $m+n>0$,则 $m>0$ 且 $n>0$,假命题.

友情提示

对于命题在判断它的真假性时,如果直接判断有难度可以利用原命题与逆否命题、逆命题与否命题的等价性,先判断等价命题的真假,由等价命题的真假确定原来命题的真假.

【即时训练】

2. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断其真假.

(1)等底等高的两个三角形是全等三角形;

(2)弦的垂直平分线经过圆心,并平分弦所对的弧;

(3)若 $a>b$,则 $a+c>b+c$.

题型三 等价命题的应用

【例3】 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,$a,b\in\mathbf{R}$,对于命题:“若 $a+b\geqslant 0$,则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”.

(1)写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2)写出其逆否命题,判断其真假,并证明你的结论.

【点拨】 (1)可采取反证法证明;(2)可采取等价命题转化法,利用原命题与其逆否命题的等价性来解决.

【解析】 (1)逆命题是:若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant 0$,为真命题,证明如下:

假设 $a+b<0$,则 $a<-b,b<-a$,

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,则 $f(a)<f(-b)$,$f(b)<f(-a)$,

$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,这与题设相矛盾.

$\therefore$逆命题为真命题.

(2)逆否命题:若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,则 $a+b<0$,为真命题.因为一个命题等价于它的逆否命题,所以可证明原命题为真命题.

$\because a+b\geqslant 0$,$\therefore a\geqslant -b,b\geqslant -a$,

又$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,

$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$,$f(b)\geqslant f(-a)$

$\therefore f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

$\therefore$逆否命题为真命题.

拓展提升

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性,所以我们在证明某一个命题有困难时,可以通过证明它的逆否命题的真假性,从而间接地说明原命题的真假性,反之,也成立.

【即时训练】

3. (1)判断命题“若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题的真假.

(2)证明:对任意非正数 c,若有 $a\leqslant b+c$ 成立,则 $a\leqslant b$.

优化组合 科学训练

强化演练

1. 若命题A的逆命题为B,命题A的否命题为C,则B是C的 ( )

A. 逆命题 B. 否命题

C. 逆否命题 D. 以上都不正确

2. 在下列命题中,真命题是 ( )

A. 命题"若 $ac>bc$,则 $a>b$"

B. 命题"若 $b=3$,则 $b^2=9$"的逆命题

C. 命题"当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$"的否命题

D. 命题"相似三角形的对应角相等"的逆否命题

3. 原命题"设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$."的逆命题、否命题、逆否命题中,真命题共有 ( )

A. 0个 B. 1个

C. 2个 D. 3个

4. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中 ( )

A. 真命题的个数一定是奇数

B. 真命题的个数一定是偶数

C. 真命题的个数可能是奇数也可能是偶数

D. 以上判断均不正确

5. (1)命题"等腰三角形的两内角相等"的逆命题是"__________";

(2)命题"两个奇数之和一定是偶数"的否命题是"__________";

(3)命题"正方形的四个角相等"的逆否命题是"__________".

6. 有下列四个命题:

①"若 $xy=1$,则 x,y 互为倒数"的逆命题. ②"相似三角形的周长相等"的否命题. ③"若 $b\leqslant0$,则方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 有实根"的逆否命题. ④"若 $A\cup B=B$,则 $A\supseteq B$"的逆否命题. 其中是真命题的有________.

7. 命题"若 $x=3,y=5$,则 $x+y=8$"的逆命题是________;否命题是________;逆否命题是________.

8. 若奇函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,若 $f(a)+f(b)\geqslant0$,求证:$a+b\geqslant0$.

9. 命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a=b,c=d$,则 $a+c=b+d$".写出逆命题、否命题、逆否命题,并判断真假.

10. 判断命题"已知 a,x 为实数,如果关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant0$ 的解集非空,则 $a\geqslant1$"的逆否命题的真假.

追根溯源 探究分析

易错探究

易错点 写一个命题的否命题、逆否命题时,需要否定命题的条件和结论.这就要求我们熟悉一些常用词语的否定

如下表:

词语	等于	大于(>)	小于(<)	是	都是	任意的
否定词语	不等于	不大于(≤)	不小于(≥)	不是	不都是	某个

词语	所有的	任意两个	至多有一个	至少有一个	至多有 n 个
否定词语	某些	某两个	至少有两个	一个也没有	至少有 $n+1$ 个

【例】 写出下列命题的否命题、逆否命题.

(1)若 $x^2+y^2=0$,则 x,y 全为零;

(2)若 $a>0$ 且 $b>0$,则 $ab>0$.

【错解】 (1)否命题:若 $x^2+y^2\neq0$,则 x,y 全不为零;

逆否命题:若 x,y 全不为零,则 $x^2+y^2\neq0$;

(2)否命题:若 $a<0$ 且 $b<0$,则 $ab<0$;

逆否命题:若 $ab<0$,则 $a<0$ 且 $b<0$.

【错因分析】 (1)"全"的否定是"不全",x,y 全为零的否定是 x,y 不全为零.

(2)">"的否定是"≤","且"的否定是"或","$a>0$ 且 $b>0$"的否定是"$a\leqslant0$ 或 $b\leqslant0$".

【正确解法】 (1)否命题:若 $x^2+y^2\neq0$,则 x,y 不全为零;

逆否命题:若 x,y 不全为零,则 $x^2+y^2\neq0$.

(2)否命题:若 $a\leqslant0$ 或 $b\leqslant0$,则 $ab\leqslant0$;

逆否命题:若 $ab\leqslant0$,则 $a\leqslant0$ 或 $b\leqslant0$.

触摸高考 感悟提升

高考动态

考点聚焦

高考考点	试题分布	题型	分值
四种命题的相互关系	2008 山东,4	选择题	5分
	2008 广东,8	选择题	5分
	2007 重庆,2	选择题	5分

命题趋势

本部分内容在高考命题中主要以两种形式考查.一是考查基本概念,重点考查四种命题的定义及相互关系;二是以本节知识为工具考查三角、立体几何、解析几何等知识点,题型以客观题为主,难度不大.

经典回眸

【例1】 (2008·山东)给出命题:若函数 $y=f(x)$ 是幂函数,则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限.在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中,真命题的个数是 ( )

A. 3 B. 2

C. 1 D. 0

【思路点拨】 利用互为逆否的两个命题等价来判断各命题的真假.

【解析】 原命题与逆否命题等价,而原命题为真,所以逆否命题为真命题.原命题的逆命题为:若 $y=f(x)$ 的图象不过第四象

限,则函数 $y=f(x)$ 是幂函数,显然此命题为假.又因为逆命题与否命题同真假,所以否命题为假.

【答案】 C

【例2】 (2008·广东)命题"若函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数,则 $\log_a 2<0$"的逆否命题是 ( )

A. 若 $\log_a 2<0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

B. 若 $\log_a 2\geqslant0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

C. 若 $\log_a 2<0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

D. 若 $\log_a 2\geqslant0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

【思路点拨】 命题"若 p,则 q"的逆否命题为"若 $\neg q$,则 $\neg p$".

【解析】 "若函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在定义域内是减函数,则 $\log_a 2<0$"其条件否定是"在定义域内不是减函数",结论的否定是"$\log_a 2\geqslant0$".

【答案】 B

【例3】 (2008·重庆)命题"若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$"的逆否命题是 ( )

A. 若 $x^2\geqslant1$,则 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$

B. 若 $-1<x<1$,则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$,则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$,则 $x^2\geqslant1$

【思路点拨】 "$x^2<1$"的否定为"$x^2\geqslant1$","$-1<x<1$"的否定为 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1$.

【解析】 原命题的逆否命题是:"若 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1$,则 $x^2\geqslant1$".

【答案】 D

【例4】 (2008·江苏)"若 $a\notin M$ 或 $a\notin P$,则 $a\notin M\cap P$"的逆否命题是________.

【思路点拨】 "$a\notin M$ 或 $a\notin P$"的否定是"$a\in M$ 且 $a\in P$".

【解析】 命题"若 p,则 q"的逆否命题是"若 $\neg q$,则 $\neg p$".

【答案】 若 $a\in M\cap P$,则 $a\in M$ 且 $a\in P$.

自主学习 自我校对

习题解答

思考(第4页)

命题(1)的条件是命题(2)的结论,且命题(1)的结论是命题(2)的条件,它们的条件和结论互换了.命题(3)的条件和结论是命题(1)的条件的否定和结论的否定.命题(4)的条件和结论是命题(1)的结论的否定和条件的否定.

探究(第5页)

1. 举例:(1)原命题:若 $a>b$,则 $a^2>b^2$,假命题.

逆命题:若 $a^2>b^2$,则 $a>b$,假命题.

(2)原命题:全等三角形的面积相等,真命题.

逆命题:面积相等的三角形全等,假命题.

2. 如果原命题是真命题,它的逆命题不一定是真命题.

探究(第5页)

1. 举例:原命题:若 $x<-3$,则 $x^2+x-6>0$,真命题.

否命题:若 $x\geqslant-3$,则 $x^2+x-6\leqslant0$,假命题.

2. 原命题是真命题,它的否命题不一定是真命题.

探究(第6页)

1. 举例:(1)原命题:若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2(a,b\in\mathbf{R})$,假命题.

逆否命题:若 $ac^2\leqslant bc^2$,则 $a\leqslant b(a,b\in\mathbf{R})$,假命题.

(2)原命题:若 $x=2$,则 $x^2-3x+2=0$,真命题.

逆否命题:若 $x^2-3x+2\neq0$,则 $x\neq2$,真命题.

2. 原命题是真命题,它的逆否命题一定是真命题.

练习(第6页)

(1)逆命题:若一个整数能被5整除,则这个整数的末位数是0.假命题.

否命题:若一个整数的末位数不是0,则这个整数不能被5整除.假命题.

逆否命题:若一个整数不能被5整除,则这个整数的末位数不是0.真命题.

(2)逆命题:若一个三角形的两个角相等,则这个三角形的两条边相等.真命题.

否命题:若一个三角形的两条边不相等,则这个三角形的两个角也不相等.真命题.

逆否命题:若一个三角形的两个角不相等,则这个三角形的两条边也不相等.真命题.

(3)逆命题:图象关于原点对称的函数是奇函数.真命题.

否命题:不是奇函数的函数的图象不关于原点对称.真命题.

逆否命题:图象不关于原点对称的函数不是奇函数.真命题.

思考(第6页)

命题(2)(3)是互为逆否命题,命题(2)(4)是互否命题,命题(3)(4)是互逆命题.

探究(第7页)

1. 逆命题:若 $x=2$,则 $x^2-3x+2=0$.真命题.

否命题:若 $x^2-3x+2\neq0$,则 $x\neq2$.真命题.

逆否命题:若 $x\neq2$,则 $x^2-3x+2\neq0$.假命题.

2. 四种命题的真假性有如下规律:

(1)两个命题互为逆否命题,它们有相同的真假性;

(2)两个命题为互逆命题或互否命题,它们的真假性没有关系.

练习(第8页)

证明:若 $a-b=1$,则 $a^2-b^2+2a-4b-3=(a+b)(a-b)+2(a-b)-2b-3=a-b-1=0$.

所以,原命题的逆否命题是真命题,从而原命题也是真命题.

习题1.1(第8页)

A组

1. (1)是命题;(2)是命题;(3)不是命题;(4)不是命题.

2. (1)逆命题:若两个整数 a 与 b 的和 $a+b$ 是偶数,则 a,b 都是偶数.假命题.

否命题:若两个整数 a,b 不都是偶数,则 $a+b$ 不是偶数.假命题.

逆否命题:若两个整数 a 与 b 的和 $a+b$ 不是偶数,则 a,b 不都是偶数.真命题.

(2)逆命题:若方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根,则 $m>0$.假命题.

否命题:若 $m\leqslant0$,则方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根.假命题.

逆否命题:若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根,则 $m\leqslant0$.真命题.

3. (1)命题可以改写成:若一个点在线段的垂直平分线上,

则这个点到线段的两个端点的距离相等.

逆命题:若一个点到线段的两个端点的距离相等,则这个点在线段的垂直平分线上.真命题.

否命题:若一个点不在线段的垂直平分线上,则这个点到线段的两个端点的距离不相等.真命题.

逆否命题:若一个点到线段的两个端点的距离不相等,则这个点不在线段的垂直平分线上.真命题.

(2)命题可以改写成:若一个四边形是矩形,则四边形的对角线相等.

逆命题:若四边形的对角线相等,则这个四边形是矩形.假命题.

否命题:若一个四边形不是矩形,则四边形的对角线不相等.假命题.

逆否命题:若四边形的对角线不相等,则这个四边形不是矩形.真命题.

4. 证明:如果一个三角形的两边所对的角相等,则根据等腰三角形的判定定理,这个三角形是等腰三角形,且这两条边是等腰三角形的两条腰,也就是说两条边相等.这就证明了原命题的逆否命题为真.所以,原命题也是真命题.

B组

证明:要证的命题可以改写成以下的"若 p,则 q"的形式:若圆的两条弦不是直径,则它们不能互相平分.此命题的逆否命题是:若圆的两条相交弦互相平分,则这两条相交弦是圆的两条直径.可以先证明此逆否命题.设 AB,CD 是⊙O 的两条互相平分的相交弦,交点是 E,若 E 与圆心 O 重合,则 AB,CD 是经过圆心 O 的弦,AB,CD 是两条直径.若 E 与 O 不重合,连接 AO,BO,CO 和 DO,则 OE 是等腰$\triangle AOB$,$\triangle COD$ 的底边上的中线,所以 $OE\perp AB$,$OE\perp CD$.AB 和 CD 都经过点 E,且与 OE 垂直,这是不可能的.所以 E 和 O 必然重合,即 AB 和 CD 是圆的两条直径.原命题的逆否命题得证,由互为逆否命题的相同真假性知,原命题是真命题.

1.2　充分条件与必要条件

1.2.1　充分条件与必要条件

1.2.2　充要条件

有以下两个假设:①至少有一个农民不是农艺师;②所有农艺师都不是科学家,

可以推得以下结论中的哪一个?:(A)至少有一个农民不是科学家;(B)至少有一个科学家不是农民;(C)所有科学家都不是农民;(D)所有科学家都不是农艺师.

读懂课标　明确方向

课标解读

知识目标

记住充分条件、必要条件及充要条件的定义,能够根据定义判断"若 p,则 q"的形式的命题中,p 是 q 的什么条件.

能力要求

1. 能够利用定义、等价命题转换、集合间的包含关系等,对充分条件、必要条件以及充要条件进行判断.
2. 能够逆用充要条件,求参变量的取值范围.
3. 能够证明充要条件.

疑难剖析　易错点拨

教材透析

知能点一　充分条件与必要条件

一般地,"若 p,则 q"为真命题,是指由 p 通过推理可以得出 q.这时,我们就说,由 p 可推出 q,记作 $p\Rightarrow q$,并且说 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

特别提醒

若 $p\Rightarrow q$,但 $q\nRightarrow p$,则称 p 是 q 的充分而不必要条件;若 $q\Rightarrow p$,但 $p\nRightarrow q$,则称 p 是 q 的必要但不充分条件.

知能点二　充要条件

在"若 p,则 q"命题中,如果 $p\Rightarrow q$,p 是 q 的充分条件,同时,q 也是 p 的必要条件.另一方面,$q\Rightarrow p$,p 是 q 的必要条件,同时,q 也是 p 的充分条件.

一般地,如果既有 $p\Rightarrow q$,又有 $q\Rightarrow p$,就记作 $p\Leftrightarrow q$.

此时,我们说,p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.显然,如果 p 是 q 的充要条件,那么 q 也是 p 的充要条件.

概括的说,如果 $p\Leftrightarrow q$,那么 p 与 q 互为充要条件.

特别提醒

(1)解题时常常遇到充要条件的同义词语,如"当且仅当","必需且只需","等价于","反过来也成立"……

(2)如果,$p\nRightarrow q$,且 $q\nRightarrow p$,我们就说 p 是 q 的既不充分也不必要条件,同时,q 也是 p 的既不充分也不必要条件.

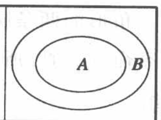
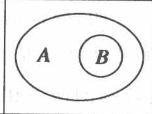
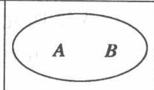
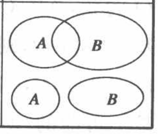
知能点三　充分条件、必要条件、充要条件的判断

一般地,关于充要条件的判断主要有以下几种方法:

(1)定义法:直接利用定义进行判断.

(2)利用集合间的包含关系进行判断.

若 $p:A=\{x|p(x)\}$，$q:B=\{x|q(x)\}$，则有：

若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分非必要条件	
若 $B\subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件，若 $B\subsetneqq A$，则 p 是 q 的必要非充分条件	
若 $A=B$，则 p，q 互为充要条件	
若 $A\not\subseteq B$，且 $B\not\subseteq A$，则 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件	

(3)等价法："$p\Leftrightarrow q$"表示 p 等价于 q，等价命题可以进行转换，当我们要证明 p 成立时，就可以去证明 q 成立．这里要注意"原命题⇔逆否命题"、"否命题⇔逆命题"只是等价形式之一，对于条件或结论是不等式关系(否定式)的命题一般应用等价法．

特别提醒

判断充分条件、必要条件、充要条件的步骤为：
(1)确定条件 p 是什么，结论 q 是什么；
(2)尝试从条件推结论，结论推条件；
(3)确定条件是结论的什么条件．

开阔视野 提升能力

拓展探究

拓展点一　充要条件的传递性

符号"⇒"和"⇐"具有单向传递性，"⇔"具有双向传递性，因此可根据几个条件的关系，经过若干次的传递，判断所给的两个条件之间的相互关系．例如：(1)若 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，$C\Rightarrow D$，则 $A\Rightarrow D$，即 A 是 D 的充分条件，D 是 A 的必要条件；(2)若 $A\Leftrightarrow B$，$B\Leftrightarrow C$，$C\Leftrightarrow D$，则 $A\Leftrightarrow D$，即 A 是 D 的充要条件．

拓展点二　充要条件的证明与求解

充要条件，必须从两个方面进行证明：既要证明充分性，又要证明必要性．证明充分性，就是证明原命题成立，证明必要性，就是证明原命题的逆命题成立．在解题时，要避免把充分性当必要性来证明，这就要求我们分清条件和结论．从条件推出结论，就是充分性；从结论推出条件，就是必要性．

精妙点拨 领悟方略

解题探究

题型一　充分条件、必要条件、充要条件的判断

【例1】 下列各题中，p 是 q 的什么条件？

(1)$p:x^2>4$，$q:x^3<-8$；

(2)$p:a+b<0$ 且 $ab>0$，$q:a<0$ 且 $b<0$；

(3)$p:x>1$，$q:\frac{1}{x}<1$；

(4)$p:x=2$，$q:x^2-7x+10=0$；

(5)$p:m>0$，q：方程 $x^2+x-m=0$ 有实根．

【点拨】 判断 p 是 q 的什么条件，主要判断 $p\Rightarrow q$ 及 $q\Rightarrow p$ 两命题的正确性．

【解析】 (1)由 $x^2>4\Rightarrow x<-2$ 或 $x>2\Rightarrow x^3<-8$ 或 $x^3>8$，故 $p\nRightarrow q$；由 $x^3<-8\Rightarrow x<-2\Rightarrow x^2>4$，故 $q\Rightarrow p$，因此，p 是 q 的必要不充分条件．

(2)由 $a+b<0$ 且 $ab>0$ 知，a，b 同号且都是负数．即 $a+b<0$ 且 $ab>0\Rightarrow a<0$ 且 $b<0$，$\therefore p\Rightarrow q$；由 $a<0$ 且 $b<0$，知 $a+b<0$，且 $ab>0$，即 $q\Rightarrow p$，因此，p 是 q 的充要条件．

(3)$x>1\Rightarrow \frac{1}{x}<1$，即 $p\Rightarrow q$；而 $\frac{1}{x}<1$ 时，$x<0$ 或 $x>1$，故 $q\nRightarrow p$，因此，p 是 q 的充分不必要条件．

(4)$\because x=2$ 时，$x^2-7x+10=4-14+10=0$，

$\therefore x=2\Rightarrow x^2-7x+10=0$．即 $p\Rightarrow q$；

当 $x^2-7x+10=0$ 时，可得 $x_1=2$，$x_2=5$，$\therefore x^2-7x+10=0\nRightarrow x=2$，即 $q\nRightarrow p$．因此 p 是 q 的充分不必要条件．

(5)$\because m>0\Rightarrow$ 方程 $x^2+x-m=0$ 的 $\Delta=1+4m>0$，即方程有实根；方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，即 $\Delta=1+4m\geq 0\nRightarrow m>0$，

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件．

拓展提升

要判断 p 是 q 的充分条件，只要满足 $p\Rightarrow q$，即"若 p，则 q"为真就可以了，不管是否有 $q\Rightarrow p$．但要判断 p 是 q 的充分不必要条件，必须满足：$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$．

【即时训练】

1．(1)(2007·天津)"$a=2$"是"直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$"的　　(　　)

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

(2)(2007·重庆)"$-1<x<1$"是"$x^2<1$"的　　(　　)

A．充分必要条件

B．充分但不必要条件

C．必要但不充分条件

D．既不充分也不必要条件

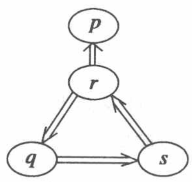
【例2】 已知 p，q 都是 r 的必要条件，s 是 r 的充分条件，q 是 s 的充分条件，那么

(1)s 是 q 的什么条件？

(2)r 是 q 的什么条件？

(3)p 是 q 的什么条件？

【点拨】 可将已知 r，p，q，s 的关系用图表示，然后利用图示解答问题．



【解析】 由图可知：(1)因为 $q\Rightarrow s$，$s\Rightarrow r\Rightarrow q$，所以 s 是 q 的充要条件．

(2)因为 $r\Rightarrow q$，$q\Rightarrow s\Rightarrow r$，所以 r 是 q 的充要条件．

(3)因为 $q\Rightarrow s\Rightarrow r\Rightarrow p$，而 $p\nRightarrow q$，所以 p 是 q 的必要不充分条件．

拓展提升

对于复杂的(如链锁式)的关系，应用⇒，⇐，⇏等符号进行传递，根据这些符号所组成的图形就可得出结论，借助于图示解题直观快捷．

【即时训练】

2．如果 A 是 B 的必要不充分条件，B 是 C 的充分必要条件，D 是 C 的充分不必要条件，那么 A 是 D 的　　(　　)

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件