新世纪
面向21世纪高等院校教材

线性代数

主编 富爱宁 王 娜 冯 艳

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}$$

大连理工大学出版社

新世纪

面向21世纪高等院校教材

线性代数

主编 富爱宁 王 娜 冯 艳
副主编 罗敏娜

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}$$

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 富爱宁，王娜，冯艳主编. —大连：
大连理工大学出版社，2010.8(2010.11 重印)
面向 21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-5611-5690-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①富… ②王… ③冯… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 147723 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:10.75 字数:248 千字
印数:2001～5000
2010 年 8 月第 1 版 2010 年 11 月第 2 次印刷

责任编辑:欧阳碧蕾 责任校对:童 强
封面设计:张 莹

ISBN 978-7-5611-5690-2 定 价:22.00 元

前　言

为适应21世纪普通高等院校学生对数学的需求，多年来我校在教学改革方面进行了一定的探索，结合理工、经济等专业对线性代数课程的基本要求，再参照教育部最新颁布的研究生入学数学考试的考试大纲编写《线性代数》．本教材着重介绍了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法．

与同类教材相比，本教材主要突出了如下特点：

1．本教材起点低，坡度高，起点和中学代数相接轨，随着章节展开而步步深入．

2．本教材以讲授线性代数基本知识、基本方法为主，力保数学知识的系统性和连贯性，注重对解题方法的归纳和总结．

3．本教材每章最后均有本章小结，将每章的主要概念、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳，并附有知识体系图，更好地帮助学生复习和巩固所学的内容．

4．本教材中配备很多的典型例题，并通过对一些有代表性的典型例题的分析和求解，归纳出求解该类习题的方法和技巧，使学生在日后的学习中“有法可依”．

5．本教材每章后配备的习题分为两类，一类是体现教学基本要求的习题，供学生平时的练习和巩固；另一类是自测题，供学生进行一章的复习与检验．书末给出了对应习题与自测题的参考答案，供学生参考．

6．注意到线性代数在其他学科的渗透和应用，在篇幅允许的情况下，尽量予以提及．

本教材共六章，主要内容包括：行列式、矩阵、向量和线性方程组、特征值和特征向量、二次型和线性代数在经济中的案例分析．每章都有习题和自测题并配有答案，各章末均有本章小结，第六章除外．本教材授课学时建议50学时左右，第六章可作为参考资料学习．

本教材由沈阳师范大学的富爱宁、王娜、冯艳担任主编，由沈阳师范大学的罗敏娜担任副主编．本教材的第1章由罗敏娜

编写，第 2 章由富爱宁编写，第 4、5 章由王娜编写，第 3、6 章由冯艳编写. 最后由罗敏娜、王娜审阅了全书并负责修改定稿.

与本教材配套的有习题课教材、电子教案. 本教材读者对象为高等院校理工、经管、医药、旅游等专业的大学生和教师，也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书.

本教材在编写过程中得到各界广泛的支持，在此一并表示衷心的感谢！由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者不吝赐教.

所有意见和建议请发往：dutpbk@163.com
欢迎访问我们的网站：http://www.dutpgz.cn
联系电话：0411-84707492 84706104

编 者

2010 年 8 月

内容简介

本书是普通高等学校非数学专业的线性代数教材，全书共六章，主要内容包括：行列式、矩阵、向量和线性方程组、特征值和特征向量、二次型和线性代数在经济中的案例分析. 每章都有习题和自测题并配有答案，各章末均有本章小结，第六章除外.

与本书配套的有习题课教材、电子教案. 本书读者对象为高等院校理工、经管、医药、旅游等专业的大学生和教师，也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书.

目　录

第 1 章

行列式

线性代数是中学代数的继续和提高，而行列式是研究线性代数的基础工具，也是线性代数中的一个重要概念，它广泛应用于数学、工程技术及经济等众多领域.

本章首先介绍预备知识，接下来从低阶行列式入手，给出行列式的一般定义；然后讲解行列式的性质和计算方法；最后研究任意阶线性方程组的行列式解法——克莱姆法则.

§1.1 预备知识

为了课程内容的叙述简洁和学生学习方便，先介绍一些符号和基础知识.

1.1.1 和号和积号

1. 和号

如 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$，表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的连加和. 其中 i 称为下标，下标是虚拟变量，可由任意字母替代，如 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{t=0}^{n-1}a_{t+1}$.

在本课程中，我们还要采用双重和号，如

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}+\cdots+a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn},$$

表示 $m\cdot n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的连加和.

2. 积号

在学习中还要用到求积的符号，如 $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2a_3\cdots a_n$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的连乘积. 再如

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$$

表示所有可能的 $(x_i-x_j)\,(i>j)$ 的连乘积.

1.1.2 排列及其性质

在 n 阶行列式的定义中，要用到 n 阶排列的一些性质，先介绍排列的定义.

定义 1 由自然数 $1,2,3,\cdots,n\,(n>1)$ 组成的一个无重复有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，称为

一个 n 级排列.

【例 1】 由自然数 1,2,3 可组成几级排列?分别是什么?

解 组成一个三级排列,它们是 123,132,213,231,312,321.

显然,三级排列共有 $3!=6$ 个,所以 n 级排列的总数为 $n!$ 个.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,如果较大数 i_s 排在较小数 i_t 之前,即 $i_s>i_t$,则称这一对数 i_si_t 构成一个逆序,一个排列中逆序的总数,称为它的逆序数. 可表示为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

【例 2】 求 $\tau(21534)$,$\tau(32541)$.

解 在五级排列 21534 中,构成逆序数对的有 21,53,54,因此 $\tau(21534)=3$.

在五级排列 32541 中,构成逆序数对的有 32,31,21,54,51,41,因此 $\tau(32541)=6$.

定义 3 如果排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数为偶数,则称它为偶排列;如果排列的逆序数为奇数,则称它为奇排列.

【例 3】 试求 $\tau(123\cdots,n)$,$\tau(n(n-1)\cdots321)$,并讨论其奇偶性.

解 易见在 n 阶排列 $1,2,3,\cdots,n$ 中没有逆序,所以 $\tau(123\cdots n)=0$,这是一个偶排列,它具有自然顺序,故又称为自然排列.

在 $n,n-1,\cdots,3,2,1$ 中,只有逆序,没有顺序,故有

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

可以看出,排列 $n,n-1,\cdots,3,2,1$ 的奇偶性与 n 的取值有关,从而当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时这个排列为偶排列,否则为奇排列.

定义 4 排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,交换任意两数 i_t 与 i_s 的位置,称为一次交换,记为 (i_s,i_t).

如 $21534\xrightarrow{(1,3)}23514$,一般地,我们有以下结论.

定理 1 任意一个排列经过一次对换后,改变其奇偶性(证明略).

定理 2 在全部 n 级排列中($n\geqslant 2$),奇偶排列各占一半(证明略).

§1.2 行列式的定义

为了引出行列式的一般定义,我们先介绍一下低阶行列式.

1.2.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

将 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 四个数排成两行两列的数表,记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称此为二阶行列式.

用 D 表示,并规定 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,其中 a_{ij} 叫做二阶行列式的元素,元素

a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，第二个下标 j 称为列标. 如 a_{12} 表示这个元素位于第一行、第二列.

上述二阶行列式可用对角线法则记忆，如图 1-1.

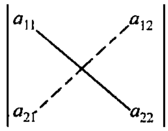

图 1-1

把 a_{11} 到 a_{22} 的实线连接称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 虚线连接称为副对角线. 二阶行列式的值可以说成是主对角线元素的乘积减去副对角线元素的乘积.

可以看出，二阶行列式一共有 2^2 个元素，共 $2!$ 项；二阶行列式值中的每项均为选自不同行、不同列的两个元素的乘积.

【例 1】 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - (-1) \times 1 = 7.$

【例 2】 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$，问 λ 为何值时，$D \neq 0$.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2\lambda^2$，令 $D \neq 0$，则 $\lambda \neq 0$ 或 $\lambda \neq \frac{1}{2}$，故当 $\lambda \neq 0$ 或 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时，$D \neq 0$.

2. 三阶行列式

类似地，可以定义三阶行列式.

设有 9 个数排成三行三列的数表 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由上式可见，三阶行列式共有 $3! = 6$ 项，每项均为选自不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正负号. 三阶行列式可用如图 1-2 规律来记忆，称为对角线法则.

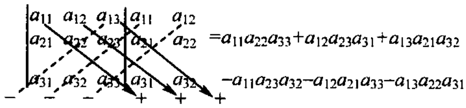

图 1-2

【例 3】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $D=1\times0\times5+3\times3\times2+2\times(-1)\times1-2\times0\times2-3\times(-1)\times5-1\times3\times1$

$=0+18-2-0+15-3=28.$

注意:对角线法则仅适用于二阶和三阶的行列式,更高阶行列式可用其他方法来计算.

1.2.2 n 阶行列式

由二阶、三阶行列式值的规律特点,不难得出:

1. n^2 个数排成 n 行 n 列,两边加竖线就是一个 n 阶行列式. 共有 $n!$ 项,每项都来自于不同行不同列的几个元素的连乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为列标的一个 n 阶排列.

2. 每项符号的确定:当列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列,该项取正号;当列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列,该项取负号. 即符号可写成$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

由此得出行列式的一般定义:

定义 1 由 n^2 个数排成 n 行 n 列,写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式,其中 a_{ij} 为第 i 行,第 j 列的元素;其值为 $n!$ 项(每一项取自不同行不同列的 n 个元素的连乘积,即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$) 的代数和. 其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列.

若用 D 表示行列式,则

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2}$$

$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 表示当行标为标准排列时,对列标的每一种排列所确定的项求和. (1.2) 是(1.1) 的展开式,从上面的分析及定义,可得到 n 阶行列式的另一种定义形式:

定义 2 $D=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$,即把列标写成标准排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为行标的一个 n 阶排列. 由此,得到行列式更一般的定义形式.

定义 3 $D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 为行标的一个 n 阶排列,$j_1j_2\cdots j_n$ 为列标的一个 n 阶排列.

【例 4】 四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 共有多少项?乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 是 D 中

的项吗?

解 共有 $4!=24$ 项. 乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 不是 D 中的一项,因为其中有两个元素 a_{12}, a_{32} 均取自第2列.

【例5】 已知 $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$,求 x^3 的系数.

解 由行列式的定义,展开式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 要出现 x^3 的项,则 a_{ij_i} 需三项取到 x. 显然行列式中含 x^3 的项仅有两项,它们是:$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 及 $(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$. 即 $x\cdot x\cdot x\cdot 1=x^3$ 及 $(-1)\cdot x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$,故 x^3 的系数为 $1+(-2)=-1$.

1.2.3 特殊行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

1. 对角行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为对角行列式.

根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 上三角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为上三角形行列式.

根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3. 下三角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为下三角形行列式.

同理可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

4. 副对角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 为副对角行列式.

根据行列式的定义得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+n}(-1)^{1+n-1}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}\left|a_{n1}\right| \\ &= (-1)^{n+n+(n-1)+\cdots+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1} \end{aligned}$$

§1.3 行列式的性质

当行列式的阶数较高时，利用定义计算行列式麻烦相当大，为了简化行列式的计算，需要研究行列式的一些性质.

1.3.1 行列式的性质

性质 1 将行列式的行、列互换，行列式的值不变.

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D^{T}=D$.

行列式 D^{T} 称为 D 的转置行列式.

注意:这一性质表明行列式中行与列的地位是对称的,也就是说凡是行列式对行成立的性质,对列也是成立的.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式的值仅改变符号.

即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　以数 k 乘行列式的某一行(列)中的所有元素,就等于用 k 去乘以此行列式.

即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 3 可得下面的推论:

推论 1　行列式一行(列)的所有元素的公因子可以提取到行列式的外面.

推论 2　如果行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式值为零.

推论 3　如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式值为零.

性质 4　如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两行列式之和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一常数后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘第 i 行加到第 j 行上,当 $i\neq j$ 时,有