现代数学基础丛书 140

代数模型论引论

史念东 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书 140

代数模型论引论

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是代数模型论的一本入门书. 第一章介绍代数模型论所需要的模型论的基础知识. 第二章至第九章分别介绍代数模型论各主要领域在近二三十年来国外的主要研究成果和研究方法, 其中包括代数闭域、实闭域、线性序和偏序结构的模型论等. 最后一章介绍可计算模型论. 本书起点较低, 具备数学系二、三年级知识的读者即可阅读, 并具自完备性, 以方便阅读. 本书终点较高, 可引导具有数理逻辑基础知识的读者进入国际上的研究前沿. 各章末均附有习题, 以助读者深入理解本书内容.

本书可供高等院校数学、逻辑、哲学以及计算机科学等专业高年级本科生、研究生、教师和相关的科学研究工作者参考, 也可作为相关专业研究生的教科书.

图书在版编目(CIP)数据

代数模型论引论/史念东著. —北京: 科学出版社, 2011
(现代数学基础丛书; 140)
ISBN 978-7-03-032408-5
Ⅰ.①代… Ⅱ.①史… Ⅲ.①模型论 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 193303 号

责任编辑: 赵彦超 吕 虹 / 责任校对: 何艳萍
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 10 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2011 年 10 月第一次印刷 印张: 11
印数: 1—2 000 字数: 207 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

本书供学习和研究数理逻辑之用. 数理逻辑与代数、几何等一样, 是数学的一个分支, 它的全名应该是数学理论逻辑. 而通常认为数理逻辑包括四大论: 集合论、模型论、可计算性理论 (过去称作递归论) 和证明论. 本书是关于模型论的一本书.

自从稳定性理论出现以后, 模型论发展到所谓近代模型论的时代 (就像优先方法运用于可计算性理论, 力迫法运用于集合论使它们进入近代数理逻辑一样). 而在近代模型论的发展中, 主要是在美国, 又形成了所谓东海岸学派 (East Coast School) 和西海岸学派 (West Coast School). 前者以耶鲁大学 Robinson, Macintyre 等为代表, 将模型论的理论运用到具体的各个数学领域, 尤其是代数、代数几何等, 有针对性和特殊性地进行模型论的研究, 有人称之为代数模型论或数学结构模型论. 而后者以加州大学伯克利分校、康乃尔大学、威斯康辛大学麦迪森分校为代表, 主要的数理逻辑学家有 Lachlan, Shelah, Morley 等. 他们研究模型论的基本理论, 考察所有模型和它们的理论的共有特征, 所以有人称之为抽象模型论. 20 世纪 90 年代开始, 有些模型论学家试图将两者结合起来研究, 其中代表性的人物是 Hrushovski 和 Pillay 等, 并有很好的结果. 比如 Hrushovski 就用模型论函数域的方法给出了多年前代数学家提出的 Mordell-Lang 猜想的一般性证明.

作者于 20 世纪 80 年代在美国伊利诺伊大学芝加哥分校学习, 期间 Marker 教授 (Macintyre 的学生) 系统地讲授了代数模型论的各个领域. 作者的指导教授 Baldwin(Lachlan 的学生) 在抽象模型论以及稳定性理论方面多有建树, 他系统地讲授了他的专著 *Fundamentals of Stability Theory*. 因此作者有幸对这两个学派的工作均有所了解.

作者在学成之后, 任教于美国宾州一所州立大学, 在教学之余继续从事数理逻辑模型论的研究工作, 因此也基本了解模型论近年来主要的新进展. 自 1999 年开始, 作者利用暑假时间, 回国在北京师范大学、南京大学等校讲学, 后任北京师范大学数学系兼职教授. 前几年主要讲授模型论稳定性和单纯性理论, 即所谓抽象模型论. 讲稿后经整理成书, 于 2004 年由科学出版社出版, 名为《稳定性和单纯性理

论》. 从 2002 年开始, 作者主要讲授的内容是代数模型论近年来的新发展和新成果. 本书是根据这些讲稿整理而成, 其中也包括了作者和国内数理逻辑工作者在这方面的某些研究成果. 对代数模型论有兴趣的读者可以将本书作为一本入门书.

本书第一章罗列了其他各章所需的模型论的基本知识, 包括稳定性理论的初步知识, 是专为对这一方面不太熟悉的的读者预备的. 如果已经有了这一方面的知识, 可以略去. 本书以下各章分别讲述各个代数结构的模型论, 它们既具有相对的独立性, 也有一定的联系. 读者并不一定要读完前面的章节才能读后面的内容.

作者在将讲稿整理补充成书的过程中, 得到了北京师范大学沈复兴教授的热情鼓励, 在此深表谢意. 中国科学院科学出版基金对本书出版提供了资助, 科学出版社的责任编辑为本书作了大量的编辑和修改工作. 此外, 对于杨攸君女士对作者的鼓励和理解, 并在工作之余为本书打印了全部手稿, 也在此致谢.

北京师范大学沈复兴教授、陈磊教授以及数理逻辑专业的研究生傅莺莺、徐士永、随建宝、莫单玉、赵国兴、贾清健、王慎玲, 在他们的讨论班中对初稿进行了研讨并提出了宝贵的意见, 在此一并致谢.

本书各章节多由有关专著及近期发表在有关刊物上的研究论文压缩而成, 在材料的取舍、内容的精简方面, 限于作者的水平, 难免失当, 敬请专家和读者不吝指出, 当感谢不尽.

史 念 东
美国宾州州立东斯特拉斯堡大学
(E. Stroudsburg University of Pennsylvania)
2010 年 7 月

目　录

第一章　模型论的预备知识

数理逻辑是现代数学的一个分支, 它是用形式逻辑的思想方法来研究数学中的推理等逻辑问题, 同时也是用数学的符号、公式和形式来研究形式逻辑, 所以也称作符号逻辑. 由于数学推理的严格和表达方式的明确, 因此数理逻辑在近代有了很大的发展. 数理逻辑包含了很多分支, 主要的分支可以称作四大论, 即模型论、证明论、集合论和递归论 (又称可计算理论).

在 20 世纪 60 年代和 70 年代, 数理逻辑有几个比较关键性的发展. 在集合论, Cohen (1934~2007) 于 1963 年成功地证明了连续统假设和集合论的 Zermalo-Frankel 公理系统 (ZFC 公理系统) 是独立的. 在递归论, Sacks 和他的学生们创立了所谓优先方法 (priority method), 从而获得了一大批的结果. 而在模型论, Shelah 等引入了稳定性理论. 以后强极小和序极小概念也被相继引出. 模型论的发展大致可以分为两个方向. 一个是所谓抽象模型论, 人们只专注于研究数学模型和它们的理论的共有的逻辑性质和特征, 比如满足什么条件的理论是稳定的理论、超稳定的理论、ω-稳定的理论, 以及理论的范畴性与理论的可数模型之间的关系等等.

另一个方向是所谓代数模型论. 它将模型论的一般理论应用到多个具体的数学结构中, 比如群、实闭域、代数闭域等等, 从而得出各个不同的代数模型及其理论所特有的性质. 例如代数闭域的理论是强极小的, 实闭域的理论是序极小的, 等等.

在这一章中我们介绍一般模型论的基本知识, 为以后各章做好预备.

§1.1　数学结构及其理论

在数理逻辑中, 数学结构又称作数学模型, 或简称模型. 比如有限群、实数域、代数闭域, 或者一个无穷图, 等等. 严格来说, 一个模型就是一个非空集合连同定义在这个集合上的关系和函数, 有时还包括常数. 而这些关系, 函数和常数就是某一个形式语言 $\mathcal{L}$ 中的关系符、函数符和常数符在这个模型中的解释. 这样一个模型 $\mathcal{M}$ 就可以表示为

$$\mathcal{M} = \langle M; R_1^M, R_2^M, \cdots, f_1^M, f_2^M, \cdots, c_1^M, c_2^M, \cdots \rangle,$$

这里 M 是一个非空集合, 称作 $\mathcal{M}$ 的域或论域, R_i^M 和 f_i^M 分别是定义在 M 上的关系和函数, 而 c_i^M 是 $\mathcal{M}$ 中的常数项. 模型 $\mathcal{M}$ 的语言 $\mathcal{L} = \langle R_1, R_2, \cdots, f_1, f_2, \cdots, c_1, c_2, \cdots \rangle$. 不过要注意语言中的 R_i, f_i 和 c_i 分别是关系符、函数符和常数符, 而 $\mathcal{M}$ 中的 R_i^M, f_i^M 和 c_i^M 是这些关系符、函数符和常数符在 $\mathcal{M}$ 中的解释. 在不致引起混淆的情况下, 常常略去 R_i^M, f_i^M 和 c_i^M 的上标 M. 有时我们也会将语言 $\mathcal{L}$ 扩充, 比如对应于某集合 $A \subseteq M$ 的每一个元素 a, 在语言 $\mathcal{L}$ 中增加一个相应的常数符 c_a, 这样语言就扩充到 $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$.

有时, 也会简单地称 $\mathcal{M}$ 是一个模型. 模型 $\mathcal{M}$ 的理论是指在 $\mathcal{M}$ 中为真的 $\mathcal{L}$-语句 (它由 $\mathcal{L}$ 中的关系、函数和常数组成) 的集合. 如果这个模型 $\mathcal{M}$ 的理论 T 包含了所有在 $\mathcal{M}$ 成真的 $\mathcal{L}$-语句, 就记作 $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, 称作完全理论.

一个群就是一个数学模型, 可以记作

$$\mathcal{G} = \langle G, \oplus, 0 \rangle,$$

这里 G 是这个群的域, $\oplus$ 是定义在 G 上的一个二元函数, 0 是关于这个函数的恒等元. 每一个群都满足下面的公理:

G_1 $\forall x(x \oplus 0 = 0 \oplus x = x)$.

G_2 $\forall x \exists y(x \oplus y = y \oplus x = 0)$.

G_3 $\forall x \forall y \forall z(x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z)$.

群的理论 T 就是可以从这些公理中推导出来的语句的集合, 亦即这些公理的逻辑后承 (logic consequence) 的集合.

如果 $\mathcal{L}$-公式 φ 是公理 G_3 的逻辑后承, 就记作 $\mathrm{G}_3 \vdash \varphi$, 或者 $T \vdash \varphi$. 这时也说 φ 可从 T 推出.

又如稠密无终点线性序的理论, 常记作 DLO, 即为下面的公理以及它们的后承的集合 ($\mathrm{DLO}_1 \sim \mathrm{DLO}_3$ 为线性序公理):

DLO_1 $\forall x(x \not< x)$.

DLO_2 $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$.

DLO_3 $\forall x\forall y\forall z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$.

DLO_4 $\forall x\forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z < y))$.

DLO_5 $\forall x\exists y\exists z(y < x < z)$.

显然, 有理数集连同通常意义下的二元关系小于 "$<$" 组成的数学结构 $(\mathbb{Q}, <)$ 就是这个理论的一个可数模型, 因为它可满足以上所有的公理, 所以也满足这些公理的后承. 我们用 $(\mathbb{Q}, <) \vDash \mathrm{DLO}$ 来表示 $(\mathbb{Q}, <)$ 是理论 DLO 的一个模型. 它也是一个可数模型. 另外, 实数集加上小于 "$<$", 即 $(\mathbb{R}, <)$ 也是 DLO 的一个模型, 不过它是 DLO 的一个不可数模型.

下面我们给出更多的理论和模型的例子.

1. 图. 图的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$, 这里 R 是一个二元关系. $R(x, y)$ 在一个图中解释为有一边连接顶点 x 和顶点 y. 如果我们将图限制为不包含 "圈" 的图, 即没有从顶点到自身的边. 那么图的理论包含以下公理:

$$\forall x \neg R(x, x),$$
$$\forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)).$$

第一条公理表示图中不存在圈, 即不满足自反性. 第二条公理是说如有一边从顶点 x 到顶点 y, 那也就有一边从 y 到 x, 即满足所谓的对称性, 亦即这里图是指双向图. 图的理论的模型就是一个图 $\mathcal{G} = (V, R)$, 这里 V 是顶点集, R 是定义在 V 上的二元关系 "边".

2. 线性序 Abel 群. 它的语言 $\mathcal{L} = \{+, <, 0\}$, 这里 "$+$" 是二元函数符, "$<$" 是二元关系符, "0" 是常数符. 线性序 Abel 群的理论的公理是

A Abel 群的公理 (即群的公理加上可交换公理 $\forall x\forall y(x + y = y + x)$).

B 线性序的公理.

C $\forall x\forall y\forall z(x < y \rightarrow x + z < y + z)$.

整数集就是这个理论的一个模型. 在这个模型里, 二元函数符 $+$ 解释为通常的加法, 二元关系符 "$<$" 解释为整数集上通常的序关系, 而常数符 0 解释为整数 0, 它是这个线性序 Abel 群的恒等元.

3. 域. 它的语言 $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$. 它的公理是 Abel 群的公理加上以下几条:

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z),$$

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z),$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z),$$

$$\forall x (x \cdot 1 = 1 \cdot x = x),$$

$$\forall x \exists y (x = 0 \vee x \cdot y = 1).$$

4. 微分域. 它的语言 $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, D\}$. 它的公理是域的公理加上有关一元函数 D 的公理:

$$\forall x \forall y (D(x + y) = D(x) + D(y)),$$

$$\forall x \forall y (D(x \cdot y) = x \cdot D(y) + y \cdot D(x)).$$

以上这些例子是数学中几个常见的理论. 其中有一些在以下的章节中要较详细地研究, 也会引出更多的理论的例子.

这里要介绍与理论有关的一个符号. 前面说过, 一个理论 T 就是由它的公理及其后承组成的语句集. 而其中由全称量词 $\forall$ 开始的语句称为全称语句. 所有全称语句的集合记作 $T_\forall$. 可以证明, $T_\forall$ 的模型是 T 的一个模型的子模型.

如果一个数学模型 $\mathcal{M}$ 是理论 T 的模型, 记作 $\mathcal{M} \vDash T$. 显然, 如果 θ 是 T 的公理, 则 $\mathcal{M} \vDash \theta$. 如果公式 φ 在 T 的某个模型中成真, 则记作 $T \vDash \varphi$.

下面我们要给出一个重要的定理, 但略去它的证明. 它可以在任何一本模型论教材中找到.

定理 1.1.1 (Gödel 完全性定理)　设 T 是一个 $\mathcal{L}$-理论, φ 是一个 $\mathcal{L}$-语句, 则 T 可推出 $\varphi(T \vdash \varphi)$ 当且仅当 φ 在 T 的某个模型中成真 $(T \vDash \varphi)$).

§1.2　素模型和初等子模型

在前一节介绍了理论和模型的定义和例子. 在本节中要引入几个关于模型的重要概念.

定义 1.2.1　设语言 $\mathcal{L} = \{R_i : i \in \omega; f_j : j \in \omega; c_k : k \in \omega\}$, 这里 R_i 是关系符, f_j 是函数符, c_k 是常数符. 又设 $\mathcal{M}$ 是语言 $\mathcal{L}$ 中的一个模型, 即 $\mathcal{M} = \langle M, R_i^M; f_j^M; c_k^M : i, j, k = 1, 2, \cdots \rangle$. 类似地, $\mathcal{N} = \langle N, R_i^N, f_j^N, c_k^N : i, j, k = 1, 2, \cdots \rangle$

也是语言 $\mathcal{L}$ 中的一个模型. 如果 $N \subseteq M$, $R_i^N = R_i^M \cap N$, $f_j^N = f_j^M \upharpoonright N$, $c_k^N = c_k^M \cap N$, 则称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的子模型 (submodel), 亦称模型 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的膨胀 (extension).

定义 1.2.2 如果模型 $\mathcal{N}$ 是模型 $\mathcal{M}$ 的子模型, 并且对于它们语言 $\mathcal{L}$ 中的任意公式 $\varphi(\bar{x})$, 以及任意的 $\bar{a} \in N$, 有 $\mathcal{N} \vDash \varphi(\bar{a})$ 当且仅当 $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a})$, 则称 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}$ 的初等子模型 (elementary submodel), 亦称 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的初等膨胀 (elementary extension). 上述模型 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 的关系记作 $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$.

定义 1.2.3 假如 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是语言为 $\mathcal{L}$ 的两个模型, $N \subseteq M$. 而 f 是由 N 到 M 内的一个映射. 而且, 对于 $\mathcal{L}$ 的任意公式 $\varphi(\bar{x})$ 和 $\bar{a} \in N$, 都有 $\mathcal{N} \vDash \varphi(\bar{a})$ 当且仅当 $\mathcal{M} \vDash \varphi(f(\bar{a}))$, 则称 f 是一个初等映射 (elementary mapping), 或初等嵌入 (elementary embedding), 并称 $\mathcal{N}$ 可通过 f 初等嵌入到 $\mathcal{M}$.

容易看出, 如果 $f: N \to M$ 是一个初等嵌入, 则 f 的像 $f(N)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个初等子模型.

前面提到 $(\mathbb{Q}, <)$ 和 $(\mathbb{R}, <)$ 都是线性无端点稠密序的两个模型, $(\mathbb{Q}, <)$ 是 $(\mathbb{R}, <)$ 的子模型. 而且, $(\mathbb{Q}, <)$ 还是 $(\mathbb{R}, <)$ 的初等子模型, $(\mathbb{Q}, <)$ 可初等嵌入到 $(\mathbb{R}, <)$.

定义 1.2.4 如果 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是语言为 $\mathcal{L}$ 的两个模型. 对于任意 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(\bar{x})$, 存在 $\bar{a} \in M$, 满足 $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a})$ 当且仅当存在 $\bar{b} \in N$ 满足 $\mathcal{N} \vDash \varphi(\bar{b})$, 则称模型 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是初等等价的, 并记作 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. 显然, 如果 $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$, 且 $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$, 则 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

又如果 $f: N \to M$ 是一个初等嵌入, 则 N 和它在 f 下的像 $f(N)$ 是初等等价的, 亦即 $\mathcal{N} \equiv f(\mathcal{N})$.

定义 1.2.5 假定 $\mathcal{A}$ 是语言为 $\mathcal{L}$ 的一个模型, 并且 $\mathcal{A}$ 可初等嵌入到理论 $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ 的一切模型中, 则称 $\mathcal{A}$ 是理论 T 的素模型 (prime model).

可以证明, 如果模型 $\mathcal{A}$ 可初等嵌入到 $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ 的一切可数模型中, 则 $\mathcal{A}$ 就是它的素模型.

前面提到模型 $(\mathbb{Q}, <)$ 的完全理论 $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$, 就是无端点稠密线性序的理论. $(\mathbb{Q}, <)$ 即是 T 是素模型, 因为它可初等嵌入到 T 的一切模型中.

从某种意义上说, 素模型就是它的完全理论的 “最小” 的模型. 而相对于它的,

就是所谓 "最大" 的模型.

设 $\mathcal{M}$ 是语言为 $\mathcal{L}$ 的一个可数模型, $A \subseteq M$. 如果将语言 $\mathcal{L}$ 膨胀到 $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$, 那么 $\mathcal{M}^A = (\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ 就是 $\mathcal{M}$ 的一个膨胀 (expansion, extension).

定义 1.2.6 如果 $\mathcal{M}$ 是可数模型, 且对于任意有限的 $A \subseteq M$, $\mathrm{Th}(\mathcal{M}^A)$ 的每一个公式集 $\Gamma(\bar{x}, \bar{a})$ 均可在 $\mathcal{M}^A$ 中实现 (realize), 亦即存在 $\bar{c} \in M$, 使得 $\mathcal{M}^A \models \Gamma(\bar{c}, \bar{a})$, 则称 $\mathcal{M}$ 是可数饱和模型, 或 ω-饱和模型 (ω-saturated model). $(\mathbb{Q}, <)$ 就是一个 ω-饱和模型. 对于无穷不可数基数 κ, 也可以类似地定义 κ-饱和模型.

下面的定理对以后有用. 我们只列出结果而略去证明.

定理 1.2.7 假定 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个子模型, $\bar{a} \in M$, $\varphi(\bar{x})$ 是无量词公式, 那么 $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$.

§1.3 模型的同构和 Morley 范畴性定理

在本节中我们要讨论两个模型的同构问题. 先给出以下定义.

定义 1.3.1 假如 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是语言 $\mathcal{L}$ 上的两个模型, 如果存在从 A 到 B 上的一一在上的函数 f(双射) 满足以下条件, 则称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 同构:

1) 对于一切 $\mathcal{A}$ 的 n 元关系 R 和 $\mathcal{B}$ 中相应的关系 R', 以及一切 A 中的 $x_1, \cdots, x_n$, 有 $R(x_1, \cdots, x_n)$ 当且仅当 $R'(f(x_1), \cdots, f(x_n))$;

2) 对于一切 $\mathcal{A}$ 中的 n 元函数 g 以及 $\mathcal{B}$ 中相应的函数 g', 以及一切 A 中的 $x_1, \cdots, x_n$, 有 $f(g(x_1, \cdots, x_n)) = g'(f(x_1), \cdots, f(x_n))$;

3) 对于一切 A 中的元素 x 和 B 中相应的元素 x', 有 $f(x) = x'$.

注意: 1. 如果两个模型 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是同构的, 则 A 和 B 的基数必定是相同的.

2. 如果模型 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是同构的, 则它们也是初等等价的. 其逆并不成立. 不过如果 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 都是有穷模型, 则这两个概念是等价的.

定义 1.3.2 如果 $\mathcal{L}$-理论 T 的任意两个基数为 κ 的模型都是同构的, 则称理论 T 是 κ-范畴的 (κ-categorical) 或者 T 范畴于 κ. 换言之, 一个理论 T 如果是 κ-范畴的, 那么在同构的意义上 T 只有一个基数为 κ 的模型.

下面我们给出一个 $\aleph_0$-范畴的理论的例子.

定理 1.3.3 无终端稠密线性序的理论 DLO 是 $\aleph_0$-范畴的.

证明 假定 $(M,<)$ 和 $(N,<)$ 是两个可数稠密无终端线性序, 我们要用 "向前返后" 构造法递归地在这两个模型间建立一个同构映射 f. 假设 $M=\{a_1,a_2,\cdots\}$, $N=\{b_1,b_2,\cdots\}$.

第 0 步. 设 $M_0=N_0=f_0=\varnothing$.

第 $m=2n+1$ 步. 假定 $M_{m-1}\subset M$, $N_{m-1}\subset N$ 和部分同构 $f_{m-1}:M_{m-1}\to N_{m-1}$ 已经建成. 取在 $M-M_{m-1}$ 中的元素 a_m. 我们需要在 $N-N_{m-1}$ 中找出元素 b 并定义

$$f_m=f_{m-1}\cup\{(a_m,b)\}.$$

可能有以下三种情形:

情形 1. a_m 大于 M_{m-1} 中的一切元素. 在这种情况, 由于 N 无终端, 且 $\mathcal{N}\models \mathrm{DLO}$, 故可取 $b\in N-N_{m-1}$ 满足 b 大于 N_{m-1} 中的一切元素. 定义 $M_m=M_{m-1}\cup\{a_m\}$, $N_m=N_{m-1}\cup\{b\}$, $f_m=f_{m-1}\cup\{(a_m,b)\}$.

情形 2. a_m 小于 M_{m-1} 中的一切元素. 因同样理由, 可取 $b\in N-N_{m-1}$ 满足 b 小于 N_{m-1} 中的一切元素. 定义 $M_m=M_{m-1}\cup\{a_m\}$, $N_m=N_{m-1}\cup\{b\}$, $f_m=f_{m-1}\cup\{(a_m,b)\}$.

情形 3. 存在 $\alpha,\beta\in M_{m-1}$, 满足 $\alpha<a_m<\beta$, 而且在 M_{m-1} 中不存在 γ 满足 $\alpha<\gamma<a_m$, 或者满足 $a_m<\gamma<\beta$. 因为 N 是稠密的, 所以可在 $f_{m-1}(\alpha)$ 和 $f_{m-1}(\beta)$ 之间取 b, 即 $f_{m-1}(\alpha)<b<f_{m-1}(\beta)$. 定义 $M_m=M_{m-1}\cup\{a_m\}$,$N_m=N_{m-1}\cup\{b\}$, 以及 $f_m=f_{m-1}\cup\{(a_m,b)\}$.

第 $m=2n+2$ 步. 类似地重复以上过程, 不过这次是构造 N_m, M_m 和建立从 N_m 到 M_m 的部分同构 f_m^{-1}.

最后定义 $M=\cup M_i$, $N=\cup N_i$, $f=\cup f_i$, 这就构造了在 M 和 N 间的一个同构. 所以 DLO 是 $\aleph_0$-范畴的理论.

下面的理论均范畴于 $\aleph_1$.

- 仅有无穷模型的语言 $\mathcal{L} = \varnothing$ 的理论.
- 所有元素的阶数均为某个素数 p 的无穷 Abel 群.
- 可除无扭 Abel 群.
- 特征为素数 p 或 0 的代数闭域.
- 数学结构 (ω, S) 的理论 $\mathrm{Th}(\omega)$, 这里 S 为后继函数.

在理论的范畴性的研究上, Morley 给出了第一个有重要意义的结果.

定理 1.3.4 (Morley 范畴性定理)　假设 T 是一个可数完全理论, 如果 T 范畴于某个不可数基数 κ, 则 T 范畴于一切不可数基数.

我们不打算在这里给出它的证明. 有兴趣的读者可参考一本模型论的基础教材 (比如参考文献 [CK]). 这里我们想指出, Morley 范畴性定理依理论的范畴性将所有可数完全理论分为以下四大类:

Ⅰ. 范畴于任意无穷基数的理论.

Ⅱ. 范畴于任意不可数基数但不范畴于 $\aleph_0$ 的理论.

Ⅲ. 范畴于 $\aleph_0$ 但不范畴于任意不可数基数的理论.

Ⅳ. 不范畴于任何无穷基数的理论.

由 Morley 范畴性定理, 在上面给出的 $\aleph_1$-范畴的理论的五个例子也都范畴于一切不可数基数.

在 Morley 给出它的范畴性定理以后, 数理逻辑学家进行了更深入的研究, 提出了更细致的理论分类学说, 比如稳定性理论和单纯性理论的研究. 在本章的最后一节, 要简要地给出它的概况.

我们要在 §1.8 指出当 $\kappa \geqslant \aleph_1$ 时, 如果一个理论 T 是 κ-范畴的, 则 T 是 ω-稳定的, 从而 T 也是超稳定的和稳定的.

§1.4　理论的完全性和模型完全性

定义 1.4.1　如果 T 是一个语言为 $\mathcal{L}$ 的理论. 如果对于一切 $\mathcal{L}$ 语句 φ, $T \vDash \varphi$ 和 $T \vDash \neg\varphi$ 中有一个且仅有一个成立, 那么就称 T 为一个完全的理论 (complete theory).