公理集合论导引

戴牧民　陈海燕　郑顶伟　编著

科学出版社

公理集合论导引

戴牧民　陈海燕　郑顶伟　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是公理集合论的入门书. 先介绍了集合论形成和发展的历程, 公理化问题的由来, 公理化的意义. 其次按 ZFC 公理系统逐步介绍各条公理, 数系的构建, 序数和基数的理论, 以及在拓扑学研究上常用的一些知识(包括闭无界集、稳定集与 Pressing Down 引理, Δ系统与Δ系统引理, 滤子与超滤, 树和树拓扑等). 与此同时, 还介绍了一些对集合论本身及在拓扑学研究中极有价值的, 与 ZFC 公理系统独立的集论命题(包括连续统假设, Martin 公理). 最后, 简略介绍了有关集合论命题与 ZFC 公理系统相容和独立的问题.

本书可作为大学数学专业高年级本科生、研究生的公理集合论课程的教材, 也可作为高校相关专业教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

公理集合论导引/戴牧民, 陈海燕, 郑顶伟编著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-031276-1

Ⅰ. ①公… Ⅱ. ①戴… ②陈… ③郑… Ⅲ. ①集论 ②公理 (数学) Ⅳ. ①O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 101507 号

责任编辑: 王丽平 杨欣河 / 责任校对: 赵桂芬

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2011 年 6 月第一次印刷 印张: 9

印数: 1—2 500 字数: 166 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

众所周知, 集合以及有关集合的基本理论是 19 世纪五六十年代 G. Cantor 在研究三角级数收敛性问题时引出来的. Cantor 除了研究直线和平面的点集外, 还研究了非常一般的集, 并奠立了序数 (超限数)、超限基数 (阿列夫 $\aleph$) 等崭新的 "数", 明确地赋予了 "实无限" 以坚实的地位. 由于这些思想超越了他所处的时代, 以致在一段时间里为许多著名的数学家所误解, 被视为惊世骇俗的怪物. 比如 Poincaré就曾经说: "下一代人将会把集合论当作一种病态." Kronecker 认为 Cantor 在这方面做的工作不是数学, 而是玄学, 甚至认为 Cantor 是个骗子. 但是, "青山遮不住, 毕竟东流去", 随着数学由古典走向现代, Cantor 所开创的集合论逐步走上数学历史的前台. 进入 20 世纪, 集合的概念与基本理论已经深深渗透到现代数学的各个分支, 可以说它已经是构成整个现代数学的基础之一.

当然, 集合论的发展也经历了一个迷惘和痛苦的历程. 由于初期对集合界定上的不明确性, 在 19 世纪末 20 世纪初终于出现了震惊数学界的 "悖论"——Burali-Forti 悖论和 Russel 悖论. 为了克服这些悖论造成的混乱, 加上公理化思潮的推动, 集论与数理逻辑紧密结合经历了一个严厉的审查、批判过程, 走向了公理化的道路. 这就是由 Zermelo 最先提出, 后来由 Fraenkel 等人完善的 **ZF** 集论公理系统.

拓扑学的形成时间与抽象代数、泛函分析等的形成时间差不多, 大致在 20 世纪一二十年代. 它们都是数学走向综合、抽象和公理化大趋势之下的产物. 它们的特点都是对具体数学对象作出概括, 提炼出它们的本质特征, 然后形成一系列抽象的概念 (群、环、线性空间、代数、度量空间、拓扑空间、映射、算子等) 和各种公理系统, 然后根据有关的公理系统对这些高度抽象出来的数学对象展开研讨. 其中拓扑学从诞生开始, 就根据所研究对象的侧重面 (几何性强的, 如曲线、曲面、流形等; 一般集合)、研究的主要工具 (代数的、分析的、集合论的 $\cdots$) 大体上分成了代数拓扑学、几何拓扑学、微分拓扑学、点集拓扑学 (一般拓扑学) 等学科分支. 其中点集拓扑学研究的对象是几何特征比较弱的一般拓扑空间, 因而集论就成为研究它的最重要的工具.

20 世纪 40 年代后期至 50 年代初, 由于 Dieudonne 提出了局部有限族和仿紧空间的概念, Bing, Nagata, Smirnov 关于拓扑空间度量化问题的解决, 以及稍后

Michael 关于仿紧空间的深入研究, 极大地推动了点集拓扑学的发展, 研究成果纷纷涌现, 但同时也出现了许多悬而未决的困难问题. 恰好 1963 年 Cohen 创立了 "力迫法", 解决了连续统假设与 **ZF** 系统的独立性问题. 以此作为契机, 许多独立于 **ZFC** 的集论命题纷纷涌现, 并且迅速地在拓扑学中得到应用, 成为解决问题的强有力工具, 乃至形成了 "集论拓扑学" 这样一个分支. 点集拓扑学发展到今天, 掌握足够的集论知识和必要的集论技巧已成为从事拓扑学研究工作的必需. 改革开放以来, 国内许多大学在培养拓扑学方向的硕士研究生时都把集论作为一门重要的必修课程, 我们自 80 年代起也是这样做的. 在开设集论这门课时, 一直是以 H. B. Enderton 的*Elements of Set Theory*这本书作为主要参考书的. 但是这本书仅仅对 **ZFC** 系统作了讲述, 没有介绍 **CH**、Martin 公理等在拓扑学上广泛使用并且行之有效的集论命题. 有鉴于此, 在讲授这门课时, 通常还需要补充介绍这方面的一些内容.

关于公理集论, 还有两本书可资参考. 一本是汪芳庭的《公理集论》, 它除了介绍 **ZFC** 系统外, 还介绍并论证了 Gödel 关于可构造集与可构造性公理 **V=L** 以及 **CH**、**GCH** 与 **ZFC** 系统相容的证明, Cohen 的力迫法和 **CH** 与 **ZFC** 系统独立的证明, 但没有介绍有关 Martin 公理和集论中极为重要的有关树的知识. 另一本是 K. Kunen 的*Set Theory ——An Introduction to Independence Proofs*. 这本书内容丰富, 论述也很精彩, 但是相当专业, 一般初学者很难读懂. 实际上学习拓扑学也不需要这么专业的集论知识.

我们编写这本书, 其主旨是为一般拓扑学研究生提供合适的公理集论参考读物. 根据内容全书分为上、下两篇. 上篇共有 10 章, 围绕 **ZFC** 公理系统展开讨论, 介绍集论的基础知识, 包括集论的公理化问题, 集的基本运算, 关系与函数, 自然数(与数系), 正序集与序数, 基数, 集的良基性, 闭无界集、稳定集与 Pressing Down 引理等. 我们认为这些都是必要的教学内容, 大致需要 60 个课时可以学完. 下篇 5 章, 主要针对一些与一般拓扑学密切相关的内容进行介绍, 包括几乎互斥族、独立族、Δ 系统与 Δ 系统引理, 超滤和 Stone-Čech 紧化、树的基本知识与树拓扑、**CH**, **wCH** 和它们的一些推论、Martin 公理及其一些推论. 其中也包括它们在拓扑学方面的一些简单应用. 这些内容在教学时可以根据具体情况适当挑选一部分来讲解. 除此之外, 附录还简单介绍了形式系统、模型、相对化与绝对性、集论命题与 **ZF** 公理系统的相容性与独立性问题. 这里没有详细展开论证, 只是着眼于介绍必要的概念以及解决的基本思路. 它可以作为课外补充读物, 使读者对公理系统的相容性与独立性问题及其解决有大致的了解.

本书是根据我们在广西大学数学与信息科学学院多年从事集论课程的教学实

践基础上编写而成的. 在编写过程中得到了学院领导及众多同事热情的鼓励与帮助, 同时本书的编写也获得了广西科学基金项目 (桂科字 0728035) 的部分资助. 在此谨向支持和鼓励我们的朋友们表示衷心的感谢. 另外, 由于学力有限, 书中一定会有一些错误和不足之处, 在此也衷心欢迎读者予以批评和指正.

作　者

2011 年 4 月

目　　录

下　篇

上　　篇

第 1 章　集论的公理化问题

1.1　集论公理化的背景

关于集合的研究, 肇端于 19 世纪 50 年代 Cantor 关于三角级数收敛性的工作. Cantor 系统地研究了直线和平面点集并开展了超限数 (序数) 和基数的研究. 随后集的观念, 集论的方法逐步渗透到数学学科的各个领域. 但当时关于集的概念以及关于集的构成方式, 都没有严格的规范, 也没有意识到这种随意性会出现什么严重的问题. 这种集论我们通常称之为 “朴素集论”(naive set theory). 直到 19 世纪末 20 世纪初, 随着逻辑上悖论的发现, 人们才重新审视原先所使用的关于集的概念, 集的构成规则中的疵病, 进而走上公理化的道路.

集论的公理化研究产生于 20 世纪初, 它是数学走向成熟的一个重要标志, 其出现有着深刻的背景.

1.1.1　数学研究对象的多样化与抽象化呼唤数学的统一

古代的人们对于数学对象的认识都是从直观的、可以眼见或可以把握的事物抽象出来的, 具体说就是简单的几何图形和自然数. 针对几何图形和自然数的研究分别形成了几何和算术两门学科. 虽然二者之间存在着数量的联系, 但是从来没有人意识到需要把几何图形与数从本质上统一起来. 这一观念延续下来, 经历了漫长的中世纪, 一直到 17 世纪笛卡儿创立坐标系和解析几何, 才在形式上统一了代数和几何这两门学科. 但这毕竟还只是形式上的统一, 也就是说只是建立了几何图形与代数对象之间的对应关系, 比如直线与二元一次线性方程, 圆周、椭圆、双曲线、抛物线与二元二次方程, 空间中的平面与三元一次方程, 球面与三元二次方程, 等等. 而在人们的观念中, 几何中的点还是点, 曲线还是曲线, 它们与数对、方程式在本质上还是不相同的.

18 世纪后, 数学进入了一个繁荣发展的时期, 比简单的几何图形和数更为复杂的 “函数” 成了数学研究的核心对象. 数学的后续发展无论在研究领域的广度上, 还是在研究内容的深度上都是古典数学望尘莫及的. 比如说, 数的观念呈现出从自然数 — 整数 — 有理数 — 实数 — 复数 — 四元数 — 超复数这样由简到繁的发展脉络.

分析数学也经历了从初等函数到一般的实变量函数和复变量函数, 再到函数的函数 (泛函), 再到函数的函数的函数等越来越复杂的对象的研究.

几何则经历了从直线、平面、立体图形到曲线、曲面、再到流形、连续统等有限维几何对象, 再到函数空间、度量空间、拓扑空间等无限维几何对象研究的发展.

代数研究对象: 从传统的多项式, 方程式发展到对向量空间及线性变换的研究, 进一步发展到对抽象的群、环、域、模、格等代数系统的研究.

集论: 从直线、平面点集等比较具体的对象转向一般的集合以及超限数、序数、序型、势 (基数) 等的研究.

这些缤纷万象的数学对象不断涌现, 促使数学家们企图深入追究它们最根本的始源, 期望它们能够统一于某种 (或某些) 最基本、最原始的东西.

这种愿望或思想乃是人类认识发展过程中的基本理念之一. 古代中国有道、气等一元论学说和阴阳、五行等多元论学说; 古希腊有水、火等一元论学说, 原子与虚空的二元论学说和土、水、火、气四元素说等. 它们都是这种观念的体现.

我们还可以通过物理学的发展来看物理学家是如何追求对物质世界认识的统一过程的. 最初, 他们把物质世界中的万物看成是由最小的单元 —— 分子组成的, 后来又发现分子并不是组成物质的最小单元, 于是提出了新的原子论. 随着放射性的发现以及电子的确认, 人们认识到原子又由更小的原子核、电子等组成. 接下来质子、中子、电子、光子、中微子等陆续被发现, 于是形成了基本粒子族的概念. 进入 20 世纪 60 年代, 进一步提出了夸克理论, 于是现代物理学家们普遍认为宇宙万物统统都由夸克和轻子组成, 并通过交换各种玻色子来实现彼此之间的相互作用. 因此从实物的角度看, 宇宙万物在组成方面实现了统一.

对于物质的运动, 牛顿之前只有机械力、静电、磁铁的吸引力和排斥力的概念. 牛顿把一切机械运动归结为三大定律, 他还发现了万有引力, 并且描述了万有引力定律. 进入 19 世纪, 随着对电磁现象的深入观察和研究, 形成了统一描述电磁现象的理论 —— 麦克斯韦电磁场方程. 20 世纪原子核裂变的发现, 出现了弱相互作用和强相互作用的概念, 于是宇宙万物之间的所有相互作用被统一于电磁力、弱力、强力和引力四种基本的相互作用. 到了 60 年代, 确立了弱、电统一的理论, 70 年代又出现了统一弱力、电磁力和强力三种相互作用的所谓 “大统一” 理论 (grand unification theory, GUT). 70 年代中期开始, 人们又进一步转向超弦理论和 M 理论的研究, 企图把引力也统一进来, 寻求所谓 “万物之理” (theory of everything, TOE). 这项工作虽然尚未完成, 但它充分显示出了一些物理学家追求包罗万象的统一的那种强烈信念.

这种对于纷纭的事物极力寻求终极统一的理念, 无疑也是数学寻求统一的深刻动因.

1.1.2 逻辑悖论的出现对公理化提出了强烈的需求

由于集的概念的模糊性导致的 Russell 悖论、Burali-Forti 悖论等, 深深地动摇

了数学原以为十分牢固的基础, 加上 19 世纪末逻辑学中关于悖论深入、理性的分析, 使人们有必要、也有可能对构成整个数学的基础进行一次深刻的批判和分析. 这项工作的体现就是 20 世纪开始的数学哲学的百家争鸣和数理逻辑的现代化. 集论的公理化和相容性、独立性研究就是这一发展潮流的产物.

所谓悖论 (paradox), 就是从看似合理的前提出发, 经过一系列的推理步骤, 最终却得出一个与前提相悖或者违反常识的结论. 它早在公元前几个世纪就已经出现. 比如

1. Zeno 提出的 "阿契里斯追龟" 悖论: 传说中跑得飞快的勇士阿契里斯永远追不上一只在他前面爬的乌龟.

2. Epimenides 的 "撒谎者悖论": Epimenides 本身是一个克利特岛人. 他宣称: "所有的克利特人都是撒谎者."

3. 《庄子》里记载的惠施的 "一尺之棰, 日取其半, 万世不绝" 的论断.

4. 韩非子的 "以子之矛, 陷子之盾" 的两难命题.

5. 墨子学派提出的 "飞矢之疾, 而有不行不止之时" 的佯谬.

后来, 许多更为精致的悖论纷纷提了出来. 如

6. 修正了的撒谎者悖论: Epimenides 宣称: "所有的克利特人从来都不说真话." 那么 Epimenides 说的是真话? 还是假话?

7. 一块黑板上只写了这么一句话 ——"黑板上的这句话是假的! ". 那么黑板上写的这句话到底是真的? 还是假的?

8. 理查德悖论: 任何一个有关自然数的性质都可以用一个有限长的句子予以表述. 由于所有的有限长句子可以按字典序方式编号, 而每个句子的编号号码也是一个自然数. 如果某个自然数 n 正好具有编号为第 n 号所表述的性质, 就称 n 没有理查德性质, 否则称为具有理查德性质. 假设 "具有理查德性质" 的句子被编在第 m 号, 那么数 m 有或没有理查德性质都会导致矛盾.

9. Berry 悖论: "*The least natural number which can not be described in at most a hundred letters* (不能用不超过 100 个字母来表述的所有自然数中最小的那个数)." 根据自然数的性质, 这样的数是存在并且唯一确定的. 但是这个数恰恰只用 80 个字符 (包括空格) 就可以精确地表述出来. 这就导致了矛盾.

10. Russell 悖论: 设 $M = \{x : x \notin x\}$, 即 M 是所有那些满足 $x \notin x$ 的集 x 组成的集.

(1) 若 $M \in M$, 则 M 应当满足条件 $M \notin M$. 导致矛盾.

(2) 若 $M \notin M$, 则 M 不满足条件 $M \notin M$, 即应当有 $M \in M$. 也导致矛盾.

这些悖论中, 有些悖论在理解了时空无限可分和形成了极限的观念之后就能够获得合理的解决 (如例 1, 2, 3, 5), 有些则属于所谓的 "语义学" 悖论 (如例 2, 5, 7, 8, 9). 而 Russell 悖论则属于逻辑-数学悖论之列. 正因为它涉及的是构成数学

最基础的集论领域, 所以它对数学的震撼如此之巨, 以至于法国的数理逻辑学家 G. Frege 在他刚刚完成的专著《算术基础》中写道: “一个科学家不会碰到比这更令人尴尬的事情了, 即在一项工作完成之时它的基础却在崩溃. 当这部著作即将付印之际, 罗素先生的一封信就使我处于这种境地.”

为此, 人们希望能够建立一个严格的 “立法” 程序, 规定什么样的手段构造或生成的集才算是合法的, 哪些手段是禁止的, 以保证所有这些悖论不会出现.

1.1.3　19 世纪后期兴起的公理化思潮为集论的公理化提供了动机和背景

公元前 200 年左右形成的欧几里得几何, 是公理化研究最早的和成功的尝试. 但是, 它本身还存在一些不完善的地方. 一方面, 在欧几里得展开他的公理化论证中, 不自觉地使用了一些自明的但并不属于他所列举出的公理系统内能够刻画出的概念和命题; 另一方面, 它的第五公设 —— 平行公设, 比起另外几条公设来说, 其正确性更带有非先验的成分. 这就招致了众多的后人力图通过其他公理和公设去证明它. 多次的失败, 最终导致了非欧几何的产生 (罗巴切夫斯基、波利亚、高斯、黎曼), 最后才由 Hilbert 完成了几何的公理化.

1889 年, Peano 提出了自然数公理化系统. Kronecker 则开展了群论的公理化研究. G. Frege 完成了关于命题演算系统和谓词演算系统的公理化.

这些数学领域的公理化尝试激励并带动了众多其他领域的公理化, 使得进入 20 世纪后形成了一个公理化的思潮. 集论的公理化也是顺应这一潮流的产物.

1.2　集论公理化企图实现的目标

1. 统一现代数学所有的研究对象, 把它们最终归结为一种东西, 在这个集论公理系统内能够涵盖整个数学;

2. 避免所有迄今为止已经发现的各种悖论;

3. 尽量做到

(1) 合理 (本身不包含内在矛盾, 即具有协调性、相容性或无矛盾性);

(2) 完美 (完全性、完备性, 即系统内所有有意义的命题都可以证明或否定, 判定其真伪);

(3) 明晰、简洁 (除了逻辑符号 $=, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ 和逻辑变元之外, 要求尽量少地包含非逻辑符号, 所挑选的公理应尽可能少, 没有冗余的、超出数学所必需的东西).

1.3　集论公理化的历史

1. E. Zermelo 于 1908 年首次提出一个公理系统的框架. 1922 年 A.Fraenkel 补

充了一条取代公理图式. 再加上 Zermelo 提出的选择公理, 就构成了我们今天通用的 **ZFC** 公理系统.

2. J. von Neumann 1925 年也提出了一个公理系统, 1937 年由 Bernays 予以完善, 1940 年再由 K. Gödel 进一步系统化, 形成了所谓的 **NBG** 公理系统.

这两个系统最大的不同之处是, 在 **ZF** 系统中, 只容许集的存在, 而类则是属于系统之外的东西, 而在 **NBG** 系统中, 类是系统内合法存在的东西, 而集则仅仅是一种特殊的类.

除了 **ZF** 和 **NBG** 两种集论公理系统外, 1937 年 Quine 还提出过 New Foundations 系统 (**NF** 系统). 经过数学界长年的自然选择, 现在绝大多数人都接受了 **ZF** 系统.

现在我们有了一个 **ZF(ZFC)** 公理系统. 下面来讨论几个问题.

第一个问题是, 它是否能够涵盖全部数学呢? 现在看来似乎不行, 因为有些新兴的数学分支 (如范畴理论和同调代数等) 必须将比集更广的类包含在内作为它的研究对象. 数理逻辑中的一些分支也不只是集论的衍生物. 但是 **ZF** 公理集论确实是足以把现有数学的绝大部分研究对象纳入它的框架的.

第二个问题是, 它能否保证自身是相容的, 即保证能够避免出现已经发现以及将来可能会发现的矛盾呢? 这个问题的回答分为两个方面. 一方面, 由于 **ZF** 系统严格地规定了适用的符号和造句规则, 它可以避免各种语义学方面的悖论, 又通过精心选择所提出的公理条文, 它也避免了迄今已发现的各种逻辑悖论. 这是它成功的一面; 但另一方面, Gödel 1935 年发现的第二不完全性定理指出, 凡是一个能够包含自然数算术的形式理论, 其本身的相容性是不能在该系统内得到证明的. 这样我们就无法在 **ZF** 系统内部来证明它的相容性, 也就是说无法保证 **ZF** 系统绝不会出现新的逻辑矛盾. 正像 Poincaré说的: “为了防备狼, 人们用篱笆把羊群圈起来了, 但是谁也没法保证在羊圈中再也不会有狼.”

所以我们眼下只能把 **ZF** 系统的相容性当作一种信念, 不加怀疑地接受它 (至于选择公理, 历来就存在争议, 此处就不讨论了).

第三个问题是它的完备性问题, 即按照 **ZF** 系统规定的语法写出来的每一个命题, 其真伪性是否都能够判断清楚, 即或者可以证明它正确, 或者可以证明它不正确? 这个问题的答案是否定的. Gödel 的第一不完全性定理表明, 凡是一个能够包含自然数算术的形式理论, 必定存在一个真命题, 但这个命题在该系统内是不能证明的. 事实上, 很多命题, 像连续统假设, 选择公理, Suslin 猜想等, 都已经证明它们的真伪性在 **ZF** 系统中是不可判定的.

第四个问题是它的简练性问题. **ZF** 系统包含了 7 条公理和 2 条公理图式, 但它们并不是彼此完全独立的, 其中包含了一些多余的东西 (比如子集公理图式, 配对公理就可以从其他公理推出来). 只是出于尊重历史和遵循习惯, 我们才没有因