管理类专业学位联考高分一本通丛书

附2008–2011年真题

2012版

MBA MPA MPAcc

管理类专业学位联考

数学高分一本通

朱杰 吴晶雯 编著

完全针对新考纲编写

全面知识点分类剖析

重视分析真题抓核心

历年试题统计明重点

实用解题技巧最给力

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

管理类专业学位联考高分一本通丛书

管理类专业学位联考

(MBA－MPA－MPAcc)

数学高分一本通

朱 杰 吴晶雯 编著

★ 完全针对新考纲编写

★ 全面知识点分类剖析

★ 重视分析真题抓核心

★ 历年试题统计明重点

★ 实用解题技巧最给力

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书为管理类专业学位联考高分一本通丛书之一，根据全国硕士研究生入学统一考试管理类专业学位联考(MBA，MPA，MPAcc)综合能力考试最新大纲的要求，由知识点分类汇总以及2008～2011年全国管理类联考数学真题及解析两部分组成，是主编教师多年辅导管理类入学考试数学复习的经验之作。本书重视分析真题抓核心，普适性解法与实用解题技巧融会贯通。且每年都会及时更新全国管理类联考数学真题，以满足广大考生的要求。

本书适合参加管理类专业学位联考的考生及辅导老师参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

管理类专业学位联考：MBA－MPA－MPAcc. 数学高分一本通/朱杰，吴晶雯编著. —上海：上海交通大学出版社，2011
(管理类专业学位联考高分一本通)
ISBN 978－7－313－07241－2

Ⅰ. ①管… Ⅱ. ①朱…②吴… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第070079号

管理类专业学位联考(MBA－MPA－MPAcc)
数学高分一本通

朱 杰 吴晶雯 编著

上海交通大学 出版社出版发行
(上海市番禺路951号 邮政编码200030)
电话：64071208 出版人：韩建民
常熟市文化印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
开本：787mm×1092mm 1/16 印张：22.75 字数：549千字
2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷
印数：1～5030
ISBN 978－7－313－07241－2/G 定价：48.00元

前 言

管理类专业学位联考(MBA，MPA，MPAcc)是专门为未来职场精英设计的选拔性考试，从内容和形式上都类似于国外商学院入学考试(GMAT)。考试分两张试卷，英语(满分100分)和综合能力卷(满分200分)。其中综合能力卷由三部分组成，数学基础(75分)、逻辑推理(60分)、写作(65分)。英语、综合都有单科线，要想进名校深造，那数学必定要拿高分。

综合卷中的数学基础，由算术、代数、几何、数据分析(依照最新考纲)四部分组成，主要考察考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力，通过问题求解和条件充分性判断两种题型进行测试。考纲中明确指出，要求考生具有运用数学基础知识、基本方法分析和解决问题的能力。该考试与考生以往遇到过的数学考试的显著差别有以下几个方面。首先，条件充分性题型是考生在以往的考试(中考、高考等)中都没有遇到过的，该题型是一种带逻辑推理的数学试题。其次，综合能力卷三部分在一张试卷中，要在3小时内完成25道数学题、20道逻辑题、2篇作文的写作，可见对考生的能力和速度都有一定要求。对数学不但要会做，而且要做得快！数学要考高分，我们认为必须重视如下三要素：基本计算、基本知识点及其解法、实用解题技巧。数学要考高分，其实也不难。因为考试题型的限定，所以基本计算、基本知识点都是有限的，如能掌握实用的解题技巧，数学拿到60分应该不是问题！

如何复习？广大考生应该分阶段、有重点地进行系统复习安排。广大考生都是职场中的精英，平时工作都很忙，如何提高复习效率是大家最关注的问题。所以，我们建议广大考生站在“巨人”的肩膀上，选择好的教辅书、专业的辅导老师、权威的辅导班，这样可以少走很多弯路，大大节约复习时间。我们曾个别辅导过一些数学困难户(年纪大、离开校园时间长、工作忙、没有时间复习、原本数学就比较弱等)，他们通过自身努力也考进了名校。实践证明，只要有恒心、有毅力、坚持不懈就能圆名校梦，为今后职场加油！

本书是我们多年来在上海交通大学辅导班授课的总结，有如下特点：

(1) 针对最新的考纲进行编写。

(2) 知识点分类归纳，重视对历年真题的分析，考生能够透过真题表面看到知识点本质。

(3) 例题、习题都有详细解答，重要习题后有评注，帮助考生抓住要点。

(4) 对历年考题中出现的知识点进行了统计，考生对什么是重点一目了然。

(5) 针对考试题型的特点，专门一章讲授一些实用解题技巧(以往的教辅书中从未有过)。

能写成此书，首先要感谢家人的支持与关心。其次，要感谢上海交通大学袁萍华老师对我们教学的支持，朱杰还要感谢向明中学恩师黄萃椿先生，他对数学的理解让我至今受用。最后，还要感谢我们的历届学员，是你们的鼓励与鞭策增强了我们写作的动力。在本书编写时，编者参阅了有关教辅书籍，引用了一些例子，在此一并向有关作者致谢。

由于编者水平有限，写作时间紧张，有错误和疏漏之处还请同行、广大考生指正。

朱杰(eijuhz@126.com)

吴晶雯(wenjw88@163.com)

2011 年 3 月于上海

目　录

数学考试内容、历年联考知识点分布统计、题型介绍

0.1 数学考试内容[①]

管理类专业学位联考(MBA，MPA，MPAcc)综合能力考试数学部分要求考生具有运用数学基础知识、基本方法分析和解决问题的能力.

综合能力考试中的数学部分(75 分)主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力,通过问题求解(15 小题,每小题 3 分,共 45 分)和条件充分性判断(10 小题,每小题 3 分,共 30 分)两种形式来测试.

数学部分试题涉及的数学知识范围有:

0.1.1 算术

1. 整数

(1) 整数及其运算.

(2) 整除、公倍数、公约数.

(3) 奇数、偶数.

(4) 质数、合数.

2. 分数、小数、百分数

3. 比与比例

4. 数轴与绝对值

0.1.2 代数

1. 整式

(1) 整式及其运算.

(2) 整式的因式与因式分解.

2. 分式及其运算

3. 函数

(1) 集合.

(2) 一元二次函数及其图像.

(3) 指数函数、对数函数.

---

① 参考《全国硕士研究生入学统一考试管理类专业学位联考综合能力考试大纲(2011 年版)》,教育部考试中心编,高等教育出版社,2010 年 9 月.

4. 代数方程

(1) 一元一次方程.

(2) 一元二次方程.

(3) 二元一次方程组.

5. 不等式

(1) 不等式的性质.

(2) 均值不等式.

(3) 不等式求解:一元一次不等式(组),一元二次不等式,简单绝对值不等式,简单分式不等式.

6. 数列、等差数列、等比数列

0.1.3 几何

1. 平面图形

(1) 三角形.

(2) 四边形(矩形、平行四边形、梯形).

(3) 圆与扇形.

2. 空间几何体

(1) 长方体.

(2) 圆柱体.

(3) 球体.

3. 平面解析几何

(1) 平面直角坐标系.

(2) 直线方程与圆的方程.

(3) 两点间距离公式与点到直线的距离公式.

0.1.4 数据分析

1. 计数原理

(1) 加法原理、乘法原理.

(2) 排列与排列数.

(3) 组合与组合数.

2. 数据描述

(1) 平均值.

(2) 方差与标准差.

(3) 数据的图表表示:直方图、饼图、数表.

3. 概率

(1) 事件及其简单运算.

(2) 加法公式.

(3) 乘法公式.

(4) 古典概型.

(5) 伯努利概型.

0.2 历年联考试题知识点分布统计

说明:

(1) 2007 年起联考只考初等数学内容(不考微积分、线性代数).

(2) 下表是对 2007 年 10 月至 2011 年 1 月(共 8 套试卷)所有试题按照新大纲知识点进行分类统计.

(3) 考试中不少题目涉及多个知识点,则分值进行平分. 例如一题涉及 3 个知识点,则每个知识点 1 分.

知识点 \ 年份	2011 年 1 月	2010 年 10 月	2010 年 1 月	2009 年 10 月	2009 年 1 月	2008 年 10 月	2008 年 1 月	2007 年 10 月	百分比
应用题	13.5	9	21	15	11.5	8	14	10	17.0%
整数		3	6	3		2		2	2.7%
实数	7.5	3		7.5	7	7	1.5		5.6%
比与比例	3	1.5	4.5		4.5		2	8	3.9%
数轴与绝对值			3	6	4	10	4	6	5.5%
整式		3	3	3		2		3	2.3%
分式及其运算	3	3			4	3			2.2%
函数			0.75	1.5	3		2	3	1.7%
代数方程	1.5	8.5		9	6	7	3.5	5	6.8%
不等式	3	1	6.75	3	4	3	6	8	5.8%
数列	9	9	9	6	11.5	7	8	8	11.3%
平面图形	7.5	4.5	7.5	3	3	9	5.5	5	7.5%
平面解析几何	6	16	1.5	9	9	5.5	15.5	8	11.8%
空间几何体	3	/	/	/	/	/	/	/	0.5%
计数原理	6	4.5	3	3	3	5	5	3	5.4%
概率	6	6	9	4.5	4.5	3.5	8	4	7.6%
数据描述	6	3		1.5		3		2	2.6%

从上表分析,总体来说,应用题、平面解析几何、数列、概率、平面图形、代数方程等比较重要. 但每年都有所变化,侧重点有所不同.

0.3 数学部分题型介绍

管理类专业学位联考数学部分有两种题型：问题求解（15 小题，每小题 3 分，共 45 分）和条件充分性判断（10 小题，每小题 3 分，共 30 分）. 下面分别做简要介绍.

0.3.1 问题求解题型

联考中的问题求解题型是我们大家非常熟悉的一般选择题，即要求考生从 5 个所列选项（A），（B），（C），（D），（E）中选择一个符合题干要求的选项，该题型属于单项选择题，有且只有一个正确答案.

该题型有直接解法（根据题干条件推出结论）和间接解法（由结论判断题干是否成立）两种解题方法. 下面举例说明：

例 0.1 方程 $|x-|2x+1||=4$ 的根是（ ）.

（A）$x=-5$ 或 $x=1$ （B）$x=5$ 或 $x=-1$

（C）$x=3$ 或 $x=-\frac{5}{3}$ （D）$x=-3$ 或 $x=\frac{5}{3}$

（E）$x=2$

解法 1 原方程等价于 $x-|2x+1|=4$ 或 $x-|2x+1|=-4$.

即 $\begin{cases}2x+1\geqslant 0,\\ x-2x-1=4,\end{cases}$ $\begin{cases}2x+1<0,\\ x+2x+1=4.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+1\geqslant 0,\\ x-2x-1=-4,\end{cases}$ $\begin{cases}2x+1<0,\\ x+2x+1=-4.\end{cases}$

前面两组无解，从后两组可解出 $x=3$ 或 $x=-\frac{5}{3}$. 所以选（C）.

解法 2 将 $x=-5$ 代入等式左边 $=|x-|2x+1||=14\neq 4$，所以（A）不正确. 同理可得（B）、（D）、（E）也不正确. 故只有（C）正确.

解法 1 从题干出发，逐步导出结论，属于直接解法. 解法 2 是排除不符合题干条件的选项，从而确定正确选项，属于间接法.

0.3.2 条件充分性判断题型

1. 充分条件基本概念

1）充分条件的定义

对两个命题 A 和 B 而言，若由命题 A 成立，肯定可以推出命题 B 也成立（即 A⇒B 为真命题），则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件.

2）条件与结论的定义

两个数学命题中，通常会有“条件”与“结论”之分，若由“条件命题”的成立，肯定可以推出“结论命题”也成立，则称“条件”充分. 若由“条件命题”不一定能推出（或不能推出）“结论命题”成立，则称“条件”不充分.

例 0.2 不等式 $x^2-5x-6<0$ 能成立.

（1）$1<x<3$ （2）$x>7$ （3）$x=5$ （4）$x<6$ （5）$-1<x<6$

此例中，题干“$x^2-5x-6<0$能成立”，这个命题是“结论”，下面分别给出的5个命题都是不同的“条件”.

现在我们可以把它们按照条件充分与否分为两类：条件(1)、(3)、(5)充分，条件(2)、(4)不充分.

2. 条件充分性判断题型

MBA考试中有一类和其他考试不同的题目类型：条件充分性判断题. 本类题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论. 即阅读每小题中的条件(1)和(2)后选择.

请注意全书此类题型都给出条件(1)和条件(2)，判断后按如下规则选(A)～(E).

(A) 代表：(1)充分，但是(2)不充分.

(B) 代表：(1)不充分，但是(2)充分.

(C) 代表：(1)单独不充分，(2)单独不充分，但条件(1)和(2)联合起来充分.

(D) 代表：(1)充分，(2)也充分，即(1)、(2)单独都充分.

(E) 代表：条件(1)和(2)单独都不充分，条件(1)和(2)联合也不充分.

例 0.3 (条件充分性判断)[①]方程 $x^2-3x-4=0$.

(1) $x=-1$　　(2) $(x-4)^2=0$, $x\in\mathbf{R}$

解法 1 该题的关键是：由条件推结论.

(1) $x=-1$，则代入 $x^2-3x-4\Rightarrow x^2-3x-4=0$，所以满足要求.

因此(1)是结论 $x^2-3x-4=0$ 成立的充分条件.

(2) $(x-4)^2=0\Leftrightarrow x=4$，因此代入 $x^2-3x-4\Rightarrow x^2-3x-4=0$，所以满足要求.

因此(2)是结论 $x^2-3x-4=0$ 成立的充分条件.

所以(1)充分，(2)单独也充分. 因此选择(D).

解法 2 可以先将结论化简 $x^2-3x-4=0\Leftrightarrow(x-4)(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1$ 或 $x=4$，故(1)、(2)都是充分条件，因此选择(D).

例 0.4 $x=-1$.

(1) 方程 $x^2-3x-4=0$　　(2) 满足不等式 $x^2+2x<0$

解 (1) 方程 $x^2-3x-4=0\Leftrightarrow x=4$ 或 $x=-1$，所以(1)不充分.

(2) 满足不等式 $x^2+2x<0\Leftrightarrow x(x+2)<0\Leftrightarrow -2<x<0$，所以(2)不充分.

但是条件(1)与条件(2)联合，即 $x=4$ 或 $x=-1$ 且 $-2<x<0$，实质就是 $x=-1$，所以联合充分，应该选(C).

注意，此题特别容易犯的错误是将结论代入条件，认为都充分，此外还要注意与例0.4比较.

例 0.5 $a>4$.

(1) $a>3$　　(2) $a>5$

解 (1) $a>3$ 不能推出 $a>4$，所以(1)不充分.

(2) $a>5$ 可以推出 $a>4$，所以(2)充分.

所以(1)不充分，但是(2)充分，因此选择(B).

例 0.6 $1/q>1$ 成立.

---

① 形如本题样式的都为条件充分性判断题，以后不再重复.

(1) $q<1$　　(2) $q>1$

解法 1　(1) 当 $q<1$，例如 $q=-1$，则 $1/q>1$ 不成立，故(1)不是充分条件.

(2) 当 $q>1$，例如 $q=2$，则 $1/q>1$ 不成立，故(2)不是充分条件.

而且条件(1)与条件(2)不能联合，所以选择(E).

解法 2　将结论等价化简 $1/q>1 \Leftrightarrow (1-q)/q>0 \Leftrightarrow q(q-1)<0 \Leftrightarrow 0<q<1$.

所以条件(1)、(2)都不充分.

例 0.7　$1/q \geqslant 1$ 成立.

(1) $q \leqslant 1$　　(2) $q \geqslant 1$

则最终答案应该选(C)，注意与例 0.6 比较.

例 0.8　$x \in (0, 1)$.

(1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$　　(2) $0<x<2$

解　(1) 因为 $[-1, 1] \not\subset (0, 1)$，所以条件(1)不充分.(或者直接给个反例 $x=-0.5$)

(2) 因为 $(0, 2) \not\subset (0, 1)$，所以条件(2)不充分.(或者直接给个反例 $x=1.5$)

条件(1)与(2)联合，得到 $0<x \leqslant 1$，所以联合仍然不充分.

因为 $(0, 1] \not\subset (0, 1)$，关键是 $x=1$ 时候结论不成立.

所以选(E).

3. 关于条件充分性试题的几点说明

(1) 条件充分性问题永远是从条件出发推结论.

(2) 如果题目中的条件或者结论比较复杂，可以先做**等价**化简再做判断.

(3) 要说明条件充分，需要严格证明；要说明条件不充分，只要举出一个反例即可.

(4) 若条件包含在结论中(即条件范围比结论范围小)则条件充分，若条件不包含在结论中则条件不充分，常用于不等式范围的讨论，还要特别注意条件与结论中的等号.

(5) 条件充分性问题可以按照如下顺序做三个判断：

a) 判断条件(1)单独是否充分；

b) 判断条件(2)单独是否充分；

c) 有必要时进一步判断条件(1)与条件(2)联合起来是否充分.

第 1 章
整　　数

1.1 基 本 概 念

1.1.1 整数及带余除法

(1) 整数可分为两类：偶数及奇数. 两个相邻的整数必有一偶一奇. 例如 n, $n+1$ 这两个连续的自然数中必定有一个偶数.

(2) 整数包括正整数、负整数和零. 两个整数的和、差、积仍然是整数，但是用一个不等于零的整数去除另一个整数所得的商不一定是整数，因此，我们有以下整除的概念.

(3) 整除(定义)：

设 a, b 是任意两个整数，其中 $b\neq 0$，如果存在一个整数 q，使得等式 $a=bq$ 成立，则称 b 整除 a 或 a 能被 b 整除，记做 $b|a$，此时我们把 b 叫做 a 的因数，把 a 叫做 b 的倍数. 如果这样的 q 不存在，则称 b 不能整除 a，记做 $b\nmid a$.

例如 $2|6$，因为可以有等式 $6=2\times 3$. 但 $2\nmid 5$，因为 $5=2\times 2+1$.

(4) 整除具有如下性质：

a) 如果 $c|b$, $b|a$，则 $c|a$；

b) 如果 $c|b$, $c|a$，则对任意的整数 m, n 有 $c|(ma+nb)$.

(5) 带余除法(定理)：

设 a, b 是两个整数，其中 $b>0$，则存在整数 q, r，使得

$$a=bq+r,\ 0\leqslant r<b$$

成立，而且 q, r 都是唯一的. q 叫做 a 被 b 除所得的不完全商，r 叫做 a 被 b 除所得的余数. 例如 2 除 11，不完全商为 5，余数为 1，因为 $11=2\times 5+1$.

(6) 由整除的定义及带余除法可知，若 $b>0$，则 $b|a$ 的充分必要条件是带余除法中余数 $r=0$.

(7) 用带余除法，根据余数我们可将整数集合分类. 若取 $b=2$，则余数 $0\leqslant r<2$，即余数为 0 和 1，则整数可分为 $2q$ 或 $2q+1$(即偶数和奇数两大类). 若取 $b=3$，则整数可分为 $3q$, $3q+1$, $3q+2$ 三大类.

(8) 关于数的整除问题有如下一些小结论：

a) 零能被任意非零自然数整除；

b) 能被 2 整除的数，其个位数字是 0, 2, 4, 6, 8 这 5 个数字中的一个；

c) 各位数字之和能被 3(或 9)整除的数必能被 3(或 9)整除；

d) 末两位能被 4 整除的数必能被 4 整除；

e) 末位是 0 或 5 的数必能被 5 整除.

1.1.2 质数、合数及算术基本定理

(1) 在正整数中，1 的正因数只有它本身，因此在整数中 1 占有特殊的地位. 任何一个大于 1 的整数，都至少有两个正因数，即 1 和这个整数本身. 将大于 1 的整数，按照它们含有正因数的个数分类，就得到关于质数和合数的概念.

(2) 质数和合数(定义)：

一个大于 1 的整数，如果它的正因数只有 1 和它本身，则称这个整数是质数(或素数)；一个大于 1 的整数，如果除了 1 和它本身，还有其他正因数，则称这个整数是合数(或复合数).

由定义可知：1 既不是质数也不是合数；大于 1 的整数可分为两类：质数及合数；2 是最小的质数，除了最小的质数 2 是偶数外，其余质数均为奇数；4 是最小的合数.

(3) 质数 P 具有如下性质：

a) 若 P 是一质数，a 是任一整数，则 a 能被 P 整除或 a 与 P 互质(P 与 a 的最大公因数是 1)；

b) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个整数，P 是质数，若 $P \mid a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$，则 P 一定能整除其中一个 a_k.

(4) 整数的质因数分解(定理)：

任何一个大于 1 的整数都能分解成若干个质数之乘积，即对于任一整数 $a > 1$，有

$$a = P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_n,$$

式中：$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是质数，且要求 $P_1 \leqslant P_2 \leqslant \cdots \leqslant P_n$，则这样的分解式是唯一的.

例如，合数 60 可以质因数分解为 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

1.1.3 最大公因数和最小公倍数

(1) 公因数、互质(定义)：

设 a, b 是两个整数，若整数 d 满足 $d \mid a$ 且 $d \mid b$，则称 d 是 a, b 的一个公因数(公约数). 整数 a, b 的公因数中最大的一个称为 a, b 的最大公因数(公约数)，记为 (a, b). 若 $(a, b) = 1$，则称 a, b 互质.

例如，$a = 12, b = 30$，则 1，2，3，6 都是 a, b 的公因数，其中最大的是 6，所以 6 是 12，30 的最大公因数.

(2) 公倍数(定义)：

设 a, b 是两个整数，若 p 是整数，满足 $a \mid p$ 且 $b \mid p$，则称 p 是 a, b 的公倍数. a, b 的所有公倍数中最小的正整数叫做 a, b 的最小公倍数，记为 $[a, b]$.

例如，$a = 12, b = 30$，则 60，120，180 等都是 a, b 的公倍数，其中最小的是 60，所以 60 是 12，30 的最小公倍数.

(3) 设 a, b 是任意两个正整数，则有：

a) a, b 的所有公倍数都是最小公倍数 $[a, b]$ 的倍数，即若 $a \mid p$ 且 $b \mid p$，则 $[a, b] \mid p$. 例如 60 是 12，30 的最小公倍数，60 能够整除 120，180 等 12，60 的公倍数.

b) 若 $a \mid p$ 且 $b \mid p$，且 $(a, b) = 1$ (即 a, b 互质)，则 $a \cdot b \mid p$.

例如，$2 \mid 24$ 且 $3 \mid 24$，且 $(2, 3) = 1$，则 $2 \times 3 \mid 24$.

c) $[a, b]=\dfrac{ab}{(a, b)}$. 特别当 $(a, b)=1$, 则 $[a, b]=ab$.

例如, $a=12$, $b=30$, 则 $(a, b)=6$, $[a, b]=60$, $ab=360$.

1.2 知识点分类讲解

【知识点 1.1】 数的整除与带余除法

解题技巧: 带余除法可转化为 $a=bq+r\,(0\leqslant r<b)$ 的等式问题. 反之,看到等式条件也要考虑利用整除来解题.

例 1.1 当整数 n 被 6 除时,其余数为 3,则下列哪一项不是 6 的倍数? (　　).

(A) $n-3$　　(B) $n+3$　　(C) $2n$　　(D) $3n$　　(E) $4n$

解 由已知 $n=6k+3$, 这里 k 是整数,从而 $n-3=6k+3-3=6k$, $n+3=6k+3+3=6(k+1)$, $2n=2(6k+3)=12k+6=6(2k+1)$, $4n=4(6k+3)=6(4k+2)$, 即 $n-3$, $n+3$, $2n$, $4n$ 都是 6 的倍数,而 $3n=3(6k+3)=6(3k+1)+3$, 其余数 $r=3$, 即 $3n$ 不是 6 的倍数.

答案是(D).

〖评注〗 倍数问题也是整除问题,整除问题化为等式问题.

例 1.2 若 x 和 y 是整数,则 $xy+1$ 能被 3 整除.

(1) 当 x 被 3 除时,其余数为 1

(2) 当 y 被 9 除时,其余数为 8

解 取 $x=4$, $y=1$, 则知条件(1)不充分.

取 $y=17$, $x=2$, 知条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2),令 $x=3q+1$, $y=9l+8$, 则 $xy+1=(3q+1)(9l+8)+1=27ql+24q+9l+9=3(9ql+8q+3l+3)$, 因此, $xy+1$ 能被 3 整除,答案是(C).

〖评注〗 利用带余除法公式将余数问题转化为等式问题.

例 1.3 自然数 n 的各位数之积为 6.

(1) n 是除以 5 余 3,且除以 7 余 2 的最小自然数

(2) n 是形如 2^{4m}(m 是正整数)的最小自然数

解法 1 由条件(1),

$$n=5k_1+3,\ n=7k_2+2,$$

因此, $5k_1+3=7k_2+2$, $7k_2=5k_1+1$, 则满足 $7\mid 5k_1+1$ 的最小正整数 $k_1=4$, 从而 $n=5\times4+3=23$, $2\times3=6$, 即条件(1)是充分的.

解法 2 用列举的方法. 根据 n 是除以 5 余 3 的自然数,可以得到 n 为 8, 13, 18, 23, …,再满足除以 7 余 2 的最小自然数即为 23.

由条件(2),应取 $m=1$, $2^{4m}=2^4=16$, 即 $n=16$, $1\times6=6$, 条件(2)也是充分的.

答案是(D).

〖评注〗 条件(1)的解法1，看到等式 $7k_2=5k_1+1$，就要想到整除“$7|5k_1+1$”；解法2说明有的时候罗列也是一个好办法.

例 1.4 有一个四位数，它被131除余13，被132除余130，则此数字的各位数字之和为(　　).

(A) 23　　(B) 24　　(C) 25　　(D) 26　　(E) 27

解法 1 设所求四位数为 n，由已知 $n=131k_1+13=132k_2+130$，式中 k_1，k_2 都为整数.

因为 $n=131k_1+13=132k_2+130=(131+1)k_2+131-1=131(k_2+1)+(k_2-1)$，

所以 $\begin{cases}k_1=k_2+1\\13=k_2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=15\\k_2=14\end{cases}$，

所以 $n=132\times14+130=1\,978$，此数字的各位数字之和为25，答案是(C).

解法 2 四位数被131，132除商之间应该差1，设四位数被131除商为 a，则四位数被132除商为 $a-1$，则因为 $131a+13=132(a-1)+130$，所以 $a=15$. 答案是(C).

〖评注〗 解法2充分利用了商之间的关系，计算量比较小.

例 1.5 $8x^2+10xy-3y^2$ 是49的倍数.

(1) x，y 都是整数　　(2) $4x-y$ 是7的倍数

解 只有在整数范围内，条件(1)不充分，$8x^2+10xy-3y^2$ 是某个整数的倍数才有意义，即条件(2)是不充分，且条件(1)，(2)联合也不一定充分，因此，本题答案只能是(C)或(E).

由于 $8x^2+10xy-3y^2=(4x-y)(2x+3y)$，由于 $2(2x+3y)=4x+6y=(4x-y)+7y$ 是7的倍数，而 $(2,7)=1$，因此 $7|(2x+3y)$，即 $8x^2+10xy-3y^2=(4x-y)(2x+3y)$ 是49的倍数.

答案是(C).

〖评注〗 $4x-y$ 是7的倍数，则可设 $4x-y=7q$ (q 为整数)，将 $y=4x-7q$ 代入 $2x+3y=2x+3(4x-7q)=14x-21q=7(2x-3q)$，所以 $7|(2x+3y)$. 该方法转化为等式问题.

【知识点 1.2】 判断数的奇偶性，解题技巧如下：

A. 奇数±奇数=偶数　　奇数×奇数=奇数

奇数±偶数=奇数　　奇数×偶数=偶数

偶数±偶数=偶数　　偶数×偶数=偶数

B. 若两个整数之和为奇数，则必定一奇一偶；

若两个整数之积为奇数，则必定都是奇数.

例 1.6 已知 a，b，c 三个数中有两个数是奇数，一个数是偶数，n 是整数，如果 $S=(a+n+1)+(b+2n+2)+(c+3n+3)$，那么(　　).

(A) S 为偶数

(B) S 为奇数

(C) 当 n 为偶数时，S 是偶数，当 n 为奇数时，S 是奇数

(D) 当 n 为偶数时，S 是奇数，当 n 为奇数时，S 是偶数

(E) S 的奇偶性不能确定

解 由于 $S=(a+n+1)+(b+2n+2)+(c+3n+3)=(a+b+c)+6(n+1)$，又

由于 a，b，c 三个数中有两个数是奇数，一个数是偶数，因此 $a+b+c$ 一定为偶数. 从而 $S=(a+b+c)+6(n+1)$ 一定为偶数，故答案是(A).

〖评注〗 有时括号是阻碍，打开括号后可能豁然开朗.

例 1.7 m 为偶数.

(1) 设 n 为整数，$m=n(n+1)$

(2) 在 1，2，3，…，1988 这 1988 个自然数中相邻两个数之间任意添加一个加号或减号，设这样组成的运算式的结果是 m

解 由条件(1)，$m=n(n+1)$，连续两个整数中，正好一个奇数一个偶数，从而 m 是偶数，所以条件(1)是充分的.

由条件(2)，在 1，2，3，…，1988 中有 994 个偶数，994 个奇数. 994 个偶数相加减必为偶数，994 个(偶数个)奇数相加减也必为偶数，所以其运算式的结果一定是偶数，从而条件(2)也是充分的. 答案是(D).

〖评注〗 若将条件(2)改为：在 1，2，3，…，1990 这 1990 个自然数中相邻两个数之间任意添加一个加号或减号，这样组成的运算式的结果还是偶数吗？

例 1.8 (201001)有偶数位来宾.

(1) 聚会时所有来宾都被安排坐在一张圆桌周围，且每位来宾与其邻座性别不同

(2) 聚会时男宾人数是女宾人数的两倍

解 条件(1)中男女成对出现，所以有偶数位来宾，所以条件(1)充分.

条件(2)反例：男宾 2 人，女宾 1 人.

所以答案是(A).

〖评注〗 条件(1)中围着圆桌(或者绕圈)坐是关键.

例 1.9 $\frac{a+b}{2}$，$\frac{b+c}{2}$，$\frac{c+a}{2}$中至少有一个整数.

(1) a，b，c 是三个任意的整数　　(2) a，b，c 是三个连续的整数

解 由条件(1)，a，b，c 是三个任意的整数，因此 a，b，c 中至少有两个奇数或两个偶数，从而 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 中至少有一个偶数，即$\frac{a+b}{2}$，$\frac{b+c}{2}$，$\frac{c+a}{2}$中至少有一个是整数.

由条件(2)，a，b，c 中正好有两个奇数或正好两个偶数，因此 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 中至少有一个是偶数，从而$\frac{a+b}{2}$，$\frac{b+c}{2}$，$\frac{c+a}{2}$中至少有一个是整数.

因此条件(1)和条件(2)都是充分的，答案是(D).

〖评注〗 此题很容易认为条件(1)不充分，思考的时候也需要比较仔细.

【知识点 1.3】 质数、互质、公因数、公倍数

解题技巧：利用质因数分解解题

A. 质数、合数的判断

例 1.10 (201001)三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足 6 岁)，他们的年龄都是质数(素数)，且依次相差 6 岁，他们的年龄之和为(　　).

(A) 21　　(B) 27　　(C) 33　　(D) 39　　(E) 51