



**BIOGRAPHY OF  
THE WORLD'S MOST  
MYSTERIOUS NUMBER**

**ALFRED S. POSAMENTER**

[美] 阿尔弗雷德·S. 波沙曼提尔

**INSOMAR LEHMANN**

[德] 英格玛·莱曼

著

王瑜 译 王水 校订

世界  
最神秘的数字



吉林出版集团有限责任公司

本书经Prometheus Books授权出版中文简体字版权, 本书版权为本社独家所有, 未经本社同意不得转载、摘编或复制。本书简体中文版权通过凯琳国际文化版权代理引进。

©in this edition Prometheus Books

吉林省版权局著作权合同登记 图字: 07-2010-2633号

## 图书在版编目(CIP)数据

$\pi$ : 世界最神秘的数字 / (美) 波沙曼提尔, (德) 莱曼著; 王瑜译. — 长春: 吉林出版集团有限责任公司, 2011.4

ISBN 978-7-5463-4875-9

I. ① $\pi$ … II. ①波… ②莱… ③王… III. ①圆-普及读物 IV. ①O123.3-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第037605号

## $\pi$ : 世界最神秘的数字

- 
- |      |                                |
|------|--------------------------------|
| 作 者  | [美] 阿尔弗雷德·S.波沙曼提尔<br>[德]英格玛·莱曼 |
| 译 者  | 王 瑜                            |
| 出 品  | 吉林出版集团·北京汉阅传播                  |
| 策划编辑 | 侯娟雅                            |
| 责任编辑 | 宋 春 侯娟雅                        |
| 封面设计 | 未 氓                            |
| 开 本  | 880×1230mm 1/32                |
| 印 张  | 8.5                            |
| 版 次  | 2011年5月第1版                     |
| 印 次  | 2011年5月第1次印刷                   |
- 
- |     |                                                               |
|-----|---------------------------------------------------------------|
| 出 版 | 吉林出版集团有限责任公司                                                  |
| 发 行 | 北京吉版图书有限责任公司                                                  |
| 地 址 | 北京市宣武区椿树园15—18号底商A222<br>邮编: 100052                           |
| 电 话 | 总编办: 010—63109462-1104<br>发行部: 010—63104979                   |
| 网 址 | <a href="http://www.jlpg-bj.com/">http://www.jlpg-bj.com/</a> |
| 印 刷 | 北京同文印刷有限公司                                                    |
- 

ISBN 978-7-5463-4875-9 定价 28.00元

版权所有 侵权必究

## 导 读

我们从上学的时候就开始接触圆周率,在日常生活中,通常都用 3.14 来代表圆周率去进行计算,即使是工程师或物理学家要进行较精密的计算,也只取值至小数点后约 20 位。它是一个常数,代表圆周长和直径的比例。它是一个无理数,即是一个无限不循环小数。我国南北朝时代著名数学家祖冲之得出圆周率的值是介于 3.1415926 和 3.1415927 之间的,他的辉煌成就比欧洲至少早了 1000 年。但是,我们或许不知道这简单的“之间”两个汉字里所包含的无限丰富有趣的数字世界。

$\pi$ ——这个看似其貌不扬的数字——蕴藏着一个神秘的“福地洞天”,让从古至今的数学家都如痴如醉。 $\pi$  是什么? 它真正的值是多少? 真正的价值何在? 数学家们如何确定其值? 它以何种方式得到应用? 古代人们是如何计算它的? ……它那难以言谕的性质,让有史以来的探求者们只能得到更为接近的值。

在这本引介数学中最为趣味盎然的现象而使人倍感愉悦的册子中,两位博士对  $\pi$  从前圣经时代到 21 世纪的历史,以及众多充满灵智的游戏和令人瞠目结舌的努力,都做了回

顾和评述, 试图“重估”它的准确价值。

他们让“ $\pi$ ”的无处不在大放异彩, 只因它总是在你最意料不到的地方乍然迸出, 例如在概率的计算中和圣经的学术研究中。而且, 他们还展示了一些数世纪以来为  $\pi$  痴狂的奇事怪行——包括为  $\pi$  的准确值立法的企图, 甚至一首  $\pi$  的歌——以及日常生活中  $\pi$  的应用情况。

在其许多特性当中, 数学家们将“ $\pi$ ”呼为“超越数”, 这是因为它那稀奇古怪的值不能通过加减乘除或开平方根的混合运算而得出。更为奇异的是, 无论所得  $\pi$  值的数位延伸至何种程度, 这些数字永远都不会自行重复。2002 年, 一位日本教授用一台超级计算机将  $\pi$  值计算到小数点后 1.24 万亿位。然而尽管如此, 在这一巨长的数字链中依然毫不存在周期性重复数字。

这本启迪智慧、“异”象环生以及砥砺数学思维的“坦途”, 会让读者在磨练数学阅读、运算能力的同时, 大笑不止而心驰神往。

编者

2011 年 4 月

## 致 谢

向读者大众描绘  $\pi$  的故事是一件颇使人畏惧的重担。因此在浸淫数学的几十年中,我们耗费了大量时间,去探究并激活这一极具魅力的数字的各种花絮。个中滋味愉悦而充实。尽管如此,用一种方式诉说  $\pi$  的故事,让读者和我们共臻  $\pi$  之妙境,仍是最为棘手的环节;所以,集思广益势在必行。诚挚感谢纽约城市学院的两位同事雅各布·科恩和爱德华·沃尔,他们用他们的敏捷思维通读全稿并做出精彩评论,力求读者能够领悟。琳达·格林斯潘·里根的工作非常有益,她主动敦促我们撰写此书,并站在普通读者的立场来评点原稿。英格玛·莱曼博士(该书作者之一)诚挚感谢克里斯坦·文森特经常帮助他斟酌词句,来更完美地表达他的心中所想。赫尔伯特·A. 霍普特曼博士则向狄安娜·M. 海芙涅辛勤打印后记以及迈尔达·杜伽克所提供的相应数据,表示诚挚的谢意。特殊的谢意致给派吉·迪默,因为她奇迹般的编辑工作和提醒我们在保持该著数学特性的同时,使用当前的英语惯用语,这些使

# 序 言

很显然,书名即已清楚表明这是一本关于  $\pi$  的书,但读者可能想知道:一本仅仅关于一个数字的书,如何写成?通过该书,我们希望能让你确信  $\pi$  不是个普通数字;确切地说,它迥异于常,还会在最出人意料的情况下突然蹦出。你也会发现,这一数字是何其有用地贯穿于整个数学体系。它的美基于自身并一直存在于对它的研究中,考虑到这一点,我们更愿意用一种“读者即朋友”的方式,向你一展  $\pi$  的魅力。

大家可能都记得,在校期间的课程中, $\pi$  取的值或者是 3.14,或者是  $3\frac{1}{7}$ 、 $\frac{22}{7}$ 。就一个学生的学习来说,这比起曾经可能一度使用的  $\pi=3$  这一简易值,它们已经够充分了。但  $\pi$  是什么? 它真正的值是多少? 我们怎样来确定其值? 在古代它怎样被测算? 今天利用最现代的技术怎样做出新发现?  $\pi$  可能得到怎样的施用? 等等,这些问题,在你开始接触该书的章节时,仅仅是我们将要探讨的一些个案。

介绍  $\pi$  的第一步,首先是告诉大家  $\pi$  是什么以及它的大致渊源。像任何纪传体式著作一样(该书也不例外),我们将

告诉大家谁为它命名以及命名的原因所在,并介绍它怎样演变至今。因此,第一章介绍  $\pi$  的本质以及它怎样达到今天的出乎其类。

第二章,我们将带你游历一条  $\pi$  的简明演变之路。它将回溯至四千多年前。为理解  $\pi$  这一概念有多么古老,可以将它与我们的数字系统即小数的数位值进行比较,而它仅仅在西方沿用了 802 年<sup>①</sup>。我们会忆起, $\pi$  的比值作为一个常数这一发现以及确定其值付出过多少艰辛。依此回想,我们还会思索多少像  $\pi$  值一样形形色色的问题,例如《圣经》中曾提及的  $\pi$  值,以及它和概率领域的联系。一旦计算机进入为发现“精准” $\pi$  值而追求的阶段,情况就大为改观了。现在,已不再是发现数学解法的问题,而是怎样使计算机更快、更准确地给我们一个比曾经任何时代都更具准确性的  $\pi$  值。

我们既已回顾了  $\pi$  值的发展史,那么第三章就要提供各种方法来求得该值。我们拣选了一系列应用广泛而又属于不同种类的方法,有的准确,有的具有试验性,有的仅属于完美的猜想。选择这些方法是为了使读者大众不仅能够理解,而且可以独立操作求得  $\pi$  值。还有许多非常复杂的求值方法,但它们超出了该书的范围,因为我们要为普通读者顾及该书的难度系数。

11 所有因  $\pi$  而生的激情持续了许多时代,这使得它毫无疑问地引起一种宗教般的狂热,追随、探寻这一扑朔迷离的数

---

<sup>①</sup> 阿拉伯数字在西欧出现在第一个出版物上,是 1202 年斐波那契的著作《算盘书》。

字。第四章围绕数学家和数学爱好者的行为和发现来展开，他们用古代数学家可能从未梦想过的方法来探索  $\pi$  值及其相关领域。此外，由于计算机的到来，他们发现了一种全新的探索途径，我们将会在这一章亲眼目睹。

作为第四章的引申章节，第五章包含许多以  $\pi$  值和  $\pi$  的概念为焦点的奇特现象，全力展现了诸如此类的一些“奇珍异宝”。在该章中，我们深入探讨了  $\pi$  如何与其他奇特数字以及与一些毫无瓜葛的概念，如连分数相联系。再次重申，比起高校学院数学来，即使使用一些无须过多数学知识的材料，我们也会对此加以限制。所以，读者不仅会因一些  $\pi$  的对应物而兴致盎然，甚至可能会因此激起谱写属于自己的版本的灵感。

第六章致力于  $\pi$  的应用，它始于与圆及其有关而非圆的图形的讨论。鲁洛三角形确实是一个令人着迷的例子，它是关于  $\pi$  怎样解决圆外几何图形的范例。从这里开始，我们就转移到圆的一些应用上来。你将会看到， $\pi$  是怎样的无处不在，经常冷不丁地冒出来。在这一章里，还附有一些有用的解决技巧，它们能够让你从一个完全不同的视角，来看待极常见的情况。这最终或许是很有成效的。

在最后一章，我们将展示一些令人惊异的与  $\pi$  有关的联系。我们所要展示的是关于放置一条环绕地球的绳索的情况，而这一情况必然挑战人类的直觉力和洞察力。尽管该章相对较短，但它无疑让人惊叹不已。

我们的目的在于让读者大众意识到，大量有关  $\pi$  的话题赋予数学无尽的美。我们还提供了一份有关这一奇特数字



# 目 录

|                        |    |
|------------------------|----|
| 致谢 .....               | 1  |
| 序言 .....               | 3  |
| 第一章 $\pi$ 的本质          |    |
| $\pi$ 的初体验 .....       | 1  |
| $\pi$ 的面面观 .....       | 2  |
| $\pi$ 的符号性 .....       | 3  |
| $\pi$ 的再回首 .....       | 4  |
| 圆的面积公式 .....           | 5  |
| 正方形与圆形 .....           | 7  |
| $\pi$ 值 .....          | 7  |
| $\pi$ 的特性 .....        | 10 |
| $\pi$ 值的演变 .....       | 11 |
| $\pi$ 的直觉穿透力 .....     | 13 |
| 《圣经》中的 $\pi$ 值 .....   | 14 |
| $\pi$ 作为数学符号从何而来 ..... | 16 |
| 欧拉 .....               | 17 |
| 一个 $\pi$ 的悖论 .....     | 21 |
| 为 $\pi$ 立法 .....       | 23 |
| 概率中的 $\pi$ .....       | 25 |
| 第二章 $\pi$ 的历史          |    |
| 文明开端时期 .....           | 27 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 古埃及时代 .....                        | 28  |
| 公元纪年之前 .....                       | 30  |
| 阿基米德的贡献 .....                      | 37  |
| 纪元开端时期 .....                       | 44  |
| 中国人的贡献 .....                       | 46  |
| 文艺复兴的开端 .....                      | 47  |
| 16 世纪 .....                        | 48  |
| 17 世纪 .....                        | 49  |
| 18 世纪——当 $\pi$ 名副其实 .....          | 53  |
| 渐近 19 世纪 .....                     | 55  |
| 进入 20 世纪 .....                     | 57  |
| 计算机进入 $\pi$ 的视野 .....              | 58  |
| <b>第三章 计算 <math>\pi</math> 值</b>   |     |
| 阿基米德求 $\pi$ 值法 .....               | 65  |
| 库萨努斯的反阿基米德法 .....                  | 77  |
| 数正方形计算 $\pi$ 值 .....               | 85  |
| 数方格顶点求 $\pi$ 值 .....               | 87  |
| 利用物理特性求 $\pi$ 值 .....              | 89  |
| 蒙特—卡罗法确定 $\pi$ 值 .....             | 90  |
| 从一个数字级数计算 $\pi$ 值 .....            | 93  |
| 一个更好的求 $\pi$ 级数 .....              | 95  |
| 求 $\pi$ 值的天才方法 .....               | 97  |
| <b>第四章 <math>\pi</math> 的热情追求者</b> |     |
| $\pi$ 的普遍化 .....                   | 103 |
| $\pi$ 的助记词句 .....                  | 107 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| $\pi$ 的各数字的更多迷人之处 .....           | 116 |
| 一个视觉图例 .....                      | 121 |
| 一首 $\pi$ 的歌曲 .....                | 122 |
| <b>第五章 <math>\pi</math> 的奇特之处</b> |     |
| $\pi$ 的数字奇特性 .....                | 127 |
| $\pi$ 用于概率 .....                  | 129 |
| 用 $\pi$ 测量河流长度 .....              | 129 |
| 难以置信的 $\pi$ 之巧合 .....             | 131 |
| 连分数与 $\pi$ .....                  | 135 |
| <b>第六章 <math>\pi</math> 的应用</b>   |     |
| $\pi$ 在不经意间 .....                 | 147 |
| 体育运动中的 $\pi$ .....                | 159 |
| 半圆所成的螺旋形 .....                    | 161 |
| 奇异的七圆共置 .....                     | 163 |
| 一个“蘑菇”形 .....                     | 166 |
| 一个“德尔斐”形 .....                    | 174 |
| 阴阳太极 .....                        | 176 |
| 三人均分比萨时应用 $\pi$ .....             | 182 |
| 传统等分 .....                        | 183 |
| 同心圆分法 .....                       | 184 |
| 精致等分(运用泪滴状图) .....                | 185 |
| 平行线等分 .....                       | 187 |
| 恒定的环 .....                        | 189 |
| 恒定的环的延伸 .....                     | 191 |
| 丢失的圆面积 .....                      | 193 |

|                                 |         |
|---------------------------------|---------|
| 不同寻常的几种圆的关系 .....               | 195     |
| $\pi$ 和虚数单位 $i$ .....           | 199     |
| <b>第七章 <math>\pi</math> 的悖论</b> |         |
| 滚动的圆柱体—— $\pi$ 的旋转 .....        | 202     |
| 同心圆中的一个常量 .....                 | 204     |
| 绕赤道的绳 .....                     | 206     |
| 另一个惊喜 .....                     | 223     |
| <br>后记 .....                    | <br>227 |
| 编后记 赫尔伯特·A. 霍普特曼博士 .....        | 229     |
| 附录 A 测量一个圆的直线性方程的三维示例 .....     | 243     |
| 附录 B 拉马努金的研究 .....              | 247     |
| 附录 C 证明 $e^\pi > \pi^e$ .....   | 249     |
| 附录 D 一根绕正多边形的绳子 .....           | 253     |
| 参考文献 .....                      | 257     |

# 第一章 $\pi$ 的本质

## $\pi$ 的初体验

这是一本关于我们称其为“ $\pi$ ”的神秘数字的书。大多数人忆及  $\pi$ ，都想起它在学校的数学课上经常被提到。而当问起在求学期间所学到的数学知识时，最初在脑海中浮现的印象之一，便是和  $\pi$  有关的东西。通常我们会记得含  $\pi$  的最普遍的公式，例如  $2\pi r$  或者  $\pi r^2$ 。（直到今天，仍有成年人喜欢复述对  $\pi r^2$  的傻傻的反驳：“不，‘派’是圆的。”<sup>①</sup>）但我们是否记得，这些公式的含义是什么或被称做  $\pi$  的是什么？一般不会记得吧。接着要问的是，为什么要写一本关于  $\pi$  的书？这只是因为由  $\pi$  而起的概念近乎形成一种宗教狂热般的追随。已有其他几部关于  $\pi$  的书一直处于写作之中；网站上报道着有关  $\pi$  的“奇观”；俱乐部则热衷于讨论  $\pi$  的特性；甚至日历中也留出一日来为它庆祝，就是 3 月 14 日，它正好与阿尔伯特·爱因斯坦的出生日期相吻合（在 1879 年）。或许你想知道 3 月 14 日是怎样被选为  $\pi$  日的，而对于那些记得在校期

14

---

① “派”指一种果酱饼， $\pi r^2$  的发音与“派是方的”发音相同。——译注

间常用的  $\pi$  值是 3.14 的人来说,答案则毋庸置疑<sup>①</sup>。

毫不为奇的是, $\pi$  只是希腊字母表中的一个。尽管它作为希腊字母表中的一个特定字母而毫无特殊之处,然而选择它代表一个比值的原因,我们随之将进行探讨,因该比值涵纳着引人入胜的所有故事情节。一代代的数学家为之困惑不已,他们一直试图为之定义,确定其值,并解释它有时令人惊骇地出现在许多相关领域的现象。像  $\pi$  这样无所不在的数字,让数学成为倍增乐趣和魅力的学科,很多人都对此深信不疑。让  $\pi$  成为你的“老熟人”,进而体验这种乐趣与魅力,这就是我们的宗旨所在。

## $\pi$ 的面面观

15 我们的目的不是去求解众多的复杂方程,破解大量的“疑难杂症”,也不是试图强解那些无法解释的事。毋庸置疑,我们的确是在探究这一声名卓著的数字即  $\pi$  的美甚至是它的戏剧性,并“秀”出这一原因:即为什么数世纪以来,它都能够赋予数学家和数学爱好者以灵感,去更深入地追索以及钻研相关概念。我们将会看到  $\pi$  是如何扮演着出人意料的角色,经常出没于最令人意想不到的地方,并提出一些永无终结的难题,去为难那些计算机专业人士,而他们一直都在寻求小数点后更为精确的近似  $\pi$  值。求取更为精确的  $\pi$  值乍一看似乎毫无意义,但是请读者自己,对曾使数代  $\pi$  的热

---

<sup>①</sup> 在美国,该日写做 3/14。

情爱好者斗志昂扬的挑战,持一种宽容、开放的心态吧。

本书的主旨是了解  $\pi$  的概况及其最具魅力的一些方面。因此我们应开宗明义地通过对  $\pi$  下定义,开始讨论和研究。尽管对一些人来说, $\pi$  只是在计算器按键上摁一下,随之在屏幕上显示一系列特定数字,除此之外什么都不是;但对另一些人来说,这一数字充满无法想象的乐趣。根据计算器显示屏的规格大小, $\pi$  将如下显示:

3.1415927,

3.141592654,

3.14159265359,

3.1415926535897932384626433832795,甚至更长。

摁键并不能告诉我们  $\pi$  的真相,我们只有一种滑熟的方法得到  $\pi$  的小数值,可能这也是所有学生都需要知道的: $\pi$  代表着一个知道比不知道要好的特殊数字。虽然如此,由于眼光只局限于  $\pi$  在一些特殊公式中的应用,以及通过摁计算器自动得到的  $\pi$  值,学生们在这里可能会犯一个弥天大错,即本末倒置,忽视了主题的重要性。

## $\pi$ 的符号性

符号  $\pi$  代表着希腊字母表中的第 16 个字母,然而它的声名鹊起是由于它的数学指代性。在希伯来和希腊出土文物上的语言文字里,从未出现数字系统符号。所以,各自字母表中的字母就充当了数字符号。由于希腊字母表中只有 24 位,因此要代表 27 个数字,他们还使用了源于闪族语的三

个字母,实即 F[digamma](代表 6)、Q[qoph](代表 90)、 $\aleph$  [san](代表 900)。

进入公元前 5 世纪前叶,希腊人随后已使用下表中的这些符号代表数字<sup>①</sup>:

|            |           |            |            |                          |        |            |           |            |
|------------|-----------|------------|------------|--------------------------|--------|------------|-----------|------------|
| $\alpha$   | $\beta$   | $\gamma$   | $\delta$   | $\epsilon(, \epsilon)$   | F      | $\zeta$    | $\eta$    | $\theta$   |
| 1          | 2         | 3          | 4          | 5                        | 6      | 7          | 8         | 9          |
| $\iota$    | $\kappa$  | $\lambda$  | $\mu$      | $\nu$                    | $\xi$  | $\omicron$ | $\pi$     | $\varphi$  |
| 10         | 20        | 30         | 40         | 50                       | 60     | 70         | <b>80</b> | 90         |
| $\rho$     | $\sigma$  | $\tau$     | $\upsilon$ | $\phi$                   | $\chi$ | $\psi$     | $\omega$  | $\aleph$   |
| 100        | 200       | 300        | 400        | 500                      | 600    | 700        | 800       | 900        |
| , $\alpha$ | , $\beta$ | , $\gamma$ | , $\delta$ | , $\epsilon(, \epsilon)$ | , F    | , $\zeta$  | , $\eta$  | , $\theta$ |
| 1,000      | 2,000     | 3,000      | 4,000      | 5,000                    | 6,000  | 7,000      | 8,000     | 9,000      |

所以,在古希腊文本中, $\pi$  用来代表数字 80。无独有偶,希伯来字母 D(pe)也代表同一数值。

## $\pi$ 的再回首

或许只是巧合,或许是因一些松散团体的传播, $\pi$  这一字母随后被数学家选中,来代表一个有关圆的重要常数。切记,圆是最重要的平面对称几何图形,并能够追溯到史前时代。

17 确切地说,是选择  $\pi$  表示圆的周长与其直径的比值。<sup>②</sup> 它可以

用符号表示为  $\pi = \frac{C}{d}$ ,在该式中  $C$  代表圆周的长度, $d$  代表圆的

① 符号左侧的逗号表明它代表千位数。万位数是在该数字符号下加一个 M。该数表来自于乔治·伊夫拉,《数字简史》,(纽约:校园出版社,1986),289 页。

② 一个纯粹主义者或许会问:我们怎么知道该比值对所有的圆来说都一样呢?我们将使这一恒定性即刻显现。



直径的长度。圆的直径是它的半径的 2 倍,即 $d=2r$ , $r$ 代表圆的半径。如果我们用  $2r$  来替换  $d$ ,则可得  $\pi=\frac{C}{2r}$ ,该式又可以导出著名的圆的周长公式: $C=2\pi r$ ,等同于  $C=\pi d$ 。

另一个含  $\pi$  的耳熟能详的公式是圆的面积公式即  $\pi r^2$ 。该公式的得出比起圆的周长公式来说,要复杂得多,因为它直接是  $\pi$  的定义的结果。

## 圆的面积公式

让我们来共同思考通过半径  $r$  求得圆面积公式( $A=\pi r^2$ )的一个相对简单的“推理”吧。先在一个纸板上画一个大小合适的圆,再将圆周( $360^\circ$ )分成 16 段相等的弧。可以用线隔出连续的  $22.5^\circ$  的弧,也可以将圆先二等分,再四等分,再将四等分的每一个二等分这样连续分割,等等。

18

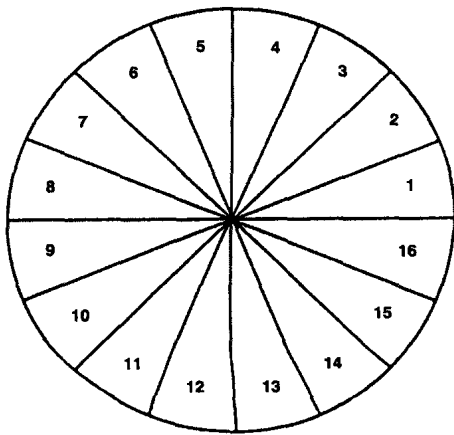


图 1-1