细节影响数学高考的成败

——吃n堑，长m智（m>n）

王连笑◎编著

ECNUP 上海市著名商标 华东师范大学出版社
· 全国百佳图书出版单位

细节影响**数学高考**的成败

——吃n堑，长m智（m>n）

王连笑◎编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

细节影响数学高考的成败：吃 n 堑，长 m 智($m>n$)/王连笑编著. —上海：华东师范大学出版社，2011.11
ISBN 978-7-5617-8904-9

Ⅰ.①细… Ⅱ.①王… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 183884 号

细节影响数学高考的成败

——吃 n 堑，长 m 智($m>n$)

编　　著　王连笑
责任编辑　平　萍
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　昆山亭林彩印厂有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　17.5
字　　数　472 千字
版　　次　2011 年 11 月第 1 版
印　　次　2011 年 11 月第 1 次
印　　数　5100
书　　号　ISBN 978-7-5617-8904-9/G·5286
定　　价　35.00 元

出 版 人　朱杰人

出版说明

本书作者王连笑老师于三个月前不幸离世，已无法于本书出版之际看到此书，着实令人扼腕叹息！本书凝聚了作者大量的心血，书中大部分例题都是作者在平时教学或与学生的交流中日积月累起来的，可以说，本书凝聚着作者毕生的精力.

作者生前曾就本书的内容等细节问题与我社进行过多次交流与沟通，我们深知作者对数学教育寄予的无限关怀，对本书出版寄予的殷切期望。征得作者家属同意，我们决定出版此书，以完成作者未完的心愿，并以此纪念作者为数学教育作出的一生的贡献！

华东师范大学出版社

2011 年 11 月

写在前面

在小品《不差钱》里有这样一段情境：

小沈阳说："人生最痛苦的事情是，人死了，钱没花完."

赵本山说："人生最最痛苦的事情是，人活着，钱没了."

对于数学高考，我们可以作这样的类比：

"考生最痛苦的事情是，人在考场，题不会做."

"考生最最痛苦的事情是，人在考场，题会做，但做错了."

对于数学解题，特别是数学考试，学生感到最遗憾、最无奈的事情就是"题会做，但做错了". 问题出在考场，根源却在平时.

我们经常遇到这样一种情形：解一道数学题，所用到的数学知识是正确的，解题思路是正确的，解题方法是正确的，计算过程是正确的，但最后题目还是解错了！为什么解题的大方向是正确的，而最后题目还是解错了呢？为什么"题会做，但做错了"呢？

其原因可能是多方面的，然而解题过程中，在一两个细节上出了问题往往是重要原因.

细节出问题的一个方面是属于知识性的. 对一些数学概念，学习时自以为已经掌握了，但是掌握得并不一定牢固，并不一定透彻. 比如，一元二次方程有实根的必要条件是判别式 $\Delta\geqslant 0$，但是当遇到一个形式上看似二次方程的问题，就不加思索地当作二次方程求解了，对是否确为二次方程，则忽略了讨论. 又如，在研究一个函数的性质时，讨论得头头是道，但却忽略了函数的定义域；求函数极值问题时，如果知道在 $x=x_0$ 处有极值，自然会想到 $f'(x_0)=0$，但这只是函数有极值的必要条件，解题时往往忽略了对其充分性的讨论等.

细节出问题的另一个方面是属于心理性的. 审题时往往马马虎虎；解题时往往粗心大意；往往只注意解题目标的大致方向，而

不仔细研究解题要求；求取值范围时，不注意对端点的讨论；遇到参数问题时，没有想到必要的分类，解题后又不注意检验等.

细节出问题还表现在运算、逻辑、审题、表达等其他方面.

以上这些，从表面上看，是一些细节问题，但正因为不注意这些细节，往往会惹大祸. 中国有句成语："千里之堤，溃于蚁穴"，西方有句谚语："魔鬼在细节中，天使在细节中."一个细节的失误，会造成数学解题的失败，如果是考试，就会造成无谓的丢分，从这个角度也可以说，细节影响成败，细节决定成败.

"问题是数学的心脏"，但解题时如果不注意细节，就会"心肌梗塞"，就会"心脏早搏". 数学解题是细活，对数学的心脏一定要特别仔细. 对于数学解题中出现的不注意细节的问题，是不容易避免的，最好的方法是及时发现，及时诊断，及时解决. 美国心理学家贝恩布里奇说过："差错，人皆有之，作为教师不利用它，是不能原谅的. 没有大量的错误作为台阶，就不能攀登上正确结果的宝座."美国教育家杜威说："真正思考的人从自己的错误中吸取的知识比从成就中吸取的知识多，错误与探索联姻，相交合，才能孕育出真理."

中学数学对学生各种能力的培养，其核心是对学生思维能力的培养，而思维的批判性又是思维品质和思维能力的一个重要内容. 苏联教育家克鲁捷茨基在《中小学数学能力心理学》一书中指出："对一位数学家来说，一种很重要的能力是按照他学到的逻辑原则和数学来批判地评价推理的每个环节，以找出乍一看似乎无懈可击的推理中的错误."可见，数学思维的批判性对一个数学家来说是必须要具备的思维品质，事实上，思维的批判性也是每一个创造型人才必须具备的，培养思维的批判性应该成为中学数学学习的目的之一.

思维的批判性作为一种思维品质主要表现在：要有疑，要不被疑所惑，并通过解疑、解惑来建立正确的认识."学贵有疑，小疑则小进，大疑则大进，疑者，觉悟之机也，一番觉醒，一番长进."培养思维的批判性就是要培养学生善于探讨事物现象的根本原因，不对事物采取轻率、盲从的态度，善于提出问题、提出判断，善于从批判错误出发，寻找更合理、更正确的科学表达形式和结论.

培根有一句名言："从确信开始的人将以怀疑结束，但甘心从怀疑开始的人将以确信告终."实践证明，学生思维上的缺陷，在自我暴露之后，经过辨析，从否定之否定中得到正确认识，往往能收到良好的效果. 因此，本书收集了学生在解题时由于忽视细节而导致解题失误的近五百道例题. 本书中的大部分例题都是作者在平时教学时，在与学生的交流中积累的，还有一部分是在阅读数学教学杂志时看到的.

如何编排这些题目，有两个方案：一个是按知识上的细节、运算上的细节、审题上的细节、逻辑上的细节、表达上的细节和心理上的细节等进行分类；另一个是按知识体系分类，即把高中学习的数学内容分成若干块，分章叙述. 本书采用的是第二个方案，这样编排想达到如下目的：

一是有利于高中学生从高一就开始使用本书.

如果在平时的学习中就关注细节，在概念的辨析、思维的严密、运算的准确和表达的严谨上下功夫，时常翻翻本书中的例题，就会把解题错误消灭在萌芽之中，防患于未然.

二是有利于高考复习.

在高考复习中，一方面需要正确的概念、正确的运算、正确的思维和正确的表达，另一方面也需要"反面教员". 因为平时不太注意的细节问题和容易犯的解题错误，靠正面复习的效果并不显著，而通过反面例题，分析由于不注意细节造成解题失误的例子，就会引起警觉，以防自己也犯类似的错误.

三是有利于教师教学.

作者在平时教学中经常使用否定假设法(what if not)设计问题，"what if not"的含义是"如果

不是这样”，即对所学习的知识、概念和习题进行再思考：如果不是这样的话，那它可能会怎样？因此，作者在每一章的教学中都安排一次“错例研究课”，举出学生容易出现的一些解题错误，特别是表面上看不出来有错，但正是由于疏忽某些细节而出错的题目，组织学生讨论辨析，让学生自己教育自己，自己提高自己，收到了非常显著的效果. 因此，作者建议教师在教学中选用书中的一些例题，通过“错例研究课”培养学生的思维能力，这会是一种有效的教学方式. 心理学家盖耶认为：“谁不考虑尝试错误，不允许学生犯错误，谁就将错过最富有成效的教学时刻.”

本书的叙述方式是这样的：所有解题细节的问题都通过例题展开. 每道例题除题目之外，由两部分组成，第一部分是“有错误的解法”，这些解法从表面上也许看不出什么破绽，但确实是错了；第二部分是“评析及正解”，通过对数学概念的辨析和对比，对解题过程和答案的讨论，对解题严谨性的探索等，找出因忽视细节而造成错解的原因，并给出纠正的方法，或者正确的解法. 因此，每道例题提供的“有错误的解法”是“吃一堑”，而“评析及正解”是“长一智”，作者希望通过“吃 n 堑”，能“长 m 智”($m>n$)，通过逐步积累，不断地从忽视细节而造成的错解中汲取教训，激起思维的浪花，不断地从对错误解法的批判和纠正中，荡起智慧的涟漪，使批判性思维得到培养，进而提高思维能力，使失败成为成功之母，让错误成为正确之鉴.

本书想达到这样一个目的：解数学题时，必须在关注细节上给力. 只有关注细节，才能成就数学解题的精彩.

目 录

第一章　从几道高考试题谈起

我们从几道高考试题入手，研究细节是如何影响高考数学解题成败的. 下面这些题目的解决过程初看好像没有什么问题，但正是由于忽视了一些细节而造成了解题的失误.

【例 1】 (2004 天津卷理 21)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件：

$$a_1 = a,\ a_n = f(a_{n-1})(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots),\ a_2 \neq a_1,$$
$$f(a_n) - f(a_{n-1}) = k(a_n - a_{n-1})(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots).$$

其中 a 为常数，k 为非零常数.

(Ⅰ) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n(n \in \mathbf{N}^*)$，证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(Ⅱ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(Ⅲ) 当 $|k| < 1$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

本题主要考查函数、数列、等比数列和极限等概念，考查灵活应用数学知识分析问题和解决问题的能力.

我们主要研究前两问.

对于第(Ⅰ)问，许多同学都是这样证明的：

由已知，得 $a_{n+1} - a_n = k(a_n - a_{n-1})$，再由 $b_n = a_{n+1} - a_n$，得 $b_n = kb_{n-1}$.

所以，$\{b_n\}$ 是一个公比为 k 的等比数列.

这样求解有没有破绽？许多同学找不出毛病，其实，按照等比数列的定义，应该证明 b_n 与 b_{n-1} 的比值是一个常数，而要求"比值"，就要证明数列 $\{b_n\}$ 的各项均不为 0，如果没有对此进行证明，而仅依据 $b_n = kb_{n-1}$ 就得到 $\{b_n\}$ 是等比数列的结论，显然是不严谨的.

要证明数列 $\{b_n\}$ 的各项均不为 0，可以由题设条件 $a_2 \neq a_1$，得出 $b_1 = a_2 - a_1 \neq 0$，再由递推公式 $b_n = kb_{n-1}$ 及数学归纳法证明对所有 $n \in \mathbf{N}^*$，$b_n \neq 0$，这是证明 $\{b_n\}$ 是等比数列的前提，而上面的证明恰恰忽略了这一点. 数列 $\{b_n\}$ 的各项均不为 0，这就是一个细节.

第(Ⅱ)问是求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

由(Ⅰ)可以得出 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = k^{n-1}b_1 = k^{n-1}(a_2 - a_1)$.

由 $\{b_n\}$ 的定义，得 $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$.

有些同学立即得出：

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1)(1 + k + \cdots + k^{n-2}) = a + \frac{(a_2 - a)(1 - k^{n-1})}{1 - k}.$$

这个结果正确吗？这里涉及到求等比数列 $\{b_n\}$ 的前 $n-1$ 项之和，而对等比数列求和，就要对公比 $k = 1$ 及 $k \neq 1$ 分类讨论，这样一个细节，在平时教学中，老师肯定多次提醒，但是换了一个解题环境，这里是求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，就有不少考生忽略了分类.

第二个细节是 $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$ 应该对 $n \geqslant 2$ 成立，上面的求和也没有考虑这一因素.

因此，由(Ⅰ)知，$b_n = k^{n-1}b_1 = k^{n-1}(a_2 - a_1)(n \in \mathbf{N}^*)$.

当 $k \neq 1$ 时，$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = (a_2 - a_1)\dfrac{1 - k^{n-1}}{1 - k}(n \geqslant 2)$；

当 $k=1$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(n-1)(a_2-a_1)(n\geqslant 2)$.

而 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_1(n\geqslant 2)$.

所以，当 $k\neq 1$ 时，$a_n-a_1=(a_2-a_1)\dfrac{1-k^{n-1}}{1-k}(n\geqslant 2)$.

上式对 $n=1$ 也成立，所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=a+(a_2-a)\frac{1-k^{n-1}}{1-k}\quad (n\in\mathbf{N}^*).$$

当 $k=1$ 时，$a_n-a_1=(n-1)(a_2-a_1)(n\geqslant 2)$.

上式对 $n=1$ 也成立，所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=a+(n-1)(a_2-a)\qquad (n\in\mathbf{N}^*).$$

第三个细节就是得出的 a_n 的通项公式，即

$$a_n=\begin{cases}a+(a_2-a)\dfrac{1-k^{n-1}}{1-k}, & k\neq 1,\\ a+(n-1)(a_2-a), & k=1\end{cases}$$

中的 a_2，题目中并没有给出，因此，a_2 要用 $f(a)$ 表示，这一细节许多考生也忽略了.

正确的结果是：

$$a_n=\begin{cases}a+(f(a)-a)\dfrac{1-k^{n-1}}{1-k}, & k\neq 1,\\ a+(n-1)(f(a)-a), & k=1.\end{cases}$$

【例 2】 (2004 全国Ⅰ卷理 21(Ⅰ))设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 与直线 l: $x+y=1$ 相交于两个不同的点 A、B. 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围.

请看下面的解法：

由双曲线 C 与直线 l 相交于两个不同的点，可知方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1,\\ x+y=1\end{cases}$ 有两个不同的实数解. 消去 y 并整理，得

$$(1-a^2)x^2+2a^2x-2a^2=0. \qquad ①$$

由 $\Delta=a^4+2a^2(1-a^2)>0$，解得 $0<a<\sqrt{2}$.

所以，双曲线的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+1}$.

因为 $0<a<\sqrt{2}$，且 $e=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+1}$ 是关于 a 的减函数，所以 $e>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

即离心率的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ +\infty\right)$.

这个解法有没有问题，结果是不是正确呢?

其实，这里有一个细节被忽略了，即方程①必须是一个二次方程，因此，必须要满足 $1-a^2\neq 0$，即 $a\neq 1$. 于是离心率 $e\neq\sqrt{2}$.

因此，离心率 e 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

【例 3】 (2010 全国Ⅰ卷理 10)已知函数 $f(x)=|\lg x|$，若 $0<a<b$，且 $f(a)=f(b)$，则 $a+2b$ 的取值范围是(　　).

A. $(2\sqrt{2}, +\infty)$　　B. $[2\sqrt{2}, +\infty)$　　C. $(3, +\infty)$　　D. $[3, +\infty)$

先看下面的解法：

因为 $f(a)=f(b)$，所以 $|\lg a|=|\lg b|$，于是 $\lg a=\pm\lg b$，所以 $a=b$，或 $b=\frac{1}{a}$.

由于 $a\neq b$，所以 $b=\frac{1}{a}$.

于是 $a+2b=a+\frac{2}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}$. 故选 B.

上述解法是不正确的.

上述结果在选项中确实存在，但这是一个陷阱. 利用均值不等式求最大值或最小值时，一定要注意等号成立的条件. 上述解法的问题就恰恰出在没有注意到不等式中等号成立的条件这个细节. 还有一个细节是，由题设条件 $0<a<b$ 和解题过程中的结果 $b=\frac{1}{a}$ 可以得到 a 的范围，这是一个隐含条件，在上述解题过程中，也被忽略了.

因此，由均值不等式，得 $a+2b=a+\frac{2}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}$，这个不等式当且仅当 $a=\frac{2}{a}$，即 $a=\sqrt{2}$ 时，等号成立，而由题设 $0<a<b$ 及 $b=\frac{1}{a}$，得 $0<a<1$，于是 $a\neq\sqrt{2}$，即等号不成立. 所以运用均值不等式的解法不可取.

正确的解法是：设函数 $f(a)=a+\frac{2}{a}$. 由 $0<a<b$ 及 $b=\frac{1}{a}$，得 $0<a<1$.

$f'(a)=1-\frac{2}{a^2}$，所以该函数在 $(0, \sqrt{2})$ 上单调递减，因而在区间 $(0, 1)$ 上单调递减.

所以，$f(a)>f(1)=1+\frac{2}{1}=3$，即 $a+2b$ 的取值范围是 $(3, +\infty)$. 故选 C.

【例 4】 (2009 山东卷理 11)在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 x，$\cos\frac{\pi x}{2}$ 的值介于 0 到 $\frac{1}{2}$ 之间的概率为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{\pi}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

请看下面的解法：

在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 x.

当 $x\in[-1, 1]$ 时，$\frac{\pi}{2}x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos\frac{\pi}{2}x\in[0, 1]$.

所以 $\cos\frac{\pi x}{2}$ 的值介于 0 到 $\frac{1}{2}$ 之间的概率 $P=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

从解题过程看，上述解法确实很严谨，但答案是错误的.

细节问题出在对解题目标的理解上. 题目中的随机变量是 x，而不是 $\cos\frac{\pi x}{2}$，因此，应该研究 x

的取值区间,而不是研究 $\cos\frac{\pi x}{2}$ 的取值区间.

在区间[-1, 1]上随机取一个数 x,区间长度是 2.

由 $0\leqslant\cos\frac{\pi x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,得 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi x}{2}\leqslant-\frac{\pi}{3}$,或 $\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi x}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

所以 $-1\leqslant x\leqslant-\frac{2}{3}$,或 $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1$,区间长度为 $\frac{2}{3}$.

于是 $\cos\frac{\pi x}{2}$ 的值介于 0 到 $\frac{1}{2}$ 之间的概率 $P=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$. 故选 A.

【例 5】 (2009 全国Ⅱ卷理 17)设△ABC 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c, $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$, $b^2=ac$,求 B.

这道高考题并不难.

将 $B=\pi-(A+C)$ 代入 $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$,得 $\cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{2}$.

利用两角和与差的余弦公式展开,得

$$(\cos A\cos C+\sin A\sin C)-(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=\frac{3}{2}.$$

于是 $\sin A\sin C=\frac{3}{4}$.

又由 $b^2=ac$,利用正弦定理进行边角互化,得 $\sin^2B=\sin A\sin C$,进而得 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此, $B=\frac{\pi}{3}$,或 $B=\frac{2\pi}{3}$.

许多考生做到这里就认为解完了,然而这个解答并不完整,因为解答过程忽略了检验.

我们做以下检验:

当 $B=\frac{2\pi}{3}$ 时,由 $\cos B=-\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$,得

$$\cos(A-C)=\cos(A+C)+\frac{3}{2}=2>1,$$

这与 $\cos(A-C)\leqslant 1$ 矛盾,应该舍去. 因此只有一个答案: $B=\frac{\pi}{3}$.

也可利用若" $b^2=ac$,则 $b\leqslant a$ 或 $b\leqslant c$",从而判断 b 不是三角形的最大边,因此 B 不是最大角,故应该舍去 $B=\frac{2\pi}{3}$.

另一种检验方法是:

由 $b^2=ac$,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$.

所以 $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$,因而 $B\neq\frac{2\pi}{3}$.

事实上,由题设条件 $b^2=ac$,可得 $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$,这就是一个隐含条件.

因此,正确的结果只有 $B=\frac{\pi}{3}$.

【例6】 （2007 湖南卷理 21（Ⅱ））已知 $A_n(a_n,\ b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 是曲线 $y=e^x$ 上的点，$a_1=a$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且满足 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$，$a_n\neq 0$，$n=2,3,4,\cdots$ 确定 a 的取值集合 M，使 $a\in M$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列.

有不少考生用下面的解法求解：

当 $n\geqslant 2$ 时，由已知，得 $S_n^2-S_{n-1}^2=3n^2a_n$.

因为 $a_n=S_n-S_{n-1}\neq 0$，所以 $S_n+S_{n-1}=3n^2$ ①. 于是 $S_{n+1}+S_n=3(n+1)^2$ ②.

②－①，得 $a_{n+1}+a_n=6n+3$ ③. 于是 $a_{n+2}+a_{n+1}=6n+9$ ④.

④－③，得 $a_{n+2}-a_n=6$ ⑤.

由③，得 $a_2+a_1=9$，则 $a_2=9-a$；$a_3+a_2=15$，则 $a_3=6+a$.

由⑤，得 $a_4=6+a_2=15-a$.

而⑤式表明：数列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k+1}\}$ 分别是以 a_2、a_3 为首项，6 为公差的等差数列.

所以 $a_{2k}=a_2+6(k-1)$，$a_{2k+1}=a_3+6(k-1)$，$a_{2k+2}=a_4+6(k-1)(k\in\mathbf{N}^*)$.

数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列 $\Leftrightarrow a_1<a_2$，且 $a_{2k}<a_{2k+1}<a_{2k+2}$ 对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$ 成立 $\Leftrightarrow a_1<a_2$，且 $a_2+6(k-1)<a_3+6(k-1)<a_4+6(k-1)\Leftrightarrow a_1<a_2<a_3<a_4$.

即 $a<9-a<6+a<15-a$，解得 $\frac{3}{2}<a<\frac{9}{2}$.

所以，a 的取值集合 $M=\left\{a\,\middle|\,\frac{3}{2}<a<\frac{9}{2}\right\}$.

上述解法是否正确呢？我们做以下检验：

在上面的结果 $\frac{3}{2}<a<\frac{9}{2}$ 中，取 $a=2$，则 $a_1=2$.

由①，得 $S_2+S_1=3\times 2^2=12$，即 $a_2+2a_1=a_2+4=12$，得 $a_2=8$.

由⑤，得 $a_3=6+a_1=8$.

此时，$a_2=a_3=8$，数列 $\{a_n\}$ 不是单调递增数列.

或由 $a_2=9-a=7$，这时，得到的 a_2 有两个值：$a_2=8$ 和 $a_2=7$，从而出现矛盾.

特别是把 $a_1=2$ 和 $a_2=7$ 代入已知的等式 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$.

左边 $=S_2^2=(2+7)^2=81$，右边 $=3\times 2^2a_2+S_1^2=84+4=88$，不符合已知等式.

错误出在哪里呢？实际上，问题出在等式成立的条件这个细节上.

上面的①式是在 $n\geqslant 2$ 的条件下得到的，因而③式的 $a_{n+1}+a_n=6n+3$ 也是在 $n\geqslant 2$ 的条件下使用，通过此式求 a_2 是不正确的，a_2 只能通过①式来求，即：

由①，得 $S_2+S_1=12$，所以 $a_2=12-2a$.

由③，得 $a_3+a_2=15$，$a_4+a_3=21$，所以 $a_3=3+2a$，$a_4=18-2a$.

而⑤式表明：数列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k+1}\}$ 分别是以 a_2、a_3 为首项，6 为公差的等差数列.

所以 $a_{2k}=a_2+6(k-1)$，$a_{2k+1}=a_3+6(k-1)$，$a_{2k+2}=a_4+6(k-1)(k\in\mathbf{N}^*)$.

数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列 $\Leftrightarrow a_1<a_2$，且 $a_{2k}<a_{2k+1}<a_{2k+2}$ 对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$ 成立 $\Leftrightarrow a_1<a_2$，且 $a_2+6(k-1)<a_3+6(k-1)<a_4+6(k-1)\Leftrightarrow a_1<a_2<a_3<a_4$.

即 $a<12-2a<3+2a<18-2a$，解得 $\frac{9}{4}<a<\frac{15}{4}$.

所以，a 的取值集合 $M=\left\{a\,\middle|\,\frac{9}{4}<a<\frac{15}{4}\right\}$.

【例7】 （2009 湖北卷理 21（Ⅰ）、（Ⅱ））在 $\mathbf{R}$ 上定义运算

$$\otimes: p \otimes q = -\frac{1}{3}(p-c)(q-b)+4bc(b、c 为实常数).$$

记 $f_1(x)=x^2-2c$, $f_2(x)=x-2b$, $x\in\mathbf{R}$. 令 $f(x)=f_1(x)\otimes f_2(x)$.

（Ⅰ）如果函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\frac{4}{3}$，试确定 b、c 的值；

（Ⅱ）求曲线 $y=f(x)$ 上斜率为 c 的切线与该曲线的公共点.

首先看下面的解法：

（Ⅰ）由题设定义的运算，得

$$f(x)=f_1(x)\otimes f_2(x)=-\frac{1}{3}(x^2-3c)(x-3b)+4bc=-\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx+bc.$$

则 $f'(x)=-x^2+2bx+c$.

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\frac{4}{3}$，可得 $\begin{cases} f'(1)=-1+2b+c=0, \\ f(1)=-\frac{1}{3}+b+c+bc=-\frac{4}{3}. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=1, \\ c=-1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=-1, \\ c=3. \end{cases}$

（Ⅱ）因为 $f'(x)=-x^2+2bx+c=c$，则 $x^2-2bx=0$，解得 $x=0$, $x=2b$.

当 $x=0$ 时，$f(0)=bc$；当 $x=2b$ 时，$f(2b)=\frac{4}{3}b^3+3bc$.

所以，斜率为 c 的切线与该曲线的公共点为 $(0, bc)$ 或 $\left(2b, \frac{4}{3}b^3+3bc\right)$.

上述两问的解法都有毛病：

（Ⅰ）的错误在于认为导数为 0 的点就是极值点. 事实上，导数为 0 只是函数有极值的必要条件，即可导函数的极值点是导数为 0 的点，但导数为 0 的点不一定是极值点. 可导函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值点的充分必要条件是 $f(x_0)=0$，且在 $x=x_0$ 的左侧与右侧的 $f'(x)$ 的符号不同，所以需要对求出的结果进行检验.

若 $b=1$, $c=-1$，则 $f'(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\leqslant 0$，此时 $f(x)$ 没有极值；

若 $b=-1$, $c=3$，则 $f'(x)=-x^2-2x+3=-(x+1)(x-1)$，当 x 变化时，$f(x)$、$f'(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小值 -12	单调递增	极大值 $-\frac{4}{3}$	单调递减

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极大值 $-\frac{4}{3}$，故 $b=-1$, $c=3$ 即为所求.

从表面上看，本题的问题出在没有注意检验上，而实际上，问题出在对函数有极值这一基本概念的理解和逻辑关系的把握这些细节上.

（Ⅱ）的错误在于一种思维定势，即误认为直线与曲线相切时，只有一个公共点，而实际上，直线与曲线相切时，除了切点之外，还可能有其他公共点.

本题得到切点 $(0, bc)$ 和 $\left(2b, \frac{4}{3}b^3+3bc\right)$ 之后，还应继续求公共点.

切点为$(0,\ bc)$时，切线方程为 $y=cx+bc$.

解$\begin{cases} y=cx+bc, \\ y=-\dfrac{1}{3}x^3+bx^2+cx+bc, \end{cases}$得切线与该曲线的公共点为$(0,\ bc)$和$(3b,\ 4bc)$.

切点为$\left(2b,\ \dfrac{4}{3}b^3+3bc\right)$时，切线方程为 $y=cx+bc+\dfrac{4}{3}b^3$.

解$\begin{cases} y=cx+bc+\dfrac{4}{3}b^3, \\ y=-\dfrac{1}{3}x^3+bx^2+cx+bc, \end{cases}$得切线与该曲线的公共点为$\left(2b,\ \dfrac{4}{3}b^3+3bc\right)$和$\left(-b,\ \dfrac{4}{3}b^3\right)$.

【例 8】 (2009 全国Ⅰ卷理 22)设函数 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,\ 0]$，$x_2\in[1,\ 2]$.

(Ⅰ) 求 b、c 满足的约束条件，并在坐标平面内，画出满足这些条件的点$(b,\ c)$的区域；

(Ⅱ) 证明：$-10\leqslant f(x_2)\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

第(Ⅰ)问比较简单，大部分考生都能正确地得出解答.

(Ⅰ) 由题意，得 $f'(x)=3x^2+6bx+3c$，并知方程 $f'(x)=0$ 有两个根 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,\ 0]$，$x_2\in[1,\ 2]$.

则有$\begin{cases} f'(-1)\geqslant 0, \\ f'(0)\leqslant 0, \\ f'(1)\leqslant 0, \\ f'(2)\geqslant 0. \end{cases}$ 故有$\begin{cases} 2b-c-1\leqslant 0, \\ c\leqslant 0, \\ 2b+c+1\leqslant 0, \\ 4b+c+4\geqslant 0. \end{cases}$

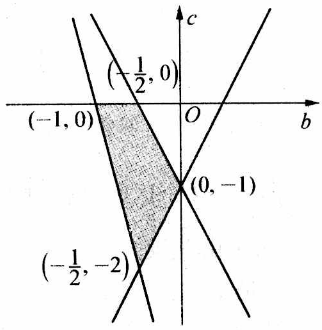

图 1-1-1

图 1-1-1 中阴影部分即是满足这些条件的点$(b,\ c)$的区域.

我们再看第(Ⅱ)问，有的考生是这样解的：

(Ⅱ) 由题设知，$f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$.

故 $c=-x_2^2-2bx_2$.

于是 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2=-2x_2^3-3bx_2^2$，$x_2\in[1,\ 2]$.

设 $h(x)=-2x^3-3bx^2$，则 $h'(x)=-6x^2-6bx$.

由(Ⅰ)知，$-1\leqslant b\leqslant 0$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在$[1,\ 2]$上单调递减.

所以 $h(2)\leqslant h(x)\leqslant h(1)$，即 $-16-12b\leqslant f(x_2)\leqslant-2-3b$.

因为 $-1\leqslant b\leqslant 0$，所以 $-16\leqslant f(x_2)\leqslant 1$.

这一结果显然与题目要求的结果 $-10\leqslant f(x_2)\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 不同，因此证明肯定有错误，但是错在哪里呢？我们不妨先看看下面的正确解法.

由题设知，$f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$，故 $bx_2=-\dfrac{1}{2}x_2^2-\dfrac{1}{2}c$.

于是 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2=-\dfrac{1}{2}x_2^3+\dfrac{3c}{2}x_2$.

由于 $x_2\in[1,\ 2]$，而由(Ⅰ)知 $c\leqslant 0$，故 $-4+3c\leqslant f(x_2)\leqslant-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}c$.

又由(Ⅰ)知 $-2\leqslant c\leqslant 0$，所以 $-10\leqslant f(x_2)\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

这个正确解法与错误解法的基本思路是相同的，不同点为错误解法中是消去参数 c，而通过参数 b 的范围，求出 $f(x_2)$ 的范围；正确解法中是消去参数 b，而通过参数 c 的范围，求出 $f(x_2)$ 的范围.

那么，哪个细节出了问题呢？

问题显然是出在 b 和 c 的范围上.

在这两个解法中，$-1\leqslant b\leqslant 0$，$-2\leqslant c\leqslant 0$，这时在坐标系 bOc 中围成的是一个矩形，而由（Ⅰ）知，b 和 c 的范围构成一个矩形中内接的四边形，如图 1-1-2 所示，从图中可以看出，存在一个 $b=-\dfrac{1}{2}$，当 $b=-\dfrac{1}{2}$ 时，c 能取遍区间 $[-2,0]$ 的每一个值，但是没有一个 c 值能使 b 取遍区间 $[-1,0]$ 的每一个值.

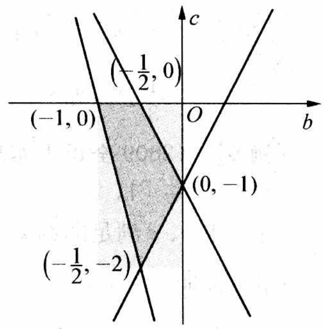

图 1-1-2

正因为存在 b，使 c 能取遍区间 $[-2,0]$ 的每一个值，所以在解题时可以消去 b，直接代入 c 的范围求解，这是正确解法的合理性，而没有一个 c 值能使 b 取遍区间 $[-1,0]$ 的每一个值，所以就不能消去 c，把 b 的范围直接代入. 因此，“消去 b，直接代入 c 的范围求解”与“消去 c，直接代入 b 的范围求解”，这两种化归是不等价的.

为了弥补这一欠缺，可以采用分类讨论的方法求解，解法是这样的：

如图 1-1-2 所示，由于存在 $c=0$，可以使得 b 取遍区间 $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$ 的每一个值；存在 $c=-1$，可以使得 b 取遍区间 $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$ 的每一个值，所以可以把 b 的范围分为 $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$ 和 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$ 两个区间进行讨论.

（Ⅱ）由题设知，$f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$，故 $c=-x_2^2-2bx_2$.

于是 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2=-2x_2^3-3bx_2^2$，$x_2\in[1,2]$.

设 $h(x)=-2x^3-3bx^2$，则 $h'(x)=-6x^2-6bx$.

由（Ⅰ）知，$-1\leqslant b\leqslant 0$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减.

所以 $h(2)\leqslant h(x)\leqslant h(1)$，即 $-16-12b\leqslant f(x_2)\leqslant -2-3b$.

(1) 当 $-1\leqslant b<-\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $-10<-16-12b\leqslant -4$，$-\dfrac{1}{2}\leqslant -2-3b<1$，所以 $-10\leqslant f(x_2)<1$；

(2) 当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant b\leqslant 0$ 时，因为 $-16\leqslant -16-12b\leqslant -10$，$-2\leqslant -2-3b\leqslant -\dfrac{1}{2}$，所以 $-16\leqslant f(x_2)\leqslant -\dfrac{1}{2}$.

综合(1)、(2)，可得 $-10\leqslant f(x_2)\leqslant -\dfrac{1}{2}$.

【例 9】 (1999 上海卷理 22)设椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，曲线 C_2 的方程为 $y=\dfrac{1}{x}$，且 C_1 与 C_2 在第一象限内只有一个公共点.

（Ⅰ）试用 a 表示点 P 的坐标；

(Ⅱ) 设 A、B 是椭圆 C_1 的两个焦点，当 a 变化时，求$\triangle ABP$ 的面积 $S(a)$的值域；

(Ⅲ) 记 $\min\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中最小的一个. 设 $g(a)$ 是以椭圆 C_1 的半焦距为边长的正方形的面积，试求函数 $f(a)=\min\{g(a), S(a)\}$ 的表达式.

本题的第(Ⅰ)问比较简单：

(Ⅰ) 由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=\dfrac{1}{x},\end{cases}$ 消去 y，得 $b^2x^4-a^2b^2x^2+a^2=0$ ①.

因为 C_1 与 C_2 在第一象限内只有一个公共点，所以方程①有相等的实数根.

即 $\Delta=a^4b^4-4a^2b^2=0$，所以 $ab=2$.

方程①的解为 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 或 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$(舍去).

所以点 P 的坐标为 $P\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)$.

第(Ⅱ)问和第(Ⅲ)问，有学生是这样解的：

(Ⅱ) 设椭圆 C_1 的焦距为 $2c$，离心率为 e，则 $S(a)=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot y_P=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}e$.

因为 $0<e<1$，则 $0<S(a)<\sqrt{2}$.

所以$\triangle ABP$ 的面积 $S(a)$的值域为$(0, \sqrt{2})$.

(Ⅲ) 由题设知，$g(a)=c^2$，由(Ⅰ)知，$ab=2$.

则
$$c^2=a^2-b^2=a^2-\frac{4}{a^2},\ g(a)=a^2-\frac{4}{a^2}.$$

$$S(a)=\sqrt{2}e=\sqrt{2}\cdot\frac{c}{a}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2-\frac{4}{a^2}}}{a}=\frac{\sqrt{2}(a^4-4)}{a^2}.$$

解不等式 $g(a)\geqslant S(a)$，即 $a^2-\dfrac{4}{a^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}(a^4-4)}{a^2}$.

两边分别平方并整理，得 $a^8-10a^4+24\geqslant 0$，即$(a^4-4)(a^4-6)\geqslant 0$.

所以 $0<a\leqslant\sqrt{2}$，或 $a\geqslant\sqrt[4]{6}$.

于是 $f(a)=\min\{g(a), S(a)\}=\begin{cases}S(a)=\dfrac{\sqrt{2}(a^4-4)}{a^2}, & 0<a\leqslant\sqrt{2} \text{ 或 } a\geqslant\sqrt[4]{6},\\ g(a)=a^2-\dfrac{4}{a^2}, & \sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt[4]{6}.\end{cases}$

可以求出：$ab=2$，$P\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)$.

上述解法中，第(Ⅰ)问是正确的；第(Ⅱ)问的结果是正确的，但是解题过程是错误的；第(Ⅲ)问的解题过程是正确的，但是结果是错误的.

首先看第(Ⅱ)问，题目要求是求$\triangle ABP$ 的面积 $S(a)$的值域，因此应该把$\triangle ABP$ 的面积 $S(a)$表达成 a 的函数，而上述解法中，把 $S(a)$表达成离心率 e 的函数了，这是解题目标的错误. 事实上，应该是 $S(a)=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot y_P=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-b^2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2\left(1-\dfrac{4}{a^4}\right)}$.