工程数学

线性代数

主编／田根宝

上海大学出版社

工 程 数 学

线 性 代 数

田根宝　主编

上海大学出版社
·上 海·

内 容 提 要

本书是根据国家教育部课程指导委员会制定的高等学校工科本科基础课课程的教学大纲编写的。全书共分七章：第一章行列式，第二章矩阵，第三章向量的线性相关性，第四章线性方程组，第五章矩阵的特征值与特征向量，第六章二次型，*第七章线性空间。为使读者能灵活运用已学知识，巩固和掌握所学知识，特在每章后面增加一节《综合应用》。书末还附有本书习题答案供读者参考。

本书可作为高等工科院校本科、专科大学生使用教材；也可作为函授大学、电视大学使用或教学参考教材；此外，还可作为硕士研究生报考者的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/田根宝主编. —上海：上海大学出版社，1997.7
ISBN 7-81058-073-6

Ⅰ. 线… Ⅱ. 田… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 29214 号

上海大学出版社出版发行
(上海市延长路 149 号　　邮政编码 200072)
江苏省宜兴市第二印刷厂印刷　各地新华书店经销
开本 850×1168　1/32　印张 9.5　字数 242 000
1999 年 7 月第 1 版　　1999 年 7 月第 1 次印刷
印数 1～5 000
定价：15.00 元

前　言

本书是根据国家教育部课程指导委员会制定的高等学校工科基础课课程的教学大纲编写的。

线性代数是高等学校的一门基础课,也是工程数学的一个重要部分,是工科院校的一门必修课。

本书在培养学生分析问题和解决问题的能力上下了较大的功夫,力求在开拓思维方面有所创新,在每章的后面都增加了一节《综合应用》。

全书共分七章:第一章行列式,第二章矩阵,第三章向量的线性相关性,第四章线性方程组,第五章矩阵的特征值与特征向量,第六章二次型,* 第七章线性空间。书末附有本书习题答案供读者参考。

本书由上海铁道大学田根宝教授主编,上海铁道大学李玉贞编写了本书第一～第三章,张华隆编写了第四、第五章,王国金编写了第六、第七章。此外,毛汉清、干亚君也参加了编写。

本书由上海铁道大学朱学炎教授主审。

本书可作为高等工科院校本科、专科大学生使用教材。也可作为函授大学、电视大学使用或教学参考教材,还可作为硕士研究生报考者的参考教材。

由于编者水平有限,不妥之处,恳请读者提出宝贵意见,万分感谢。

编　者

1998 年 8 月

目　　录

第一章　行列式…………………………………………（1）
1.1　行列式的定义及性质…………………………（1）
习题 1.1 ……………………………………………（12）
1.2　行列式按行(列)展开定理与克莱姆法则……（12）
习题 1.2 ……………………………………………（25）
1.3　综合应用………………………………………（26）
习题 1.3 ……………………………………………（34）
第二章　矩阵…………………………………………（36）
2.1　矩阵的概念及其运算…………………………（36）
习题 2.1 ……………………………………………（47）
2.2　逆矩阵…………………………………………（48）
习题 2.2 ……………………………………………（55）
2.3　矩阵的秩与初等变换…………………………（56）
习题 2.3 ……………………………………………（74）
2.4　综合应用………………………………………（75）
习题 2.4 ……………………………………………（87）
第三章　向量的线性相关性…………………………（90）
3.1　向量的概念及运算……………………………（90）
习题 3.1 ……………………………………………（92）
3.2　n 维向量的线性相关性 ……………………（92）
习题 3.2 ……………………………………………（98）
3.3　向量的线性表示及其有关的判别定理………（98）
习题 3.3 ……………………………………………（106）
3.4　向量组的最大无关组与向量组的秩…………（107）

习题 3.4 …………………………………………… (114)
3.5 向量空间…………………………………………… (115)
习题 3.5 …………………………………………… (117)
3.6 综合应用…………………………………………… (118)
习题 3.6 …………………………………………… (126)
第四章 线性方程组…………………………………… (127)
4.1 线性方程组解的存在性………………………… (127)
习题 4.1 …………………………………………… (137)
4.2 线性方程组通解的结构………………………… (138)
习题 4.2 …………………………………………… (152)
4.3 综合应用…………………………………………… (153)
习题 4.3 …………………………………………… (163)
第五章 矩阵的特征值与特征向量………………… (166)
5.1 矩阵的特征值与特征向量……………………… (166)
习题 5.1 …………………………………………… (175)
5.2 相似矩阵…………………………………………… (176)
习题 5.2 …………………………………………… (190)
5.3 综合应用…………………………………………… (191)
习题 5.3 …………………………………………… (200)
第六章 二次型………………………………………… (202)
6.1 正交变换…………………………………………… (202)
习题 6.1 …………………………………………… (213)
6.2 二次型……………………………………………… (213)
习题 6.2 …………………………………………… (221)
6.3 正定二次型……………………………………… (222)
习题 6.3 …………………………………………… (234)
6.4 综合应用…………………………………………… (235)
习题 6.4 …………………………………………… (245)
***第七章 线性空间简介**……………………………… (247)

7.1 线性空间的基本概念……………………………… (247)
习题 7.1 ……………………………………………… (258)
7.2 线性变换及其矩阵表示…………………………… (259)
习题 7.2 ……………………………………………… (269)
7.3 综合应用……………………………………………… (269)
习题 7.3 ……………………………………………… (280)
附 录 习题参考答案………………………………… (282)

第一章　行　列　式

1.1　行列式的定义及性质

一、排列与逆序数

1. 乘法原理

若一件事可以通过 r 个接连动作完成，而第 i 个动作有 n_i 种方法 $(i=1, 2, \cdots, r)$，则完成这件事的方法总数可由 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 的连乘积

$$n_1 n_2 \cdots n_r$$

来表示. 称这种计算法为乘法原理.

2. 排列

定义 1　从 n 个不同的元素(可以是数字或人或其他物件)中选取 r 个不同元素排成一列称为排列.

按乘法原理，从 n 个不同的元素中选取 r 个不同元素的排列总数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$，记作 P_n^r(或 A_n^r).

定义 2　将所有 n 个不同元素排成一列称为全排列.

全排列的总数为 $n! = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$.

定义 3　按自然顺序(即由小到大)排列的一列数称为自然排列或标准排列.

3. 逆序数

(1) 逆序：若在某排列中两元素不是按由小到大的自然顺序排列，则称此两元素之间构成了一个逆序.

(2) 逆序数：排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中的所有逆序之和称为该排列的逆序数. 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例 1 求排列 54312 的逆序数.

解 $\tau(54312) = 1 + 2 + 3 + 3 = 9$.

例 2 求 $\tau(n(n-1)\cdots 21)$.

解

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

规定标准排列的逆序数为 0. 例如：$\tau(12) = 0$，$\tau(1234) = 0$.

4. 奇排列与偶排列

(1) 定义：

定义 4 逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

(2) 有关定理：

定理 1 交换排列中任两元素(其余元素不变动)，则排列改变奇偶性.

证明 ① 先证相邻两元素 a 与 b 交换一次的情形.

设排列为 $\cdots ab \cdots$，

现改变为 $\cdots ba \cdots$.

这里"$\cdots$"表示其余元素不变动. 若 $a < b$，ab 原是自然顺序，ab 不构成逆序；交换后，ba 构成了一个逆序，新排列的逆序数比原排列的逆序数增加 1. 若 $a > b$，ab 构成一个逆序；交换后，ba 是自然顺序，因而不构成逆序. 因此，交换后新排列的逆序数比原排列的逆序数减少 1. 所以，不论哪种情况，只要相邻元素交换一次必改变排列的奇偶性.

② 再证交换不相邻的两元素的情形.

不妨设原排列为 $\cdots a i_1 i_2 \cdots i_s b \cdots$，元素 a 和 b 交换后改变成 $\cdots b i_1 i_2 \cdots i_s a \cdots$. 这个改变实际上就是前一种排列中的元素 a 与右边的 $i_1, i_2, \cdots, i_s, b$ 这 $s+1$ 个元素实施 $s+1$ 次相邻两元素交换，先得到 $\cdots i_1 i_2 \cdots i_s b a \cdots$，然后元素 b 再与左边的 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 这 s 个元素实施 s 次相邻两元素交换，而得 $\cdots b i_1 i_2 \cdots i_s a \cdots$. 因为是经过

$2s+1$ 次(奇数次)相邻两元素交换,故改变排列的奇偶性.

定理 2 当 $n \geqslant 2$ 时,在 n 个不同元素的所有全排列中,奇排列与偶排列各占一半.即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 不妨设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列,若交换 i_1 与 i_2 得到 $i_2 i_1 \cdots i_n$,此排列为偶排列.反之亦然.所以,在 n 个不同元素的全排列总数中,奇偶排列各占一半.

二、行列式

1. 引入

例如在求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

中,利用加减消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,可得方程组的解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

当引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (*)$$

时,称式(*)为二阶行列式.a_{11}、a_{22}称为主对角线上的元素,a_{12}、a_{21}为次对角线上的元素.元素 a_{11}表示第 1 行第 1 列上的元素,a_{12}表示第 1 行第 2 列上的元素,依次可知,a_{ij}表示第 i 行第 j 列上的元素.a_{ij}的下标 i 称为行列式的行标,j 称为行列式的列标,从而有二阶行列式

$$D = \sum_{(j_1 j_2)} \pm a_{1j_1} a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{(j_1 j_2)}$ 表示对 j_1,j_2 分别取两个数 1,2 的所有全排列求和.

如何确定 $a_{1j_1}a_{2j_2}$前的符号呢?我们从式(*)中发现:$a_{11}a_{12}$前

取“+”，而当 $j_1=1$，$j_2=2$ 时，$\tau(12)=0$，从而 $(-1)^{\tau(12)}=(-1)^0=1$，故上式第一项可表示为 $(-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{12}$；$a_{12}a_{21}$ 前的符号取“-”，而当 $j_1=2$，$j_2=1$ 时，$\tau(21)=1$，$(-1)^{\tau(21)}=(-1)^1=-1$，故上式第二项可表示为 $(-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}$. 由此可得二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2)}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}, \tag{1}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2)}$ 表示对 j_1，j_2 分别取 1，2 的所有全排列求和.

类似可得三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{2}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对 j_1，j_2，j_3 分别取三个数 1，2，3 的所有全排列求和.

2. n 阶行列式的定义

定义 5 由 $n\times n$ 个元素，即 n^2 个元素排成的如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称之为 n 阶行列式，规定其值为 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{3}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 j_1, j_2, …, j_n 分别取 n 个数 1, 2, …, n 的所有全排列求和. 式(3)又称为 n 阶行列式的展开式. n 阶行列式简记为 D 或 D_n.

式(3)是当行标按 1, 2, …, n 自然顺序排列的 n 阶行列式的定义式. 类似地,当列标按自然顺序排列时, n 阶行列式(3)也可写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{4}$$

其中 $\sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_n)}$ 表示对 i_1, i_2, …, i_n 分别取 n 个数 1, 2, …, n 的所有全排列求和.

n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项,而且每一项是取自不同行不同列的 n 个数的连乘积. 因此,值得注意的是行列式是一个数值.

例 3 按行列式的定义计算左下三角行列式(即主对角线以上的元素均为零的行列式. 为直观起见,零元素在行列式中有时不予标出,下同.)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由定义 $\quad D=\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$

因为第 1 行的元素中除 a_{11} 外全为零,即 $j_1\neq 1$ 时, $a_{1j_1}=0$, 故第 1 行只需取 a_{11},即仅剩 $a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 形式的项;当第 1 行取 a_{11} 时,第 2 行中元素 a_{2j_2}, j_2 不能取 1,故 j_2 只有取 2, 3, …, n,而 j_2 为 3,

4，…，n 时，$a_{2j_2}=0$，故 j_2 只需取 2，即取 a_{22} 这个元素；类似地，第 n 行元素 a_{nj_n} 中，只有取 a_{nn}. 由此可见，在这个 n 阶行列式的展开式的 n! 项中，除了一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外，其余的项均为零，故

$$\begin{aligned} D &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= (-1)^{\tau(123\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

同理得，右上三角行列式（主对角线以下元素均为零的行列式）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似可得左上三角行列式（次对角线以下元素均为零的行列式）和右下三角行列式（次对角线以上元素均为零的行列式）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

注意次对角线上 n 个元素乘积前的符号取为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

3. 行列式的性质

行列式的性质是计算行列式的一个十分重要的工具，它大大地简化了行列式的运算.

定义 6 将行列式 D 的各行元素换为同序号的列元素（即将行列式中第 i 行的元素换为第 i 列的元素 $(i=1, 2, \cdots, n)$）所得的新行列式称为 D 的转置行列式，记作 D' 或 D^{T}.

例如，
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
则
$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
为 D 的转置行列式.

性质 1 $D'=D$.

该性质利用行列式的定义立即可得.

此性质表明，在行列式中，行与列的地位是对称的. 因此，凡是有关行列式中行的性质对列也同样成立.

性质 2 交换行列式中的任两行(或两列)，仅改变行列式的符号.

证明 以交换两列的情形进行讨论. 设
$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots p\cdots q\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{\alpha p}\cdots a_{\beta q}\cdots a_{nj_n},$$
其中 $1\cdots\alpha\cdots\beta\cdots n$ 为标准排列. 交换 p 列与 q 列，得行列式
$$D_1=\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots q\cdots p\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{\alpha q}\cdots a_{\beta p}\cdots a_{nj_n}.$$
因为交换排列中任两元素(其余元素不变动)改变排列的奇偶性，所以
$$(-1)^{\tau(j_1\cdots q\cdots p\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots p\cdots q\cdots j_n)}.$$
即得 $D_1=-D$.

推论 若行列式中有两行(或两列)对应元素相同，则行列式的值等于零.

证明 由性质 2,交换行列式中对应元素相同的两行(或两列),得 $D=-D$, 故 $D=0$.

性质 3 行列式中某一行(或列)的各元素有公因子,则可把公因子提到行列式外面. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此性质由定义立即可得.

推论 1 把行列式的某一行(或列)所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以原行列式.

推论 2 行列式某一行(或列)全为零时,此行列式的值等于零.

性质 4 若行列式中有两行(或两列)的元素对应成比例,则行列式的值等于零.

证明 不妨设行列式的第 i 行与第 j 行的元素对应成比例

$$\frac{a_{i1}}{a_{j1}} = \frac{a_{i2}}{a_{j2}} = \cdots = \frac{a_{in}}{a_{jn}} = l.$$

即 $a_{ik} = la_{jk}$, $k=1, 2, \cdots, n$. 再利用性质 3 和性质 2 即得结论.

性质 5 行列式中某一行(或列)各元素皆为两元素之和,则该行列式可拆成两个行列式之和. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

或

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

证明 （仅对列的情形加以证明）利用行列式的定义

$$
\begin{aligned}
D &= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{kj_k} + b_{kj_k}) \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} + \\
&\quad \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{kj_k} \cdots a_{nj_n}.
\end{aligned}
$$

性质 6 行列式某一行（或列）的 k 倍加到另一行（或列）的对应元素上去，不改变行列式的值.

证明

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{(性质 5)}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{(性质 4)}}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+ 0 =
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= D.
$$

例 4 利用行列式的定义计算行列式

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
0 & 0 & 0 & a_{34} \\
0 & a_{42} & 0 & a_{44}
\end{vmatrix}.
$$

解 由行列式的定义

$$
D = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.
$$

要使连乘积不为零，j_3 只能取 4，而 j_4 只能取 2，故 j_1 只能取 1，j_2 只能取 3，因此

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^{\tau(1342)} a_{11} a_{23} a_{34} a_{42} = (-1)^2 a_{11} a_{23} a_{34} a_{42} \\
&= a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}.
\end{aligned}
$$