XIAN XING DAI SHU

线性代数

编 著 戴昌国

南京工学院出版社

线性代数

戴昌国

南京工学院出版社

内 容 提 要

本书取材精炼，讨论详尽，为工程师及工科硕士研究生所必需的基础知识，内容包括线性空间与线性变换，特征值和特征矢，埃尔密特阵，芮利商，范数，矩阵函数，广义逆及最小二乘解，K积及常见矩阵的解法等。全书自成系统，凡具工程数学—线性代数知识的读者，都可通过自学进修；可作工科研究生教材，并可为理科各有关学科参考之用。

本书语言通俗，别有风格，并为读者提供一条贯穿思路，有益于开拓视野，加深对数学本身的理解。

线 性 代 数

戴 昌 国

南 京 工 学 院 出 版 社 出 版
南京四牌楼 2 号
江苏省新华书店发行　　湖熟印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 印张8.875字数199.4千字
1987年12月第1版　　1987年12月第1次印刷
印数1— 5000 册
ISBN 7—81023—064—2

O . 64　　定价：1.60 元
责 任 编 辑　王小然

前　　言

本书是根据笔者对南京工学院工科研究生讲授线性代数的教材整理成册的。

线性代数是一门比较抽象的课程，对于初学者是有一定困难的，特别是对于那些以为学数学只要会公式加作习题的人，尤其如此。例如，在学了线性代数后，尽管会判定一组向量是否是线性无关的，然而却不了解线性无关性究竟是怎么一回事，此种现象在教学中并不罕见。笔者以为这类现象的存在，一方面固然是由于一些初学者囿于对数学的“成见”——只以会用公式来解习题，或者只以学会处理一些典型问题的方法为满足的习见；另一方面或许也说明在教学中、在教材中，强调了计算性的材料，即数学的计算功能（这当然是必要的），而较少注重对于数学的描述功能的阐述。倘若这种看法还有点道理，那么要消除这种现象，就要求通过教学，改变某些读者的习见，同时还需要对数学的描述功能给以适当阐述。笔者以为消除了这种现象，就表明学生对所学课程的整体了解有所进步，从而提高了他的数学素养。对于研究生来说，这是重要的。因为在他的研究中，可能发现新的现象，倘若不能对其作出某种数学描述，那就使得他在定量、推理等问题的处理上，趑趄不前。要改变一个人的习见，决不是一种容易的事，有效的办法之一，可能是激起他对于另一种观点的兴趣，“兴趣是最好的老师”，自然会引

导他深入，浸润之力就可以达到目的。然而这就必需与教材处理的方式发生联系。如何通过教材处理，阐述数学的描述功能，并能引起读者的兴趣，使其自然地追踪觅迹，循径辟路，逐步深入，在不知不觉中走向前去，或许是一本教材应当追求的价值。

有鉴于此，本书在这方面作了一些尝试。在给出线性空间的公理之前，先介绍如何用数学语言来描述物质世界。若把自然界物质相互结合演变的作用，粗糙地用“+”来表示，而以集V来表示各种物质所成之集；数域F来记录同类物质的数量累积，那就从直观上容易导出全部公理，使得线性空间这一抽象系统的给出，显得自然而易于接受。在研究线性空间结构的行程中，着重于生成元系的思路，并由简而繁地构造子空间，顺乎自然地引出线性无关性、基、维以及直和等基本概念。读者或许会惊异地觉察到，原来线性空间和物质世界在宏观上竟如此相似。而对线性空间的研究方法，其本质无非是对物质世界的研究方法。线性无关性就是元素之间不能互消（当然也就不能互生）性质的抽象描述，而基与维亦是对元素周期表的抽象描述。以这种处理方式，通过对线性映射的研究，同构概念的形成（同构使得V中元的个性无关紧要，于是结构的性质就突出了），常见的线性空间理论的内容，几乎全部自然地流露出来了，可以说有一气呵成之势。对于一般读者而言，这种方式或许会激起他的兴趣，从而减少他对于抽象概念的负担，引起他把概念进行具体化的兴致。笔者所见不广，但坊间流行的线性代数书籍，似无此处理方式，或者可说，这是本书的一个特色罢！

倘使你使用本书，务望注意，这样的处理方式，只是为

了顺利地、迅速地进入“角色”，一旦进入了“角色”，就应该任“角色”的个性发展来支配“场景”和进程了。概念是智慧的结晶，所有概念都是抽象的。这种作法，只是帮助你深入地了解概念，它决不能代替概念本身。如此其特色才能发挥，甚至会取得意外的效果。

首三章主要是经典线性代数学的内容，尽管对于本科学生来说，或多或少接触过这些材料，然而从整体性和深入性而论，则非本科水平所及。第四章矩阵函数，介绍了矩阵分析的部分基础知识，函数e^{At}在应用上的重要性，足够说明这一章的必要了。第五章广义逆与最小二乘解、第六章K积与常见的矩阵方程解法，是为了研究生在处理问题时，有较近代的手段而撷取的，虽然讨论得不够详尽，然而却是进一步自学或研究的坚实基础。

正是由于本书的特有处理方式，所以有些定义以及定理的叙述方式，颇有别于流行的、或者传统的方式，例如，关于线性无关性的定义。当然，略加审视，便知道这些定义或定理与传统的、相应的定义或定理都是等价的，或许按这里的表述方式，更能表达出前后的关系和揭露概念的本质。

每章均附有习题。习题中有一部分是为了引导读者作进一步探求或学习而设置的。对于理解得较深入的那些读者来说，这些材料是有价值的。

目　　录

第一章 线性空间和线性变换

§1.1 引 言

我们假定读者已经具有下述基本知识：集合论的初步常识，行列式、矩阵及其代数运算，线性方程组等等。如果不够熟悉，学习中可准备一本工程数学—线性代数随手翻阅。在讨论过程中，我们会尽可能地介绍清楚基本概念：它们的由来、发展及其作用。希望你对于向量加法、矩阵乘法、初等变换等运算有一定的熟练程度，那就不难补足跳跃过的算式，消释疑念。

我们将常用C，R，Q，N，N^+等分别表示：复数集，实数集，有理数集，整数集，非负整数集等，也常用式

$$S=\{x \mid P(x)\}$$

来定义集合。它的含意是：S是一个集，由具有性质P的元x组成。在不致产生误会的场合，也可用$V=\{x, y, z, \cdots\}$来表示集合。逻辑符号$\forall$表示"任取"、"对任一"，"对所有的"这些意义，在集合既定的情形，这些都是同义语，例如：

$$\forall x, y \in N^+, \ x+y \geqslant 0$$

其含意是：在N^+中任取x, y，都有$x+y \geqslant 0$。

逻辑符号$\exists$表示"有"，"存在"，这类含意，例如：

$$\forall x,y\in N,\ \exists z\in N,\ x+z=y$$

它的含意是在集N中任取x,y，有N中的元z，能使$x+z=y$。"$\forall$"称为**全称量词**，而"$\exists$"则叫作**存在量词**。

数学的功能之一是描述问题，通常所谓对某种问题作出数学模型，就是这个意思。一个问题包括其牵涉到的对象以及这些对象间的关系。很自然，集合以及在集合内定义运算就是描述问题所必需的了。关于运算不妨把它看成是元与元之间的某种结合作用，按这种结合作用所产生的"新"元，就用式子来表示，例如：

$$x+y=z$$

就意味着：元x与元y按"+"这种结合作用，产生了"新"元$x+y$，把它称为z。按照这种理解，还可以更深一层来认识，它还把生成z（即$x+y$）的"原料"和"加工方式"都表明了。那么，所生成的元是否还在x与y所属的集内呢？倘若在，我们就说那种运算对所论的集合是**封闭**的。例如通常的"+"，"−"，"×"，"÷"，对集合R是封闭的，而开方运算则不是，因为显然有

$$\exists x\in R,\ \sqrt{x}\notin R$$

（采取这种观点来读数学，你不觉得别有情致吗？）每一种作用都有其特性，因而每种运算都有它所服从的规律——运算律，所以在定义运算时，需要讨论或说明它的运算律。

既然如此，是否有某种方式来描述我们的物质世界呢？就宏观现象而论，涉及到各式各样的物质，自然的作用使物质产生互变，而且我们以为物质世界是"完备"的，这句话意味着人类的向往，例如"点石成金"等这类愿望。从这些粗糙的认识出发，我们来探讨描述它的方式。我们的对象是物质，

不妨用V来表示物质所成之集，为了记录同类物质的数量累积，我们还需要一个数系F。用“+”来表示物质与物质相结合的作用，于是在V中就定义了运算，由于我们认为物质世界是“完备的”，那末，所产生的“新”物质就是物质世界中有的，换句话说，“+”是封闭的，我们还认为“+”是服从交换律和结合律的，这不过是同样的“原料”产生同样的东西，而与添加的先后和作用的次序无关。为了进一步描述“完备性”，可以认为，对于任意两种物质，必定可以在物质世界中找到一种物质，使它和所取的一种结合，能生成另一种，这不过是对“点石成金”这类想法的描述。倘使我们承认上面的说法，是对物质世界宏观的一种描述，那末关于V的认识，就可以数学化了；其次，由于数量累积的记录，与数系本身的运算有关，（当然，我们希望数系的运算和我们在V中定义的运算是协调的。）所以要再规定数系的元和V中的元之间的结合关系，不妨称之为“乘”法。根据我们对数量累积作记录的经验，我们认为这个“乘”法应该服从某些经验规则，特别是结合律和分配律。当然，因为“乘”表示同类物质的数量累积，而累积了的物质仍是物质，所以“乘”应该是对V封闭的。最后，对于数系F本身有没有什么要求呢？随着我们对物质世界的认识的深入，对于计量的精度就越来越高，对数系当然有要求，粗略地说，我们要求数系中至少有二个元，而且能进行四则运算，并且四则运算都是封闭的（零不能作为除数），对于这样的数系，称之为**域**（Field）。按这个要求，你可以检查一下，在我们所指出的那些数集中，有哪些是域呢？答案是：C，R和Q。是的，我们以后大致总是取C或R来作数系F的。

下节我们将据此，来进行数学描述，并将得出一个基本模型或系统——线性空间。进而对系统所遵循的规律作研究推理,展开对系统结构的研究,以形成线性代数的基本理论。

§1.2 线性空间

现在以上节的思路，作数学处理。

设V是集,其中的元称为向量或矢量,在V中定义“+”法，使其满足：

A_1： $\forall x,y\in V \quad x+y\in V$ （封闭性）

A_2： $\forall x,y\in V \quad x+y=y+x$ （交换律）

A_3： $\forall x,y,z\in V \quad (x+y)+z=x+(y+z)$（结合律）

A_4： $\forall \alpha,\beta\in V, \quad \exists x\in V, \quad \alpha+x=\beta$

设F为数域，在F与V之间定义“乘”法，使其满足（按通常的记法，乘号略去，符号紧靠并列就表示乘）：

M_1： $\forall a\in F, \ \forall x\in V, \ ax\in V$

（对V的封闭性）

M_2： $\forall a\in F, \ \forall x, \ y\in V, \quad a(x+y)=ax+ay$

（数乘对向量加法的分配律）

M_3： $\forall a, \ b\in F, \ \forall x\in V \quad (a+b)x=ax+bx$

（数乘对数的加法的加法的分配律）

M_4： $\forall a, \ b\in F, \ \forall x\in V: \quad a(bx)=(ab)x$

（数乘结合律）

M_5： $1\in F, \ \forall x\in V \quad 1x=x$

其中1是F的乘法单位元，具有性质 $\forall a\in F, \ | \ a=a \ | \ =a$

注意这里的乘法是F中数的乘法。满足以上各款的V和 F形

成的系统，称为线性空间，记作$V(F)$，在不致误会或F已明确的情形，也可简记为V。

上节中已经对此作了一种解释，但这只不过是提供达到它的一条思路,切不可以为这是“独此一家”。其实,概念是智慧的结晶。越是抽象的概念、它所可能覆盖的实际问题就越多。下面我们将在数学领域内提供一些线性空间的例子。在看例子之前，我们再谈一点对于这些定律的看法。V是一个抽象集，对其中的元，我们并不知其详，然而通过 A_1—A_3（关于向量加法的运算律）把A中的元关联了起来。A_4并不牵涉运算规定，而是说A中元的某种特性。意指对任取的α，β，存在x，使$\alpha+x=\beta$，倘使取α，α则按A_4，应有x使$\alpha+x=\alpha$，把这个x记作θ_α，则可记作：

$$\alpha\in V,\ \exists\theta_\alpha\in V;\ \alpha+\theta_\alpha=\alpha \tag{1.2—1}$$

不仅如此，稍加推理，可得

$$\forall\gamma\in V,\quad \alpha+\gamma+\theta_\alpha=\gamma+\alpha+\theta_\alpha=\alpha+\gamma \tag{1.2-2}$$

可见θ_α对元$\alpha+\gamma$也具有(1.2－1)式的性质,然而当γ遍历V中之元时,由A_4可知$\alpha+\gamma$也遍历V中之元,这就可把（1.2－1）式改写成 $\forall x\in V$，$\exists\theta\in V$，$x+\theta=\theta+x=x$，

$$\tag{1.2-3}$$

称θ为零元。不仅止也，由A_4还可得出

$$x,\ \theta\in V,\ \exists y,\ x+y=\theta \tag{1.2-4}$$

对x而言，按A_4，这样的y一定有，将其记作（$-x$），于是

$$x\in V,\ \exists -x\in V,\ x+(-x)=(-x)+x=\theta \tag{1.2-5}$$

称$(-x)$为x的**负元**。显然,不同的元,其负元也不同，因若$x\neq y$ 而又有 $x+(-y)=\theta$，则必有

$$x+(-y)=\theta \Longrightarrow y+x+(-y)=y+\theta \Longrightarrow x+\theta$$

$=y+\theta \Longrightarrow x=y$ 这与所设矛盾。

A_4成立，则V中必有零元，且每一元都有其各自的负元。反之，若V中有零元，且每一元都有其各自的负元，则显然A_4成立。所以有

定理 1·2·1 在线性空间$V(F)$中，A_4与下面两个条件等价。 $A_4(1)$： $\forall x\in V$，$\exists\theta\in V$ $x+\theta=x$

$A_4(2)$： $x\in V$ $\exists -x\in V$ $x+(-x)=\theta$

证明 $A_4 \Longrightarrow A_4(1)\,\&\,A_4(2)$ （已证）

若$A_4(1)$与$A_4(2)$成立，则$\forall\alpha,\beta\in V$，取$x=(-\alpha)+\beta\in V$

则显然有 $\alpha+[(-\alpha)+\beta]=\beta$

即 $A_4(1)\,\&\,A_4(2)\Longrightarrow A_4$

故 $A_4\Longleftrightarrow A_4(1)\,\&\,A_4(2)$ (1.2−6)

通常在线性空间的公理系中，以$A_4(1)$和$A_4(2)$代替A_4。值得一问的是：满足$A_4(1)$中的θ和满足$A_4(2)$中的$-x$，是否唯一？如何表出呢？

定理 1·2·2 在线性空间$V(F)$中

1. 满足$A_4(1)$的θ是唯一的。
2. 满足$A_4(2)$中的$(-x)$是唯一的。

证明 若另有θ'，也满足$A_4(1)$，则

$$\theta'=\theta'+\theta=\theta+\theta'=\theta$$

故θ唯一，又x若另有负元y，则

$$y=y+\theta=y+x+(-x)=\theta+(-x)=-x$$

故负元唯一。

定理 1·2·3 在线性空间$V(F)$中，有

(1) $\forall a\in F$，$a\theta=\theta$ (1.2−7)

(2) $\forall x\in V$，$0x=\theta$ (1.2−8)

(3) $\forall x\in V,\ -x=(-1)x$ (1·2−9)

证明 (1) $\forall x\in V\quad ax\in V$，而

$$\forall a\in F\quad a\theta+ax=a(\theta+x)=ax$$

由θ的唯一性，故 $\forall a\in F,\ a\theta=\theta$

(2) $\forall x\in V\quad 1x=x$ （M_5）

而 $1x=(1+0)x=1x+0x$

including $\forall x\in V\quad x=x+0x \Longrightarrow 0x=\theta$

(3) $(1+(-1))x=x+(-1)x=0x=\theta$

由$-x$的唯一性，故 $\forall x\in V,\ -x=(-1)x$ （证毕）

由这个定理，易知，$ax=\theta\Longrightarrow a=0$或$x=\theta$

本推论在以后的计算中，常常用到，读者可自行证明。不仅如此，还可以把$x+(-1)y$直接写成$x-y$，于是$ax-by$这类式子都可以按此理解。

下面来看一些例子：

例 1：空间F^n：设F为数域，定义

$$F^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\middle|\ x_i\in F,\ i=1,\ 2,\ \cdots n\right\}$$

在F^n中定义“+”，$\forall x,y\in F^n$，$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

定义数乘：$\forall a\in F$，$\forall x\in F^n$，$ax=a\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$

容易验证，这些运算满足公理系的要求，$F^n(F)$是线性空间。常简记为F^n.若$F=C$，R，则有C^n，R^n。特别当$n=1$时，C与R都可视为线性空间。

例 2 方程组 $Ax=0$ 的解全体，在向量加法和数乘这两种运算下，是线性空间，常称为齐次线性方程组的解空间。亦称为A的核空间，简记为$K(A)$或$N(A)$。

例 3 空间$M_n(F)$： 设F为数域

$$M_n(F)=\{A=(a_{ij})\mid a_{ij}\in F,\quad i,j=1,2,\cdots n\}$$

即$M_n(F)$是n阶矩阵全体所成之集。在矩阵加法和矩阵与数的乘法这两种运算下，形成线性空间，常用的有：$M_n(R)$或记作$R^{n\times n}$，$M_n(C)$或记为$C^{n\times n}$。

例 4 设 $V=R^2=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\middle| x_i\in R,\quad i=1,\ 2\right\}$，取数域为$R$在$V$中定义“+”法如下：

$$\forall x,\ y\in V,\ x+y=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2+x_1y_1 \end{pmatrix}$$

定义数乘如下：

$$\forall k\in R\quad \forall x\in V,\ kx=k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2+\dfrac{k(k-1)}{2}x_1^2\end{pmatrix}$$

在这种“＋”与数乘的作用下，$V(R)$是不是线性空间呢？

容易看出，这种“＋”法，满足A_1，A_2，A_3各款；至于是否满足A_4，只须验证是否满足$A_4(1)$和$A_4(2)$即可。

$A_4(1)$：若$\theta=\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix}$则$x+\theta=\begin{pmatrix}x_1+\theta_1\\x_2+\theta_2+x_1\theta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

则必 $\theta_1=\theta_2=0$，故 $\theta=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A_4(2)$： 若 $x+y=\theta$，

则 $\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2+x_1y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

故 $y=-x=\begin{pmatrix}-x_1\\x_1^2-x_2\end{pmatrix}$

M_1显然满足。

M_2： $k(x+y)=kx+ky$

左端 $k(x+y)=k\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2+x_1y_1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}kx_1+ky_1\\k(x_2+y_2+x_1y_1)+\dfrac{k(k-1)}{2}(x_1+y\ )^2\end{pmatrix}$$

右端 $kx+ky=\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2+\dfrac{k(k-1)}{2}x_1^2\end{pmatrix}$