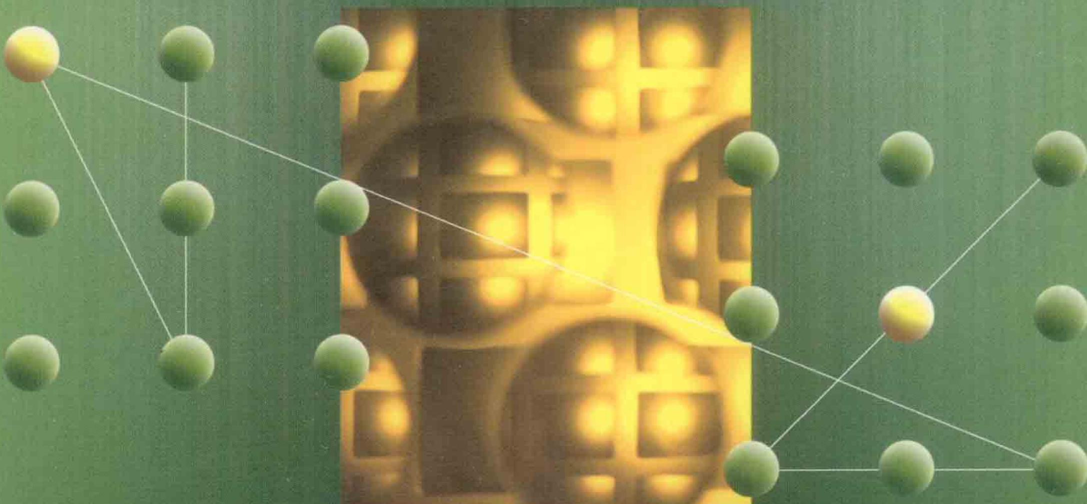
MATRIX THEORY

矩阵论

许立炜　赵礼峰　编著



科学出版社

矩　阵　论

许立炜　赵礼峰　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书比较全面、系统地介绍了矩阵的基本理论、方法及其应用. 全书共 6 章, 分别介绍了线性空间与线性变换、内积空间与等距变换、矩阵的 Jordan 标准形、矩阵分解、矩阵分析、矩阵的广义逆. 本教材不仅注重基本理论与方法，还注重理论与实践的有机结合. 每一章最后一节介绍了本章主要理论或方法在通信等领域的常见应用. 使学生能够了解矩阵理论在其他领域的广泛应用是本书一大特点. 本书文字描述清晰易懂, 层次清楚, 论证严谨, 例题、习题难易适当. 为了便于读者学习, 各章后均配有一定数量的例题、习题和参考答案.

本书可作为高等院校工科硕士研究生、工程硕士研究生的教材及教学参考书, 以及大学本科高年级学生选修课教材, 也可供自学者和有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/许立炜, 赵礼峰编著. —北京：科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-032462-7

Ⅰ. ①矩… Ⅱ. ①许… ②赵… Ⅲ. ①矩阵论-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 197641 号

责任编辑: 胡 凯 顾 艳 / 责任校对: 林青梅

责任印制: 赵 博 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 9 月第 一 版 开本: B5 (720 x 1000)

2011 年 9 月第一次印刷 印张: 12 1/4

印数: 1—3 000 字数: 240 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

电子计算机及计算技术的迅速发展为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景. 矩阵的理论和方法已成为现代科技领域中必不可少的工具. 诸如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、通信技术、图像处理、控制论、力学等学科领域都与矩阵理论有着密切的联系, 甚至在经济管理、金融、保险、社会科学等领域, 矩阵理论和方法也有着十分重要的应用. 因此, 学习和掌握矩阵的基本理论和方法, 对于工科研究生来说是必不可少的. 目前, 全国的工科院校已普遍把 "矩阵论" 作为研究生的必修课. 通过本课程的学习, 培养学生在有限维线性空间的框架下分析和解决工程实际问题的能力.

本书是为工科硕士研究生 "矩阵论" 课程编写的教材, 包含了信息类各学科专业所需要的矩阵论的基本理论、方法以及应用. 编者在南京邮电大学多年教学实践和改革探索的基础上进行编写, 不仅注重基本理论与方法, 还注重理论与实践的有机结合.

本书共 6 章. 第 1 章与第 2 章重点介绍线性空间与线性变换、内积空间与等距变换等. 这部分内容既是线性代数知识的推广和深化, 又是矩阵几何理论的基础, 熟练掌握和深刻理解它们对后面内容的学习乃至将来正确处理实际问题都有很大的作用. 第 3 章 ~ 第 5 章主要介绍 λ 矩阵与 Jordan 标准形、矩阵分解、矩阵的微积分运算及其应用. 这些内容是矩阵理论研究、矩阵计算及应用中不可缺少的工具和手段. 第 6 章介绍广义逆矩阵及其应用. 每一章最后一节介绍了本章主要理论或方法在通信等领域的常见应用. 使学生能够了解矩阵理论在其他领域的广泛应用是本书一大特点, 这在同类教材中也是独有的. 考虑到 "矩阵论" 课程的理论性强, 概念比较抽象, 本书每章精选了一定数量的习题, 供读者选用. 目录中带 $*$ 号的内容可用于选学或自学.

本书引入新概念时, 既重视几何理论, 又兼顾应用背景或具体应用; 既有系统性, 适合全面阅读 (多学时, 所需教学时数约为 60 课时), 又具有可分性, 便于选读 (少学时, 所需教学时数约为 40 课时). 本书的编排由浅入深, 阅读本书只需具备高等数学和线性代数的基本知识.

本书第 1、2、6 章由许立炜编写, 第 3、4、5 章由赵礼峰编写.

在本书编写过程中, 南京邮电大学研究生院和理学院的领导及同事给予我们很大的帮助和支持. 南京邮电大学理学院的李雷、王友国、唐加山、包刚、杨振华等老师在本教材的试用过程中都提出了许多宝贵意见, 在此谨向他们表示由衷的感谢.

限于我们学识水平有限, 加之成书时间较紧, 错误不当之处在所难免, 敬请读者和使用本教材的老师批评指正.

编著者
2011 年 6 月于南京邮电大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是线性代数中 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 以及 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换的推广. 线性空间是对所有与 n 维向量空间 R^n 具有同样性质的客观事物的数学抽象. 线性变换是线性空间 V 映入到自身的一种特殊的映射, 它保持了加法与数乘运算的对应关系. 本章介绍线性空间、线性变换的基本概念与基本理论, 这些内容既是线性代数知识的深化和提高, 也是学习本书的基础.

1.1　线性空间的基本概念

我们知道, 向量的加法与数乘有八条非常基本的运算规则; 矩阵的加法与数乘也有八条同样的运算规则; 甚至于在微积分中, 函数与函数的加法以及数与函数相乘也有八条同样的运算规则. 因此, 可以把这些不同的对象的全体抽象成为一般的集合, 同时定义具有这八条运算规则的加法与数乘运算, 这样一个抽象的代数系统就是我们所说的线性空间.

1.1.1　数域

首先我们介绍数域的概念.

定义 1.1　设P 是包含 0 和 1 的数集, 若 P 中数的和、差、积、商 (0 不作除数) 均在 P 内, 则称 P 是一个**数域**.

显然, 复数集 $\mathbf{C}$、实数集 $\mathbf{R}$ 和有理数集 $\mathbf{Q}$ 都是数域.

例 1.1　数集 $F=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbf{Q}\}$ 是一个数域.

证　容易看出, 数集 F 中任意两个数如 $a_1+b_1\sqrt{2},a_2+b_2\sqrt{2}$ 的和、差、积仍是 F 中的数, 而它们的商 (此时 a_2,b_2 不同时为 0) 为

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\left(a_2-b_2\sqrt{2}\right)}{a_2^2-2b_2^2}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}.$$

由于 a_1,b_1,a_2 和 b_2 均是有理数, 且 a_2,b_2 不同时为 0, 故 $\dfrac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$ 和 $\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$ 也是有理数, 即 $\dfrac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}\in F$, 由此证明了数集 F 是一个数域.

若集合 A 上定义了某种运算, 而 A 中任意元素进行这种运算所得的结果均仍在 A 中, 则称集合 A 对这种运算**封闭**. 这样我们就得到数域的一个等价定义:

设 P 是包含 0 和 1 的数集, 若 P 对加、减、乘、除 (0 不作除数) 运算封闭, 则称 P 是一个数域.

1.1.2　线性空间的定义与性质

1. 线性空间的定义

定义 1.2　设 V 是一个非空集合, P 是一个数域, 如果对 V 中的元素定义了两种代数运算 (其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma\in V$, $k,l\in P$):

1. 加法, 使得: $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$;

2. 数量乘法, 使得: $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ 及 $k\in P$, 有 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$;

即 V**对于加法与数量乘法运算封闭**.

如果加法运算满足下列四条运算规则:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\lambda})$;

(3) V 中有一个元素 $\mathbf{0}$, 使 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$(具有这个性质的元素 $\mathbf{0}$ 称为 V 的**零元素**或**零向量**);

(4) 对每个 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 都有一个元素 $\boldsymbol{\beta}\in V$, 使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$($\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负元素**或**负向量**, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$);

数量乘法运算满足下列两条运算规则:

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $(kl)\,\boldsymbol{\alpha}=k\,(l\boldsymbol{\alpha})$;

加法与数量乘法满足下列两条运算规则:

(7) $k\,(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(k+l)\,\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

则称 V 为数域 P 上的**线性空间**.

线性空间中的元素不论其本来面目如何, 仍叫做**向量**. 当然, 这里所说的向量比 $\mathbf{R}^n$ 的向量的含义要广泛得多. 当 $P=\mathbf{R}$ 时, V 是实数域上的**线性空间**, 简称为**实线性空间**; 当 $P=\mathbf{C}$ 时, V 是复数域上的**线性空间**, 简称为**复线性空间**. 本书中主要讨论实线性空间和复线性空间.

我们知道线性空间 V 必须对加法与数量乘法运算封闭. 因而如果 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, $\alpha\in V$, 那么对 $\forall k\in\mathbf{R}$, 都有 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$. 这说明除去 $V=\{\mathbf{0}\}$ 外, 有限个元素不可能构成一个线性空间. 下面列举一些线性空间的例子.

例 1.2　n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$(及其子空间) 按照向量的加法以及向量与实数的数乘都构成实线性空间.

例 1.3　全体 $m\times n$ 实矩阵, 在矩阵的加法及数乘两种运算下构成一个实线性空间, 记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$.

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

例 1.4　区间 $[a,b]$ 上的全体连续实函数, 按照函数的加法及数与函数的乘法构成一个实线性空间, 记为 $C[a,b]$.

例 1.5　全体次数小于 n 的实系数多项式 (包括 0), 按照通常的多项式的加法及数与多项式的乘法, 构成一个实线性空间, 记为 $P_n(x)$, 即

$$P_n(x)=\left\{p(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\,|a_i\in\mathbf{R},i=0,1,\cdots,n-1\right\}.$$

显然 $P_n(x)$ 对通常的多项式加法及数与多项式的乘法两种运算封闭.

例 1.6　全体次数等于 n 的实系数多项式, 在多项式的加法及数与多项式的乘法运算下不能构成一个线性空间. 因为加法运算不封闭, 例如, $f(x)=x^2+x$, $g(x)=-x^2+2x+1$, 此时 $f(x)+g(x)$ 不再是二次多项式.

例 1.7　齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的全体解向量, 在向量的加法及数乘两种运算下构成一个线性空间, 也就是通常所说的解空间; 而非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的全体解向量, 在上述两种运算下不构成一个线性空间.

例 1.8　仅含有零向量的集合 $\{\mathbf{0}\}$ 按照向量的加法以及向量与复数的数乘构成一个复线性空间, 称为**零空间**.

例 1.9　设 $\mathbf{R}^+$ 是所有正实数的集合, 验证 $\mathbf{R}^+$ 对如下定义的加法与数乘运算:

$$x\oplus y=xy,\quad k\circ x=x^k\quad \left(x,y\in\mathbf{R}^+,k\in\mathbf{R}\right)$$

构成实线性空间.

证　对 $\forall x,y\in\mathbf{R}^+$, 有 $x\oplus y=xy\in\mathbf{R}^+$; 又对 $\forall x\in\mathbf{R}^+,k\in\mathbf{R}$, 有 $k\circ x=x^k\in\mathbf{R}^+$, 即 $\mathbf{R}^+$ 对所定义的加法与数乘运算封闭. 又对 $\forall x,y,z\in\mathbf{R}^+,k,l\in\mathbf{R}$, 有

(1) $x\oplus y=xy=yx=y\oplus x$;

(2) $(x\oplus y)\oplus z=(xy)\oplus z=(xy)\,z=x\,(yz)=x\oplus(y\oplus z)$;

(3) $x\oplus 1=x\cdot 1=x$, 所以 1 是零元;

(4) $x\oplus x^{-1}=x\cdot x^{-1}=1$, 所以 x^{-1} 是 x 的负元;

(5) $1\circ x=x^1=x$;

(6) $(kl)\circ x=x^{kl}=\left(x^k\right)^l=l\circ\left(x^k\right)=l\circ(k\circ x)$;

(7) $k\circ(x\oplus y)=k\circ(xy)=(xy)^k=x^ky^k=x^k\oplus y^k=(k\circ x)\oplus(k\circ y)$;

(8) $(k+l)\circ x=x^{k+l}=x^kx^l=x^k\oplus x^l=(k\circ x)\oplus(l\circ x)$.

所以 $\mathbf{R}^+$ 对这样定义的加法与数乘运算构成实线性空间.

2. 线性空间的简单性质

下面我们直接从定义来证明数域 P 上的线性空间 V 的一些简单性质.

性质 1　V 中只有一个零向量.

证　假设 $\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$ 都是线性空间 V 中的零向量, 那么由 $\mathbf{0}_1$ 是零向量, 得 $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2$, 又由 $\mathbf{0}_2$ 是零向量, 得 $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_1$, 则 $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$.

性质 2　V 中每个向量只有一个负向量.

证　假设 $\boldsymbol{\alpha}$ 有两个负向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}$.

性质 3　$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$.

证　由 $\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}=(1+0)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$, 得 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

另两个关系式的证明留给读者.

性质 4　若 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证明留给读者.

1.2　基、坐标与维数

1.2.1　向量组的线性相关性

1. *有关概念*

如同 n 维向量那样, 对线性空间中的向量 (元素) 也可以讨论线性相关性.

定义 1.3　设 V 为数域 P 上的线性空间, 对 V 中的向量 (元素) $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in P$, 使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个**线性组合**, 或说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性表示**. 称 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为**组合系数(或表示系数)**.

定义 1.4　设 V 为数域 P 上的线性空间, 对 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in P$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性相关**. 否则称向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性无关**.

2. *有关结论*

以上定义是大家已经熟悉的, 只是重复了向量空间中相应概念的定义, 因而从这些定义出发对 n 维向量所作出的种种论证也可以搬到线性空间中来, 并得出相同的结论. 我们不再重复这些论证, 只是把几个常用的结论叙述如下:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

(2) 一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$; 两个以上的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

(3) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 且表示法唯一.

(4) 线性无关组不含零向量.

(5) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 并且可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 则 $s\leqslant t$.

(6) 等价的线性无关向量组必定含有相同个数的向量.

(7) 线性无关向量组的任何部分组线性无关, 部分组线性相关的向量组整体一定线性相关.

1.2.2　线性空间的基与维数

1. 基与维数

我们知道, 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 最多有三个线性无关的向量, 而任意四个向量都线性相关; 在 $\mathbf{R}^n$ 中, 最多有 n 个线性无关的向量, 而任意 $n+1$ 个向量都线性相关; 在一个线性空间 V 中, 最多能有几个线性无关的向量呢? 这是线性空间的一个重要属性, 为此引入维数的概念.

定义 1.5　设V 是一个线性空间, 如果存在 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$, 满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

(2) V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示;

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一组**基**, n 称为线性空间 V 的**维数**, 记为 $\dim V$, 并称 V 为 **n 维线性空间**, 记为 V^n, 此时也称 V 是**有限维线性空间**; 如果对预先指定的任何正整数 N, 在 V 中总可以找到 N 个线性无关的向量, 则称 V 是**无限维线性空间**.

由定义 1.5 知下列结论成立:

(1) 零空间 $\{\mathbf{0}\}$ 是零维的, 没有基;

(2) n 维线性空间 V 中最多有 n 个线性无关的向量;

(3) n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基.

由所有实系数多项式所构成的实线性空间是无限维的. 因为对任意的数 n, 都有 n 个线性无关的向量

$$1,x,\cdots,x^n.$$

无限维空间是一个专门研究的对象, 它与有限维空间有比较大的差别. 在本书中, 我们只讨论有限维空间.

2. 向量的坐标

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, 由定义 1.5 知, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线

性无关, 且对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 根据前面的结论 3 知, $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示, 且表示法唯一. 由此引入坐标的概念.

定义 1.6　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, 对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示, 且表示法唯一, 若

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n, \tag{1.1}$$

记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 则称 X 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的**坐标**. (1.1) 式也常记为 $\boldsymbol{\alpha}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$ 的形式.

例 1.10　在实系数多项式所构成的实线性空间 $P_3(x)$ 中, 令

$$f_1=1,\quad f_2=x,\quad f_3=x^2,$$

显然 f_1,f_2,f_3 线性无关, 且对 $P_3(x)$ 中任一元素 $f=a+bx+cx^2$, 有 $f=af_1+bf_2+cf_3$. 所以 $P_3(x)$ 是三维线性空间, $1,x,x^2$ 是 $P_3(x)$ 的一组基, $f=a+bx+cx^2$ 在这组基下的坐标是 $(a,b,c)^T$.

例 1.11　在全体二阶实方阵在矩阵的加法及数乘两种运算下构成的实线性空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中, 令

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

容易验证 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 线性无关, 且对 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中任一元素 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 有 $A=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}$. 所以 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 是四维实线性空间, 且 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一组基, 任一元素 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标是 $(a,b,c,d)^T$.

由这两个例子可以看出, 在数域 P 上的 n 维线性空间 V 中取定了一组基后, V 中的元素通过 (1.1) 式与数域 P 上的 n 维向量建立了一一对应的关系:

$$\boldsymbol{\alpha}\xleftrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\quad x_i\in P,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

特别当 V 是 n 维实线性空间时, V 与 $\mathbf{R}^n$ 之间就建立了一一对应的关系. 由此可以理解为什么将线性空间中的元素称为向量.

尤其值得一提的是这种一一对应, 确切地说是 V 与 $\mathbf{R}^n$ 间的一一对应映射, 且此映射保持了线性关系的不变, 即:

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 对 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 它们在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐

标分别为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 设 k, l 为任意实数, 则 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为

$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

反之, V 中坐标为 $k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的元素必定是 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}$.

可见, 在此一一对应映射下, V 中元素的线性关系和它们所对应的坐标向量的线性关系完全相同, 这种映射称为**同构映射**, 此时称 V 与 $\mathbf{R}^n$**同构**. 也就是说, 任意一个实线性空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构. 从某种程度上讲, 尽管 V 与 $\mathbf{R}^n$ 的元素不同, 但 V 与 $\mathbf{R}^n$ 的数学结构完全一致. 因而今后讨论 V 中元素的线性关系时, 常常通过讨论它们所对应的坐标向量的线性关系来进行, 而对 $\mathbf{R}^n$ 中的元素我们已经相当熟悉了.

例 1.12　判断 $P_4(x)$ 中多项式组 $f_1(x) = -x^3+x+2$, $f_2(x) = 3x^3+4x^2-2x+5$, $f_3(x) = x^3 + 4x^2 + 9$, $f_4(x) = 5x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ 的线性相关性.

解　取 $P_4(x)$ 中的基 $x^3, x^2, x, 1$, 则 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 在这组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,0,1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (3,4,-2,5)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,4,0,9)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (5,4,-4,1)^T$, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, $\boldsymbol{\alpha}_4 = -2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3$, 所以多项式组 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 也线性相关, 且 $f_4(x) = -2f_1(x) + f_2(x) + 0f_3(x)$.

例 1.13　求 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩和极大无关组.

解　取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$(见例 1.11), 则 A_1, A_2, A_3, A_4 在这组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,0,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,-2,0,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 =$

$(2,0,1,1)^T$, 而向量组的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组, 所以矩阵组 A_1,A_2,A_3,A_4 的秩为 2, 且 A_1,A_3 是 A_1,A_2,A_3,A_4 的一个极大无关组.

关于线性空间的同构的性质, 我们将在 1.7 节进一步讨论.

1.2.3　基变换与坐标变换

例 1.14　全体二阶实方阵在矩阵的加法及数乘两种运算下构成的实线性空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中, 令

$$F_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad F_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad F_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

容易验证 F_1,F_2,F_3,F_4 线性无关 (证明留作练习, 习题一第 4 题), 由例 1.11 知 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 是四维的实线性空间, 所以 F_1,F_2,F_3,F_4 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一组基, 且对 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中任一元素 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 有 $A=(a-b)F_1+(b-c)F_2+(c-d)F_3+dF_4$, 即 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 在基 F_1,F_2,F_3,F_4 下的坐标是 $(a-b,b-c,c-d,d)^T$.

比较例 1.11 与例 1.14 中, 我们看到一个线性空间可以有不同的基, 事实上, **$\boldsymbol{n}$ 维线性空间 V 中任意 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的向量都可以作为V的一组基**. 显然, 同一个向量在两组基下的坐标是不同的, 下面主要研究同一个向量在不同基下的坐标之间的联系.

定义 1.7　设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基, 显然它们可以互相线性表示, 若

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=c_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \boldsymbol{\eta}_2=c_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\eta}_n=c_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\end{cases}$$

将上式用矩阵形式表示成

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},\tag{1.2}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com