"十二五"国家重点图书

Advances in Materials and Mechanics

梯度材料断裂力学的新型边界元法分析

New Boundary Element Analysis of Fracture Mechanics in Functionally Graded Materials

肖洪天　岳中琦　著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十二五”国家重点图书

Advances
in
Materials
and
Mechanics

梯度材料断裂力学的新型边界元法分析

New Boundary Element Analysis of Fracture Mechanics in Functionally Graded Materials

TIDU CAILIAO DUANLIE LIXUE DE XINXING BIANJIEYUANFA FENXI

肖洪天　岳中琦　著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

Professor Hongtian Xiao
College of Civil Engineering and Architecture
Shandong University of Science and Technology
Qingdao, China
E-mail: Xiaohongtian@tsinghua.org.cn

Associate Professor Zhongqi Yue
Department of Civil Engineering
The University of Hong Kong
Hong Kong, China
E-mail: yueqzq@hkucc.hku.hk

图书在版编目(CIP)数据

梯度材料断裂力学的新型边界元法分析/肖洪天，岳中琦著. —北京:
高等教育出版社，2011. 9
ISBN 978-7-04-032214-9
Ⅰ. ①梯… Ⅱ. ①肖… ②岳… Ⅲ. ①复合材料-断裂力学-边界
元法-分析 Ⅳ. ①TB33
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 120761 号

策划编辑 刘剑波 责任编辑 焦建虹 封面设计 刘晓翔 版式设计 范晓红
插图绘制 尹文军 责任校对 胡美萍 责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18.25	版　　次	2011 年 9 月第 1 版
字　　数	350 千字	印　　次	2011 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	59.00 元

物 料 号 32214-00

前言

非均匀性是导致材料力学特性复杂的原因之一。非均匀材料中有一类材料称为梯度材料，其组成、结构和物理力学性质在空间上主要沿某单一方向变化，而在垂直于这个方向的平面或曲面上变化很小或不变化。天然材料中的生物材料和岩土材料具有梯度变化特征。例如，植物的茎是一种沿径向的梯度材料，动物的骨骼为无机材料和有机材料完美结合的梯度材料，地球表面以下土和岩石的组成和结构沿深度具有梯度变化特征。在古代，人们就认识到材料性能和参数沿某一方向连续变化可增强材料性能并能降低成本。梯度材料的应用可以追溯到古代剑的制作。近年来，梯度材料在机械、生物、化学、电子等工程中得到了广泛的应用。

材料的力学特性具有重要的理论意义和工程价值。由于梯度材料的广泛性和独特的工业价值，其力学特性成为研究热点。众所周知，边界元法在分析材料断裂力学特性中具有独特的优势。在过去几十年里，边界元法有了长足的进展，已成为断裂力学分析的有效数值工具。传统的边界元法基于经典的 Kelvin 基本解，分析非均匀材料力学特性时需沿不同材料的界面划分单元。显然，这种分析方法使得传统边界元法在非均匀材料中的应用受到限制。

本书第二作者从 1983 年开始研究层状材料的弹性力学问题，经过二十几年的坚持和努力，取得了丰富的研究成果。本书发展的边界元法便是基于作者提出的层状材料基本解。自 2000 年开始，在香港大学、香港教育研究局、国家自然科学基金和山东省泰山学者专项经费的资助下，作者开始发展层状材料基本解的边界元法。作者对边界元法的发展是多方面的，从层状材料各向同性基本解的边界元法到双层横观各向同性材料基本解的边界元法，从子域边界元法到单一区域的对偶边界元法，并采用发展的边界元法分析了不同类型梯度材料的断裂力学问题，包括不同类型的梯度材料中、复杂荷载作用下各种类型裂纹的应力强度因子和裂纹扩展规律。研究成果在 SCI 英文期刊和国内重要的力学类学术期刊上发表，并被广泛引用。本书即是在总结以往研究成果的基础上编写而成的。

作者希望，本书的出版不仅能使读者了解新型的边界元法，而且可以增加读者对梯度材料断裂力学特性的认识。书中的研究成果来自作者和其同事们联合发表的文章，在此向他们表示衷心的感谢。作者敬请读者和同行专家对本书存在的不足之处给予批评指正。

作者

2011 年 3 月

目录

第 1 章 绪论

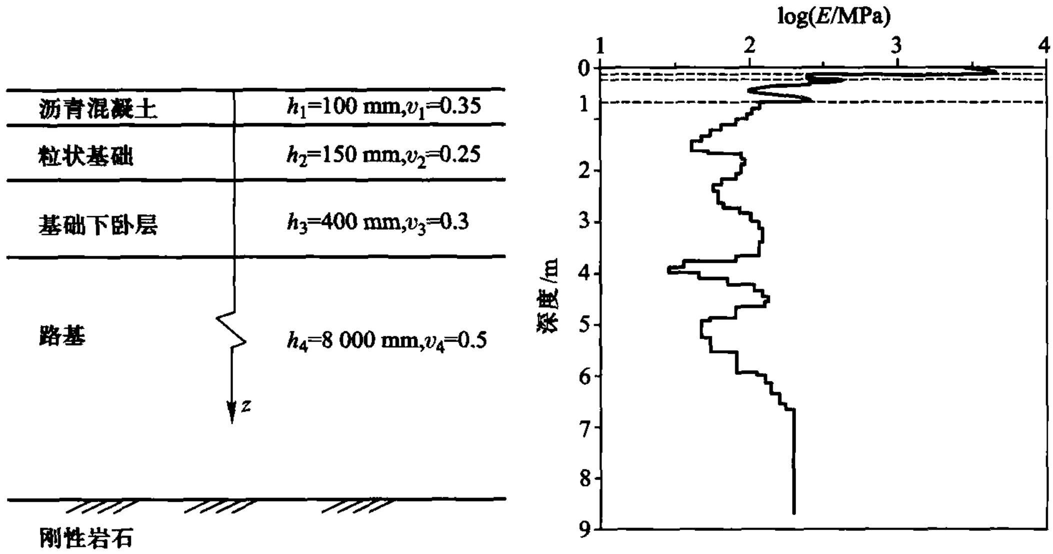
1.1 梯度材料

材料的均匀性是关于材料的物理力学性质在不同点或空间上的分布规律。均匀材料的物理力学性质在其所占有的空间上是不变的, 是个常数, 各点值是相等的。相反, 非均匀材料的物理力学性质在其所占有的空间上是变化的, 不是个常数, 各点值既可相等, 也可不等。均匀材料是非均匀材料的一个理想的特例。

在微观 (如分子和纳米尺度) 结构尺度上, 自然界任何材料都表现出特有的非均匀性。而在细观、宏观结构尺度上, 很多工程材料可以假设为均匀材料。这种做法是在数理力学模型上对这类材料作的第一阶平均化的近似。这种理想近似在过去为求解相应的物理力学问题起到了关键作用。随着新材料的不断问世和相应物理力学特性研究的不断深入, 分析和预测这类材料的力学响应和破坏时, 材料的细观、宏观非均匀性也变得十分重要, 在不少实际问题中起到控制作用。因此, 在数理力学模型上要对传统的材料性质空间分布的第一阶平均化近似再作第二次更能符合实际的各种第二阶理想化近似。

在天然和人工合成材料中，有一类材料的组成、结构和物理力学性质在空间上主要沿某单一方向变化，而在垂直于这个方向的平面或曲面上变化很小或不变化。这类材料称为梯度材料或功能梯度材料。实际上，梯度材料是一种特殊形式的非均匀材料，是更能符合实际材料性质的一种第二阶理想化近似。

在天然材料中，生物材料和岩土材料具有梯度变化特征。植物的茎是一种沿径向的梯度材料，材料中强度最高的外围部分往往承受较大的应力。动物的牙齿、骨头、关节等为无机材料和有机材料完美结合的梯度材料，具有重量轻、韧性好、强度高的优点。地球表面以下土和岩石的组成和结构沿深度方向具有梯度变化特征。这种变化影响着地基的沉降和稳定以及钻孔钻入地下的难易程度。现场勘察试验表明，有一类地基土的弹性模量可用函数 $E = E_0 z^k$ 近似表示，这里 E_0 为均匀土的弹性模量，z 为地表以下深度，$0 \leqslant k \leqslant 1$。当 $k = 1$ 时，此种土称为 Gibson 土 (Gibson, 1967)。图 1.1 演示了典型路基结构 (Yue et al, 1998)。按材料组成和结构，该路基可分为四层 (见图 1.1(a))，每一层材料的力学参数沿深度方向变化 (见图 1.1(b))。



(a) 典型的路基结构 (b) 弹性模量随深度变化的路基

图 1.1 弹性参数随深度变化的沥青混凝土路基

(Yue et al, 1998; 经 Journal of Elasticity 许可)

在古代，人们就已经认识到材料结构和组成沿某一方向连续变化可增强材料性能并能降低成本。梯度材料的应用可以追溯到古代剑的制作。剑体从内部强度较低的材料连续地过渡到坚硬的刀刃。钢表面的碳化和氮化使剑刃变得坚硬、抗疲劳、耐磨损。通常情况下，人们希望具有不同性质或功能的材料结合在一起，又希望材料结合得完美，从而不致在苛刻的使用条件下因性能不匹配而发生破坏。

近几十年来，梯度材料在机械、生物、化学、电子等工程中得到了广泛的应用。以航天飞机冲压式发动机为例，在承受高温的表面，配置耐高温陶瓷；在与冷却气体接触的表面，采用导热性和强韧性良好的金属；而在两个表面之间，采用先进的材料复合技术，通过控制金属和陶瓷的相对组成及组织结构，使其无界面地、连续地变化，这样就可得到一种呈梯度变化的材料。材料梯度变化可使热应力重新分布，限制了关键部位的应力，抑制了永久变形、损伤和破坏。通过改变梯度材料的弹塑性性质，裂纹扩展驱动力相应地增大或减小。另外，梯度材料组成和结构的光滑变化会改进两种材料之间的黏结力。

梯度材料在外荷载作用下的力学响应分析和预测对许多领域具有指导意义和应用价值。这些领域包括岩土工程、摩擦学、生物力学、断裂力学、表面涂层保护技术和纳米技术。梯度材料力学特性和分析已引起了科技工作者的广泛兴趣，在许多国际学术期刊和学术会议中，常见到大量梯度材料研究成果的报道。Birman et al (2007) 回顾了功能梯度材料力学特性的研究进展。这类研究涉及如下几个方面：均匀化，热传导性，动、静态荷载下材料结构的应力和变形，优化设计，试验研究，材料结构中的特殊问题和断裂力学。其中，梯度材料断裂力学问题是一个重要的研究领域 (Suresh, 2001)。

1.2 梯度材料断裂力学分析方法

1.2.1 概述

由于材料的组成和结构不同，不同梯度材料的细观、宏观断裂机制也不同。细观、宏观尺度上，裂纹和孔洞对梯度材料结构的力学性能有着重要的影响。对这些缺陷进行力学分析已成为梯度材料研究的一个分支，也成为断裂力学研究的热点。Erdogan (2000) 列举了梯度材料断裂力学的九个研究方向。它们是：

(1) 三维结合异质材料的角点奇异性。

(2) 与无应力边界相接的界面裂纹奇异性。

(3) 各向异性结合材料中的局部残余应力及其对裂纹起裂的影响。

(4) 涂层中三维周期性表面开裂和裂纹扩展。

(5) 热循环和热冲击作用下，与温度相关的层状材料热力学参数的变化。

(6) 材料和几何非线性对层裂的影响。

(7) 非弹性梯度材料裂纹尖端的奇异性。

(8) 考虑非奇异项时，梯度材料裂纹尖端的力学状态。

(9) 室温和高温下梯度材料断裂特性的研究方法。

与传统的断裂力学分析方法类似 (范天佑, 2003)，梯度材料断裂力学的研究方法可分为解析方法和数值方法。解析方法主要为积分变换方法，数值方法主要

包括有限元法、边界元法和无单元法。

1.2.2　解析方法

许多学者采用积分变换方法求解梯度材料中的裂纹问题。Delale et al (1983) 假设材料泊松比为常数, 并且弹性模量沿某一方向按指数函数变化, 分析了非均匀平面板中的裂纹。Ozturk et al (1996) 假设梯度材料夹层的材料参数按指数函数分布, 分析了含梯度材料夹层无限域材料中的轴对称圆盘状裂纹。Pei et al (1997) 分析了边缘荷载作用下有限高狭长梯度材料中的半无限裂纹和正交梯度材料中的裂纹; 对于正交梯度材料, 假设沿平行于和垂直于裂纹面方向材料参数按指数函数分布。Jin et al (2002) 假设梯度材料弹性参数按指数函数分布, 计算了面内荷载作用下有限厚度狭长黏弹性梯度材料中裂纹的应力强度因子。Meguid et al (2002) 假设材料的弹性模量和密度按指数函数分布, 分析了无限域梯度材料中有限长度裂纹的动态扩展。也有一些学者采用其他函数, 例如, 幂函数 (Craster et al, 1994) 和坐标的倒数函数 (程站起 等, 2007), 来描述材料参数的变化。

可以发现, 在这些分析中假设梯度材料的弹性参数沿某一方向按给定的函数形式变化。只有在这种假设下, 才能获得梯度材料中裂纹的解析解。也就是说, 解析方法只能针对一些材料参数分布形式简单的梯度材料, 而且大多数针对的是二维裂纹问题。对于三维裂纹问题, 仅仅涉及圆盘状裂纹, 且裂纹位于梯度材料与均匀材料的界面上 (Ozturk et al, 1996)。

Ito (2001) 采用分层方法研究了梯度材料中的裂纹问题。王保林等 (2003) 建立了考虑多裂纹相互作用的层合板模型, 提出了材料参数任意变化时裂纹尖端场的求解方法; 分析时, 他们将梯度材料分成若干层并假设每层的材料参数为常数。Wang et al (2003) 给出了另一种分层模型, 每层的材料参数线性变化, 且在界面上连续。黄干云等 (2005) 对该模型做了一些改进, 计算了动、静态反平面剪切荷载和面内荷载作用下裂纹的应力强度因子。实际上, 上述分层方法是一种半解析方法, 能处理弹性参数按任意形式分布的梯度材料。

1.2.3　有限元法

用于分析梯度材料断裂力学问题的有限元法大致有三类: 传统有限元法、梯度有限元法和扩展有限元法。

许多学者采用传统有限元法分析了梯度材料中的裂纹。Simha et al (2003) 分析了含梯度夹层 CT 试件中材料非均匀性对裂纹驱动力的影响。Gu et al (1999) 分析了功能梯度材料中的平面裂纹; 分析时, 在单元的每个高斯点上采用相应位置的弹性参数; 为了模拟裂纹尖端奇异性和材料参数的变化, 裂纹尖端附近的单

元尺寸设计得足够小 (大约为裂纹长度的 10^{-5} 倍)。Kim et al (2002) 发展了梯度有限元法并计算了梯度材料中二维混合型应力强度因子, 在建立单元刚度矩阵时, 建议方法考虑了梯度材料弹性参数的整体变化。Dolbow et al (2002) 采用扩展有限元法分析了梯度材料中混合型裂纹的应力强度因子变化。

有限元法需要在域内离散及单元内插值, 精度较低。由于材料参数变化和裂纹尖端应力具有奇异性, 含裂纹梯度材料结构的有限元网格划分得非常密; 分析非弹性裂纹问题时, 单元网格划分得更密。用有限元法研究裂纹扩展问题时, 裂纹每扩展一步, 在裂纹尖端区域的有限元网格就需要重新调整和划分。因此, 有限元法分析梯度材料三维裂纹是非常麻烦的。

1.2.4 边界元法

边界元法采用解析的基本解且仅在边界上离散。它的最大特点是降低了问题的维数, 只以边界未知量作为基本未知量, 域内未知量可以在需要时根据边界未知量求出。这种方法精度较高, 对应力变化剧烈的问题比较适合, 在一些情况下比有限元法更有效。分析裂纹扩展时, 仅需要调整裂纹面上的节点分布, 这是边界元法只作边界离散的好处。因此, 边界元法是断裂力学分析的有效计算工具 (Aliabadi, 1997)。

基于 Kelvin (1848) 或 Mindlin (1936) 基本解的边界元法仅限于分析均匀或分区域均匀介质中的裂纹。人们已经发展了一些不同类型材料的基本解, 并建立了相应的边界元法。针对一些弹性参数分布形式简单的梯度材料, 有学者发展了相应的基本解, 例如, Chan et al (2004) 和 Martin et al (2002) 分别获得了弹性参数按指数形式变化的二维和三维梯度材料的基本解。利用这些基本解可以建立相应的边界元法来分析梯度材料中的裂纹问题。实际上, 梯度材料参数的分布有多种形式, 指数形式的梯度材料只是为了便于分析而采用的。对于一些材料参数分布形式复杂的梯度材料, 其基本解很难获得。

Gao et al (2008) 基于 Kelvin 基本解建立了边界 - 域积分方程, 并发展了相应的数值方法分析梯度材料中的二维裂纹。据笔者对中英文文献的了解, 尚没有见到其他采用边界元法分析梯度材料中裂纹应力强度因子和裂纹扩展的研究成果。

1.2.5 无单元法

无单元法求解复杂边界条件的边值问题时, 只需在域内和边界上布置节点, 提供节点信息而不需单元信息, 故需要准备的信息简单。陈建等 (2000) 采用无单元 Galerkin 方法分析了功能梯度材料板中边沿裂纹的应力强度因子。何沛祥

等 (2002) 采用无单元 Galerkin 方法分析了非均匀材料的弹性力学问题。Rao et al (2003) 也采用无单元 Galerkin 方法计算了任意几何形状各向同性梯度材料中二维静态裂纹的应力强度因子。Sladek et al (2005) 采用无单元 Petrov-Galerkin 方法分析了梯度材料中动态荷载作用下的裂纹问题。目前, 无单元法仅限于用来分析梯度材料中的二维裂纹问题。

1.3　本书的研究方法和内容安排

当梯度材料力学参数分布形式复杂时, 其基本解很难得到。这就限制了采用边界元法分析梯度材料断裂力学问题。Yue (1995a) 推导了无限域层状材料闭合形式的基本解 (以下简称 Yue 基本解)。Yue 基本解有两个显著的特点: 一是层状材料的层数可以取任意整数, 二是基本解用基本函数和特殊函数表示, 可以获得任意给定精度的应力和位移解。

采用 Yue 基本解分析材料参数按任意形式分布的梯度材料时, 可将材料沿梯度方向离散为层状材料, 每一分层为均匀材料, 弹性参数按该层所在位置取值。显然, 当梯度材料的分层数趋于无穷时, 就能非常准确地逼近梯度材料参数的变化。实际分析时, 并不需要将梯度材料划分为层数无穷的层状材料, 只要梯度材料的分层数足够大就可以获得令人满意的精度 (Yue et al, 1999)。基于这种研究思想, 笔者建立和发展了 Yue 基本解的边界元法, 分析梯度材料中裂纹的应力强度因子和扩展问题。笔者发展的边界元法有两种类型: 子域边界元法和单一区域边界元法 (即对偶边界元法)。这些研究成果大多已在相关国际国内学术期刊上发表。笔者将这些研究成果系统地汇总在本书中, 以方便读者阅读。

本书的内容安排如下。第 2 章将介绍梯度材料弹性力学和断裂力学的基本概念。第 3 章将介绍层状材料的 Yue 基本解。第 4、5 章将建立基于 Yue 基本解的位移边界积分方程, 发展相应的边界元法, 为提高裂纹的分析精度引入面力奇异单元, 编写相应的 Fortran 程序, 并进行算例验证。第 6、7 章将发展的边界元法用于分析梯度材料中圆盘状和椭圆盘状裂纹的应力强度因子, 并讨论裂纹扩展方向和临界荷载。第 8 章将建立基于 Yue 基本解的位移和面力边界积分方程, 发展相应的边界元法, 即对偶边界元法, 并编写相应的 Fortran 程序, 进行算例验证。第 9 章将用建议的对偶边界元法分析无限域和有限域梯度材料中矩形裂纹的应力强度因子, 并采用建议方法分析层状岩体中裂隙的断裂力学特性。第 10 章将基于双层横观各向同性材料基本解 (Yue, 1995b), 发展该类材料的子域边界元法和对偶边界元法, 分析该类材料中圆盘状、椭圆盘状裂纹和矩形裂纹的断裂力学特性。第 11 章将对本书研究内容进行总结, 给出下一步研究工作的建议。

参考文献

陈建, 吴林志, 杜善义. 2000. 采用无单元法计算含边沿裂纹功能梯度材料板的应力强度因子 [J]. 工程力学, 17(5): 140 - 144.
程站起, 仲政. 2007. 功能梯度材料涂层平面裂纹分析 [J]. 力学学报, 39: 685 - 691.
范天佑. 2003. 断裂理论基础 [M]. 北京: 科学出版社.
何沛祥, 李子然, 冯淼林, 等. 2002. 非均匀材料无网格 Galerkin 法 [J]. 机械强度, 24(1): 70 - 72.
黄干云, 汪越胜, 余寿文. 2005. 功能梯度材料的平面断裂力学分析 [J]. 力学学报, 37: 1 - 8.
王保林, 韩杰才, 张幸红. 2003. 非均匀材料力学 [M]. 北京: 科学出版社.
Aliabadi M H. 1997. Boundary element formulations in fracture mechanics [J]. ASME Applied Mechanics Reviews, 50: 83 - 96.
Birman V, Byrd L W. 2007. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures [J]. ASME Applied Mechanics Reviews, 60(1 - 6): 195 - 216.
Chan Y S, Gray L J, Kaplan T, et al. 2004. Green's function for a two-dimensional exponentially graded elastic medium [J]. Proceedings of the Royal Society, A460, 2046: 1689 - 1706.
Craster R V, Atkinson C. 1994. Mixed boundary value problems in non-homogeneous elastic materials [J]. The Quarterly Journal of Mathematics, 47: 183 - 206.
Delale F, Erdogan F. 1983. The crack problem for a nonhomogeneous plane [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 50: 609 - 614.
Dolbow J E, Gosz M. 2002. On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials [J]. International Journal of Solids and Structures, 39: 2557 - 2574.
Erdogan F. 2000. Fracture Mechanics [J]. International Journal of Solids and Structures, 37: 171 - 183.
Gao X W, Zhang Ch, Sladek J, et al. 2008. Fracture analysis of functionally graded materials by a BEM [J]. Composite Science and Technology, 68: 1209 - 1215.
Gibson R E. 1967. Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic layer [J]. Geotechnique, 17: 58 - 67.
Gu P, Dao M, Asaro R J. 1999. A simplified method for calculating the crack-tip filed of functionally graded materials using the domain integral [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 66: 101 - 108.
Ito S. 2001. Stress intensity factors around a crack in a nonhomogeneous interfacial layer between two dissimilar elastic half-planes [J]. International Journal of Fracture, 110: 123 - 135.
Jin Z H, Paulino G H. 2002. A viscoelastic functionally graded strip containing a crack subjected to in-plane loading [J]. Engineering Fracture Mechanics, 69: 1769 - 1790.
Kim J H, Paulino G H. 2002. Finite element evaluation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 53: 1903 - 1935.
Martin P A, Richardson J D, Gray L J, et al. 2002. On Green's function for a three-dimensional exponentially-graded elastic solid [J]. Proceedings of the Royal Society, A458, 2024: 1931 - 1947.
Meguid S A, Wang X D, Jiang L Y. 2002. On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials [J]. Engineering Fracture Mechanics, 69: 1753 - 1768.
Mindlin R D. 1936. Force interior to one or two joined semi-infinite half-space [J]. Journal of Applied Physics, 79: 195 - 202.
Ozturk M, Erdogan F. 1996. Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region [J]. International Journal of Solids and Structures, 33:

193 - 219.

Pei G, Asaro R J. 1997. Crack in functionally graded materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 34: 1 - 17.

Rao B N, Rahman S. 2003. Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials [J]. Engineering Fracture Mechanics, 70: 1 - 27.

Simha N K, Fischer F D, Kolednik O, et al. 2003. Inhomogeneity effects on the crack driving force in elastic and elastic-plastic materials [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51: 209 - 240.

Sladek J, Sladek V, Zhang Ch. 2005. A meshless local boundary integral equation for dynamic anti-plane shear crack problem in functionally graded materials [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 29: 334 - 342.

Suresh S. 2001. Graded materials for resistance to contact deformation and damage [J]. Science, 292(29): 2447 - 2451.

Thompson W (Lord Kelvin). 1848. Note on the integration of equations of equilibrium of an elastic solid [J]. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1: 97 - 99.

Wang Y S, Huang G Y, Gross D. 2003. On the mechanical modeling of functionally graded interfacial zone with a Griffith crack: anti-plane deformation [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 70: 676 - 680.

Yue Z Q. 1995a. On generalized Kelvin solutions in a multilayered elastic medium [J]. Journal of Elasticity, 40: 1 - 43.

Yue Z Q. 1995b. Elastic fields in two joined transversely isotropic solids due to concentrated forces [J]. International Journal of Engineering Sciences, 33: 351 - 369.

Yue Z Q, Yin J H. 1998. Backward transfer-matrix method for elastic analysis of layered solids with imperfect bonding [J]. Journal of Elasticity, 50: 109 - 128.

Yue Z Q, Yin J H, Zhang S Y. 1999. Computation of point load solutions for geo-materials exhibiting elastic non-homogeneity with depth [J]. Computers and Geotechnics, 25: 75 - 105.