



高等学校理工类课程学习辅导丛书



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

周世勋

# 量子力学教程 (第二版)

## 学习指导

倪致祥



YZL10890113824



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



高等学校理工类课程学习辅导丛书



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

周世勋

# 量子力学教程 (第二版)

# 学习指导

Liangzi Lixue Jiaocheng Xuexi Zhidao

倪致祥



YZLI0890113824



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书是周世勋编《量子力学教程》(第二版)的学习指导书,作者倪致祥教授长期从事量子力学教学实践和教学研究,我们希望借作者丰富的经验给正在学习或研究量子力学的师生提供一些启发和帮助。

本书完善了学习指导,给出了学习时的主线,并且对教材的内容作了适当的补充。本书注重以明确的解题思路引导学生把握问题关键,以相关的背景知识帮助学生理解量子力学的物理内涵,以多种解法启发学生灵活运用所学知识,以扩展练习来拓展学生的知识面。本书还介绍了 Mathematica 及其在量子力学中的应用,充实了师生处理专业问题的手段。

本书可供使用周世勋编《量子力学教程》(第二版)的学生作为学习辅导书,也可供教师或使用其他量子力学教程的读者及考研学生参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

量子力学教程(第二版)学习指导/倪致祥编. —北京:高等教育出版社,2010.9

ISBN 978-7-04-030350-6

I. ①量… II. ①倪… III. ①量子力学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 160897 号

策划编辑 缪可可 责任编辑 李 茜 封面设计 张 楠  
责任绘图 尹 莉 版式设计 范晓红 责任校对 王 雨  
责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 涿州市京南印刷厂

开 本 787×960 1/16  
印 张 11.5  
字 数 200 000

购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2010年9月第1版  
印 次 2010年9月第1次印刷  
定 价 17.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30350-00

# 作者的话

本书是作者长期从事量子力学教学实践和教学研究的积累,希望能给正在学习量子力学的大学生、为进一步深造而复习量子力学的大学毕业生以及正在从事量子力学教学的新教师提供一些启发和帮助。

本书以周世勋先生的《量子力学教程》(第二版)中的习题为基本分析对象,其内容可以作为学习同类教材时的参考资料,也可以作为考研究生的辅导材料。

本书的主要特色有:

1. 完善了学习指导,一方面给出了学习与复习时的主要线索,另一方面对教材中的内容作了适当的补充。

2. 在习题求解中充实了题意分析和物理讨论,题意分析部分给出了解题的思路,以便初学者从总体上把握问题的关键;物理讨论部分给出了习题的背景知识、相关问题的处理或者物理意义的分析,为读者深入理解量子力学的物理内涵,撰写课程论文或者学年论文提供帮助;在求解过程中给出了多种不同的解法,启发读者从各种角度思维,灵活运用所学知识来解决具体问题。

3. 增加了扩展练习,以弥补教材中习题量偏少,覆盖面不全的缺陷;同时也可以起到拓展知识面与提高应用能力的作用。

4. 介绍了科学计算通用软件 **Mathematica** 及其在量子力学中的应用,既可以提高读者用现代计算工具来处理专业问题的兴趣和能力,又可以使读者把主要精力集中到问题的物理方面。毕竟量子力学是一门物理课程,而不是数学课程。

作者感谢北京师范大学喀兴林先生的悉心指点,感谢阜阳师范学院马涛教授的有益讨论和胡新建老师的认真核对,同时也感谢高等教育出版社陶铮同志、缪可可同志和李茜同志的辛勤工作。

作者

2010年3月于阜阳师范学院

# 目 录

第一章 绪论 .....	1
§ 1.1 学习指导 .....	1
§ 1.2 习题分析与求解 .....	2
§ 1.3 扩展练习 .....	11
第二章 波函数和薛定谔方程 .....	15
§ 2.1 学习指导 .....	15
§ 2.2 习题分析与求解 .....	19
§ 2.3 扩展练习 .....	35
第三章 量子力学中的力学量 .....	39
§ 3.1 学习指导 .....	39
§ 3.2 习题分析与求解 .....	44
§ 3.3 扩展练习 .....	68
第四章 态和力学量的表象 .....	72
§ 4.1 学习指导 .....	72
§ 4.2 习题分析与求解 .....	77
§ 4.3 扩展练习 .....	87
第五章 微扰理论 .....	90
§ 5.1 学习指导 .....	90
§ 5.2 习题分析与求解 .....	95
§ 5.3 扩展练习 .....	109
第六章 散射 .....	114
§ 6.1 学习指导 .....	114
§ 6.2 习题分析与求解 .....	117
§ 6.3 扩展练习 .....	130
第七章 自旋与全同粒子 .....	135
§ 7.1 学习指导 .....	135
§ 7.2 习题分析与求解 .....	140
§ 7.3 扩展练习 .....	154

---

附录 A 量子力学中常用的数学工具.....	159
附录 B Mathematica 的基本应用.....	165
参考文献 .....	176

# 第一章 绪 论

## § 1.1 学习指导

本章主要介绍量子力学建立过程中的一些关键性实验和重大理论突破, 这些内容对于量子力学基本概念的形成和基本理论的构建非常重要. 在学习本章内容时, 要特别注意量子概念的形成、玻尔 - 索末菲量子化条件的意义和应用以及微观粒子波粒二象性的表示与涵义.

本章的主要知识点有

### 1. 黑体辐射的普朗克公式

普朗克在维恩公式和瑞利 - 金斯公式的基础上, 用内插法得出了黑体辐射(空腔辐射)的能量密度随着频率  $\nu$  分布的规律

$$\rho_{\nu}(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (1-1)$$

该公式表示单位频率间隔中, 黑体辐射的能量密度随频率高低的变化. 普朗克公式与实验结果完全一致, 但是在经典物理学中却无法解释. 对普朗克公式的深入分析表明: 空腔中的电磁辐射能量不是连续的, 而是量子化的. 频率为  $\nu$  的电磁辐射能量有一个最小单位  $\varepsilon = h\nu$ , 称为能量子, 其中  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  称为普朗克常量. 电磁能量的变化量只能是能量子的整数倍.

### 2. 玻尔 - 索末菲的量子化条件

量子化现象不仅存在于电磁辐射中, 也存在于电子等实体粒子中; 不仅存在于简谐振动、氢原子等情况, 也存在于其他束缚态; 不仅存在于能量中, 也存在于其他力学量的取值中. 量子化是微观运动的普遍特征, 通过对实验结果的分析, 玻尔和索末菲发现一个周期系统的广义坐标  $q$  和对应的广义动量  $p$  满足如下量子化条件

$$\oint p dq = nh, \quad n \in \mathbf{N} \quad (1-2)$$

后来发现微观系统的基态存在着零点能量, 上式又修正为

$$\oint p dq = \left( n + \frac{1}{2} \right) h, \quad n \in \mathbf{N} \quad (1-3)$$

量子化条件虽然在经典物理学中找不到理论依据,但可以统一给出不同微观系统中能量的量子化数值,并得到了实验的支持.在量子力学建立之前,量子化条件对人们认识微观现象起了重要的作用.

### 3. 波粒二象性的德布罗意公式

量子发现后,爱因斯坦通过对普朗克公式和光电效应等问题的研究,进一步发现电磁辐射不仅在能量取值上具有粒子性,而且在空间分布上也具有粒子性.这种电磁粒子具有独立的能量和动量,后来被称为光子.电磁辐射的粒子性与波动性并不排斥,它们都是电磁辐射的表现形式,两者之间具有关系

$$\begin{cases} E = h\nu = \hbar\omega \\ p = hn/\lambda = \hbar k \end{cases} \quad (1-4)$$

其中  $E$  和  $p$  表示电磁辐射的能量和动量,  $\lambda, \nu, \omega$  和  $k$  分别表示电磁辐射的波长、频率、圆频率和波矢量,  $n$  为波矢量方向的单位矢量,  $\hbar = h/(2\pi)$  称为狄拉克常量(约化的普朗克常量).

后来,德布罗意发现(1-4)式也适用于电子等实体粒子,并得到了电子衍射实验的支持,成为人类认识微观对象的有力工具,公式(1-4)也被称为德布罗意关系.

在一般情况下,质量为  $m$  的粒子的动能  $E$  为总能量  $mc^2$  与静质量能  $m_0c^2$  之差,即

$$E = mc^2 - m_0c^2$$

其中质量  $m$  与静止质量  $m_0$  之间的关系为  $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . 而动量为  $p = mv$ , 由此得到

$$m_0^2c^2 = m^2c^2 - m^2v^2 = m^2c^2 - p^2$$

于是可推出动量与动能之间的一般关系

$$p^2 = m^2c^2 - m_0^2c^2 = (E/c + m_0c)^2 - m_0^2c^2 = (E/c)^2 + 2m_0E \quad (1-5)$$

利用(1-5)式,我们容易根据粒子的动能计算出它的德布罗意波长.在极端相对论情况下,例如光子,有  $E \gg m_0c^2$ , (1-5)式近似为  $p = E/c$ ; 在非相对论情况下,例如低速电子,有  $E \ll m_0c^2$ , (1-5)式近似为  $p = \sqrt{2m_0E}$ .

德布罗意公式说明了微观物体同时具有波动性和粒子性,简称波粒二象性.波长越长,对应的波动性效应越显著;波长越短,对应的粒子性效应越显著.

## § 1.2 习题分析与求解

1.1 由黑体辐射公式导出维恩位移定律: 能量密度极大值所对应的波长



$\lambda_m$  与温度  $T$  成反比, 即

$$\lambda_m T = b (\text{常量})$$

并近似计算  $b$  的数值, 准确到二位有效数字.

### 【题意分析】

已知条件: 单位频率间隔中, 黑体辐射的能量密度  $\rho$  的分布规律, 即普朗克公式(1-1).

待求问题: 能量密度极大值所对应的波长  $\lambda_m$  与温度  $T$  的关系, 即黑体辐射的能量密度  $\rho$  随着波长  $\lambda$  分布的函数  $\rho_\lambda(\lambda, T)$  取极大值时, 对应的波长  $\lambda_m(T)$ .

相互联系: 黑体辐射是电磁波, 其波动性既可以用频率来描述, 也可以用波长来描述. 波长与频率满足关系

$$\lambda\nu = c \quad (1.1-1)$$

无论是用频率来描述黑体辐射能量密度的分布, 还是用波长来描述黑体辐射能量密度的分布, 在同一个波段范围内的能量密度是不变的. 设该波段范围介于频率  $\nu$  与  $\nu + d\nu$  之间, 频率间隔为  $d\nu$ , 其中包含的能量密度为  $\rho_\nu(\nu, T) d\nu$ ; 用波长来描述, 波段范围介于波长  $\lambda$  与  $\lambda + d\lambda$  之间, 其中包含的能量密度为  $-\rho_\lambda(\lambda, T) d\lambda$  (考虑到波长为频率的减函数, 与此相应的波长间隔为  $\lambda - (\lambda + d\lambda) = -d\lambda$ ). 由于两者描述的是同一个波段范围内的能量密度, 因此有

$$\rho_\lambda(\lambda, T) d\lambda = -\rho_\nu(\nu, T) d\nu \quad (1.1-2)$$

### 【求解过程】

首先利用波长与频率的关系, 求出黑体辐射的能量密度  $\rho$  随着波长  $\lambda$  分布的函数

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(\lambda, T) &= -\rho_\nu(\nu, T) \frac{d\nu}{d\lambda} = -\rho_\nu\left(\frac{c}{\lambda}, T\right) \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{\lambda}\right) \\ &= \frac{8\pi h \left(\frac{c}{\lambda}\right)^3}{c^3} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \left(\frac{c}{\lambda^2}\right) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \end{aligned} \quad (1.1-3)$$

(1.1-3)式表示单位波长间隔中, 黑体辐射的能量密度随波长的变化.

然后对上述函数求极大值对应的波长. 按照数学分析中的极大值条件, 要求

能量密度  $\rho(\lambda, T)$  对分布参数  $\lambda$  的一阶导数为零, 即

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \rho(\lambda, T) &= -5 \times \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} + \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^2} \frac{hc}{\lambda^2 k_B T} e^{hc/\lambda k_B T} \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \frac{1}{(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^2} \left[ -5(e^{hc/\lambda k_B T} - 1) + \frac{hc}{\lambda k_B T} e^{hc/\lambda k_B T} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.1-4)$$

上面的条件可以简化为

$$-5(e^x - 1) + xe^x = 0 \quad \text{或者} \quad f(x) = -5(1 - e^{-x}) + x = 0 \quad (1.1-5)$$

其中  $x = hc/(\lambda k_B T)$ . 设  $x_1$  为方程(1.1-5)的根, 我们得到能量密度极大值所对应的波长为

$$\lambda_m = \frac{hc}{x_1 k_B T} = \frac{b}{T}, \quad b = \frac{hc}{x_1 k_B} \quad (1.1-6)$$

方程(1.1-5)为超越方程, 无法用解析的方法严格求解, 需要借助数值方法. 人工数值求解方程的方法有两分法和牛顿切线法等, 但用计算机处理更加方便快捷. 利用科学计算工具软件 Mathematica (见附录 B), 输入求解一般方程的命令

```
FindRoot[-5(1-Exp[-x])+x==0, {x, 10}]
```

立刻得到  $x = 4.96511$ , 由此求出常量  $b = hc/x_1 k_B = 0.0028991 \text{ m} \cdot \text{K}$ .

### 【物理讨论】

如果先对普朗克公式(1-1)求出能量密度分布极大值所对应的频率  $\nu_m$ , 再根据波长与频率的关系求出  $\lambda_m = c/\nu_m$ , 则不符合本题要求. 因为这样得到的是单位频率间隔中能量密度极大时所对应的波长, 而本题要求计算的是单位波长间隔中能量密度极大时所对应的波长. 即使都用波长为参数来描述, 单位频率间隔与单位波长间隔所包含的电磁辐射能量密度也是不相同的, 前者是  $\rho_\nu\left(\frac{c}{\lambda}, T\right)$ , 而后者是  $\rho_\lambda(\lambda, T)$ .

1.2 在 0 K 附近, 钠的价电子动能约为 3 eV, 求其德布罗意波长.

### 【题意分析】

已知条件: 钠的价电子动能  $E \approx 3 \text{ eV}$ .

待求问题：价电子的德布罗意波长  $\lambda = h/p$ . (1.2-1)

相互联系：电子的动量  $p$  与动能  $E$  之间满足

$$p^2 = (E/c)^2 + 2m_e E \quad (1.2-2)$$

### 【求解过程】

解一：

首先判断钠的价电子属于哪种情况，是否可以用非相对论近似。价电子动能  $E \approx 3 \text{ eV}$ ，静质量能为  $m_e c^2 = 5.11 \times 10^5 \text{ eV}$ ， $E \ll m_e c^2$ ，属于非相对论情况，(1.2-2)式近似为

$$p = \sqrt{2m_e E} \quad (1.2-3)$$

将结果代入德布罗意波长公式，得到

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{1.22643 \times 10^{-9}}{\sqrt{3}} = 7.08 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (1.2-4)$$

解二：

直接利用一般公式(1.2-2)，得到德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(E/c)^2 + 2m_e E}} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 + 2m_e c^2 E}} = 7.08 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (1.2-5)$$

### 【物理讨论】

从数值上看，德布罗意波长计算的非相对论近似结果与精确公式处理结果没有差别，这是因为相对误差非常小的缘故。非相对论近似的条件为  $E \ll m_e c^2$ ，由此产生的相对误差大约为  $E: m_e c^2 = 3: 5.11 \times 10^5 = 5.87 \times 10^{-6}$  (数量级)。

1.3 氦原子的动能是  $E = \frac{3}{2} k_B T$  ( $k_B$  为波尔兹曼常量)，求  $T = 1 \text{ K}$  时，氦原子的德布罗意波长。

### 【题意分析】

已知条件：氦原子的静质量为 4.002 6 个相对原子质量，即

$$m_{\text{He}} = 4.0026 \times 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 6.64 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (1.3-1)$$

动能是  $E = \frac{3}{2}k_B T = \frac{3}{2} \cdot 8.617\ 34 \times 10^{-5} T \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1} = 1.292\ 6 \times 10^{-4} T \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}$ .

待求问题: 氦原子的德布罗意波长.

相互联系: 德布罗意关系  $\lambda = h/p$ , 而电子的动量  $p$  与动能  $E$  与之间满足

$$p = \sqrt{(E/c)^2 + 2m_{\text{He}}E} \quad (1.3-2)$$

### 【求解过程】

首先判断  $T = 1 \text{ K}$  时氦原子属于哪种情况. 氦原子动能  $E = 1.292\ 6 \times 10^{-4} \text{ eV}$ , 静质量能为  $m_{\text{He}}c^2 = 5.97 \times 10^{-10} \text{ J} = 3.73 \times 10^9 \text{ eV}$ ,  $E \ll m_{\text{He}}c^2$ , 属于非相对论情况, 于是有  $p = \sqrt{2m_{\text{He}}E}$ .

将结果代入德布罗意波长公式, 得到

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_{\text{He}}E}} = \frac{h}{\sqrt{3m_{\text{He}}k_B T}} \\ &= \frac{6.626 \times 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 6.64 \times 10^{-27} \times 1.38 \times 10^{-23}}} \text{ m} = 1.26 \times 10^{-9} \text{ m} \end{aligned} \quad (1.3-3)$$

### 【物理讨论】

粒子的德布罗意波长随着粒子质量或者温度的降低而变长, 波动性增强. 在温度接近绝对零度时, 粒子的德布罗意波长可能会达到粒子之间平均距离的数量级, 这时经典的统计力学理论不再适用.

如果要在宏观尺度上观察到氦原子的波动效应, 其德布罗意波长应该到达微米数量级以上, 即  $\lambda \sim 1.26 \times 10^{-6} \text{ m}$ , 这要求温度不大于  $10^{-6} \text{ K}$ .

1.4 利用玻尔-索末菲的量子化条件, 求:

- (1) 一维谐振子的能量;
- (2) 在均匀磁场中做圆周运动的电子轨道的可能半径.

已知外磁场  $H = 10 \text{ T}$  (特斯拉), 玻尔磁子  $M_B = 9 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ , 试计算动能的量子化间隔  $\Delta E$ , 并与  $T = 4 \text{ K}$  及  $T = 100 \text{ K}$  的热运动能量相比较.

- (1) 一维谐振子的能量

### 【题意分析】

已知条件: 一维谐振子的坐标和动量  $(x, p)$  满足量子化条件 (1-3).

待求问题：一维谐振子的能级  $E_n$ .

相互联系：能量表达式为

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1.4-1)$$

其中  $m$  为振子质量,  $\omega$  为振动的圆频率.

### 【求解过程】

解一：

由能量表达式得到坐标的取值范围是  $[-x_m, x_m]$ , 其中  $x_m = \sqrt{2E/m\omega^2}$ . 振子的坐标从最小值运动到最大值之后, 再回到最小值时, 完成了一个运动周期, 因此  $\pm x_m$  也称为经典运动的转向点. 动量为  $p = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}$ , 当  $x$  从最小值运动到最大值时, 动量为正; 从最大值运动到最小值时, 动量为负.

将上述分析的结果代入量子化条件(1-3)后, 得到

$$\begin{aligned} \oint p dx &= \int_{-x_m}^{x_m} \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} dx - \int_{x_m}^{-x_m} \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} dx \\ &= 2 \int_{-x_m}^{x_m} \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)h \end{aligned} \quad (1.4-2)$$

在上式中令  $\xi = m\omega x / \sqrt{2mE}$ , 得到

$$\frac{4E}{\omega} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = \frac{2\pi E}{\omega} = \left(n + \frac{1}{2}\right)h \quad (1.4-3)$$

即

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (1.4-4)$$

解二：

由能量表达式(1.4-1)容易看出, 一维谐振子在相空间中的运动轨迹为椭圆, 方程为

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \quad (1.4-5)$$

椭圆的长半轴和短半轴分别为  $a = \sqrt{2mE}$  和  $b = \sqrt{2E/m\omega^2}$ . 而根据(1.4-2)式, 等式的左边恰好是椭圆的面积, 即

$$\oint p dx = \pi ab = 2\pi E/\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)h \quad (1.4-6)$$

于是得到

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (1.4-7)$$

解三:

一维谐振子的运动学方程为  $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ , 动量为  $p = m\dot{x} = m\omega A\cos(\omega t + \varphi)$ , 运动周期为  $T = 2\pi/\omega$ , 代入量子化条件(1-3), 得到

$$\begin{aligned} \oint p dx &= \int_0^T m\omega A\cos(\omega t + \varphi) dA\sin(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cdot T = \pi m\omega A^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)h \end{aligned} \quad (1.4-8)$$

将运动学方程代入能量表达式, 得到

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2m}m^2\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \end{aligned} \quad (1.4-9)$$

比较上面的两个式子, 得到

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}{2\pi} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (1.4-10)$$

(2) 在均匀磁场中做圆周运动的电子轨道的可能半径

### 【题意分析】

已知条件: 电子的坐标  $r$  和动量  $p$  满足量子化条件(1-3)式; 在电磁场中, 带电粒子的动量应该取正则动量  $p = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$ , 其中  $\mathbf{A}$  为磁场的矢势, 满足关系  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , 对于电子有  $p = m\mathbf{v} - e\mathbf{A}$ .

待求问题: 电子轨道的可能半径  $r_n$ .

相互联系: 圆周运动的条件  $m\mathbf{v}^2/r = F_n$  和洛伦兹公式  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

### 【求解过程】

设磁场方向沿着  $z$  轴正向, 即磁感应强度  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ ; 电子在垂直磁场的平面内

做圆周运动,我们设运动平面为  $Oxy$  平面,圆周运动的圆心为原点,半径为  $r$ ,电子的坐标为  $\mathbf{r} = r(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j})$ ,速度为  $\mathbf{v} = r\dot{\varphi}(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})$ .

由洛伦兹公式得到

$$\mathbf{F} = -e r \dot{\varphi}(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) \times B \mathbf{k} = -e \dot{\varphi} B r \quad (1.4-11)$$

代入圆周运动的条件后,得到

$$m r \dot{\varphi}^2 = e \dot{\varphi} r B \Rightarrow \dot{\varphi} = e B / m \quad (1.4-12)$$

利用上面的关系,不难算出

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} &= \oint m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \oint e \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint m r^2 \dot{\varphi} d\varphi - e \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint r^2 e B d\varphi - e \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2 \pi r^2 e B - e \pi r^2 B = \pi r^2 e B \end{aligned} \quad (1.4-13)$$

推导中利用了曲线积分的斯托克斯公式(附录 A).

将上面的结果代入量子化条件(1-3)后,得到

$$\pi r^2 e B = \left(n + \frac{1}{2}\right) h, \quad n \in \mathbf{N}$$

即

$$r^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h}{\pi e B} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2\hbar}{eB} = (2n + 1) \frac{\hbar}{eB}, \quad n \in \mathbf{N} \quad (1.4-14)$$

而电子的动能为

$$E = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (r \dot{\varphi})^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{r e B}{m}\right)^2 = (2n + 1) \frac{\hbar e B}{2m} = (2n + 1) M_B B \quad (1.4-15)$$

其中  $M_B = \hbar e / (2m)$  为玻尔磁子. 电子动能的量子化间隔为

$$\Delta E = 2 M_B B = 2 \times 9 \times 10^{-24} \times 10 \text{ J} = 1.8 \times 10^{-22} \text{ J} \quad (1.4-16)$$

而温度为  $T$  时的热运动能量为

$$E = \frac{3}{2} k_B T = 1.5 \times 1.38 \times 10^{-23} T \approx 2.1 \times 10^{-23} T \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (1.4-17)$$

## 【物理讨论】

由上面的结果容易看出,当  $T=4\text{ K}$  时,热运动能量为  $8.4 \times 10^{-23}\text{ J}$ ,小于电子动能的量子化间隔,在这种情况下,能量的量子化效应非常显著;当  $T=100\text{ K}$  时,热运动能量为  $2.1 \times 10^{-21}\text{ J}$ ,大于电子动能的量子化间隔,这时能量的量子化效应不明显.

1.5 两个光子在一定条件下可以转化为正负电子对. 如果两光子的能量相等,问要实现这种转化,光子的波长最大是多少?

## 【题意分析】

已知条件:正电子或负电子的静止质量为  $m_e=9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}$ ,静质量能为  $m_e c^2=5.11 \times 10^5\text{ eV}$ ,单个光子的能量  $E_\gamma=h\nu$ .

待求问题:两个能量相等的光子转化为正负电子对的波长条件.

相互联系:波长与频率的关系  $\nu\lambda=c$ ;转化前后的能量守恒,即  $2E_\gamma=E$ .

## 【求解过程】

正负电子对的总能量不小于静止质量,即  $E \geq 2m_e c^2$ ,因此得到

$$2h\nu = E \geq 2m_e c^2 \Rightarrow \nu \geq m_e c^2/h \quad (1.5-1)$$

考虑到波长与频率的关系,上式化为

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \leq \frac{h}{m_e c} = \lambda_c = 2.426 \times 10^{-12}\text{ m} \quad (1.5-2)$$

这表明两个能量相等的光子要转化为正负电子对,其波长不能超过电子的康普顿波长  $\lambda_c$ .

## 【物理讨论】

(1.5-2)式给出的是转化前光子波长的最大值,在一般情况下转化后的正负电子不会静止,还具有一定的动能,因此光子的实际波长应该小于这个最大值.

类似地,两个能量相等的光子也可以转化为其他正负粒子对,例如转化为正负质子对,这时光子的波长不能超过质子的康普顿波长  $h/(m_p c)$ .

需要指出的是:在求解过程中我们没有考虑正负电子之间的电势能,这是因为电势能的大小  $|U| \leq e_s^2/\lambda_c < 300\text{ eV}$ ,远远小于电子的静质量能  $5.11 \times 10^5\text{ eV}$ .



### §1.3 扩展练习

E1.1 假设太阳表面可以看成温度大约为  $T=6\,000\text{ K}$  的黑体,计算在太阳的辐射中,可见光范围内的能量占总能量的百分比.

【提示】在太阳辐射中,可见光的频率范围是  $[\nu_1, \nu_2]$ , 其中  $\nu_1 = 3.95 \times 10^{14}\text{ Hz}$ ,  $\nu_2 = 7.50 \times 10^{14}\text{ Hz}$ , 利用普朗克公式(1-1), 在可见光范围内的能量密度为

$$u_{\text{可}} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_{\text{B}}T} - 1} d\nu \quad (\text{E1.1-1})$$

太阳辐射的总能量密度为

$$u_{\text{总}} = \int_0^{\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_{\text{B}}T} - 1} d\nu \quad (\text{E1.1-2})$$

两者之比为

$$\frac{u_{\text{可}}}{u_{\text{总}}} = \frac{\int_{\nu_1}^{\nu_2} \nu^3 d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_{\text{B}}T} - 1}} = 0.431\,3 \quad (\text{E1.1-3})$$

上式表明,太阳的辐射能中有近二分之一集中在可见光频段.

E1.2 求波长为  $25\text{ nm}$  紫外线光子的能量和动量.

【提示】由德布罗意关系(1-4),可以得到该光子能量和动量分别为

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda \quad \text{和} \quad p = h/\lambda$$

E1.3 求静止电子经电压  $U(\text{V})$  加速后,德布罗意波长随着加速电压变化的关系.

【提示】电子的静质量能为  $m_e c^2 = 5.11 \times 10^5\text{ eV}$ , 静止电子经加速后的动能为  $E = eU$ , 由于题目没有给出加速电压的具体大小,无法判断电子动能与静质量能的大小关系,因此需要考虑普遍情况.

在一般情况下,动量与动能的关系满足(1-5)式,代入德布罗意公式后,得到

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(E/c)^2 + 2m_e E}} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 + 2m_e c^2 E}} = \frac{hc}{\sqrt{(eU)^2 + 2m_e c^2 eU}} \quad (\text{E1.3-1})$$

上式给出了德布罗意波长与电子加速电压的函数关系.