欧氏几何对偶原理研究

——“红、黄、蓝几何”纲要

陈传麟　著

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

欧氏几何对偶原理研究

——“红、黄、蓝几何”纲要

陈传麟　著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书主要内容，一是构建及论证欧氏几何对偶原理的存在（包括三维几何）；二是该原理的应用. 本书指出椭圆、双曲线、抛物线经“对偶”都可以当做“圆”；反之，圆经“对偶”都可以当做“椭圆”，或“双曲线”，或“抛物线”. 本书还指出存在“自对偶”的图形和“互对偶”的图形，等等. 欧氏几何对偶原理的建立，使欧氏几何这棵参天古树绽开了一片新葩.

本书可作为大专院校数学系师生和中学数学教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

欧氏几何对偶原理研究/陈传麟著. —上海：上海交通大学出版社，2011

ISBN 978-7-313-07030-2

Ⅰ.①欧… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①欧氏几何-对偶-研究 Ⅳ.①O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 001459 号

欧氏几何对偶原理研究

陈传麟 著

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030）

电话：64071208 出版人：韩建民

昆山市亭林印刷有限责任公司印刷 全国新华书店经销

开本：710mm×1000mm 1/16 印张：20.5 字数：351 千字

2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷

印数：1～2030

ISBN 978-7-313-07030-2/O 定价：50.00 元

本书谨献给三十年后，

不，五十年后的读者.

“试验、研究，而不要信仰.”

—— Rene' Descartes (1596～1650)

“因此，怀疑论是走向真理的第一步.”

—— Diderot (1713～1784)

“久而久之，任何东西就不能始终不变.”

—— Lamarck (1744～1829)

作 者 简 介

陈传麟,1940 年 5 月生于上海.

1963 年安徽大学数学系本科毕业.

1965 年试建立欧几里得几何的对偶原理,并于当年获得成功.

序

欧几里得几何(欧氏几何)是一门古老的几何,它的基本对象是“点”和“直线”.“点”是什么?“直线”是什么?通常是指看得见、摸得着的点和直线,即“有限点”和“有限直线”.而本书所说的“点”,除了“有限点”外,还包含着“无穷远点”;本书所说的“直线”,除了“有限直线”外,还包含着“无穷远直线”.

“无穷远点”在所有“点”中,是一批特殊的“点”;“无穷远直线”在所有“直线”中,是一条特殊的“直线”,本书称前者为“假点”;称后者为“假线”.

众所周知,引进“假点”和“假线”后,射影几何就有了“对偶原理”,那么,欧氏几何是否也有“对偶原理”呢?长期以来人们都认为“没有”.

本书作者指出:欧氏几何也有“对偶原理”.

“假线”是诸“直线”中一条特殊的“直线”,那么,对偶后就是一个特殊的“点”,因此,本书作者指出:在欧氏几何中,应该指定一个确定的点,让它与“假线”相对偶,称之为“标准点”.

在欧氏几何中引入“标准点”是建立欧氏几何对偶原理的成败之举,本书作者的睿智即表现于此.

常言道:“画龙点睛.”如果把欧氏几何比作一条长龙,那么,“标准点”就是“龙睛”,得此“睛”者得正果.

本书前半部论证了欧氏几何对偶原理的存在,后半部则是该原理的应用,举例数百款,涉及诸多方面,包括三维空间,可谓题题精彩.

欧氏几何对偶原理的建立,为欧氏几何注入了新的活力.

本书犹如一座宝山,阅读时需要有耐心、有毅力,切勿入宝山而空返.

汪义生

2010年12月20日

前　　言

长期以来人们都认为，只有射影几何才有“对偶原理”，而欧几里得几何没有，原因是：欧几里得几何涉及度量，其内容远比射影几何复杂，以致没有“对偶原理”，这是再明白不过的.

然而事实并非如此，本书论证了欧氏几何对偶原理的存在，并以大量的应用加以佐证.

欧氏几何里有着大量的概念，它们的“对偶概念”都要逐一说明，这是必不可少的，所以阅读本书需要相当的耐心，更何况，“对偶”本身就很“折磨”人，没有一定的毅力，恐怕很难读完全书.

射影几何的对偶原理的使用是一次性的，而欧氏几何的对偶原理可以反复使用，就是说，一个(真)命题，经对偶再对偶，得到的是一个更新的(真)命题，而不是回到原来的命题.欧氏几何的对偶原理，好比一台会生产定理的“机器”，它可以从一个定理开始，“生产”出一连串新而又新的定理，至于它们的正确性，均毋庸置疑，盖由欧氏几何的对偶原理保证.

欧氏几何的对偶原理，使我们再一次感受到数学的至善至美，由它得出的结论，有不少是前所未知的，相信该原理的价值会进一步体现在后续的研究中.

本书所据资料丰厚、翔实，全书含范例 500 余款，凡题皆配图，凡图必精制，全书共附图 800 余幅.

数学是“数”与“形”的科学，两者互相渗透.本书侧重的是“形”，它的发展必然会对“数”的发展有所影响，因而，本书除可供大专院校，尤其是师范院校师生教学参考外，还可以作为科研选题，供研究用.

目　　录

绪　论

众所周知，射影几何是有对偶原理的．那么，它的子几何——欧几里得几何是否也有对偶原理呢？本书给出的回答是：有！

0.1　引言

看得出来，解下面两道题，不会很轻松．

命题 1　设椭圆和抛物线有相同的焦点 F 及相同的准线 f，过 F 作两射线，且分别交椭圆、抛物线于 A、A' 和 B、B'，设 AB、$A'B'$ 交于 P，求证：P 在 f 上(如图 0.1)．

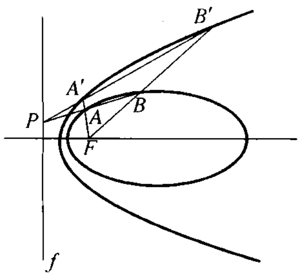

图 0.1

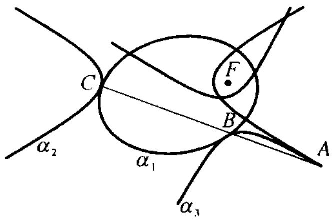

图 0.2

命题 2　设椭圆 α_1、双曲线 α_2、双曲线 α_3 有公共的焦点 F，且 α_1、α_2、α_3 间都有且仅有三个公共点，在 α_1、α_2 的三个公共点中，有一个是切点，记为 C；在 α_2、α_3 的公共点中，有一个是切点，记为 A；在 α_3、α_1 的公共点中，有一个是切点，记为 B，求证：A、B、C 三点共线(如图 0.2)．

再看两个命题：

命题 1′　设两个圆 α_1 和 α_2 有共同的圆心 O，过 O 作两射线，且分别交 α_1、α_2 于 A、A' 和 B、B'，求证：$AB /\!/ A'B'$(如图 0.3)．

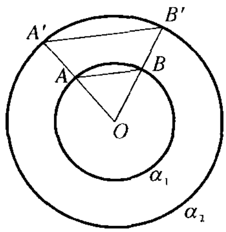

图 0.3

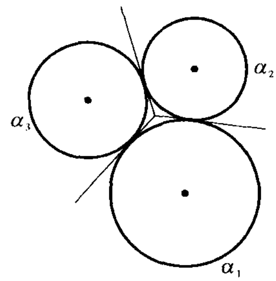

图 0.4

命题 2′ 设三个圆 α_1、α_2、α_3 两两外切，求证：它们的三条内公切线共点（如图 0.4）.

这后两个命题的正确性几乎是明显的.

因为前两个命题源于后两个命题，所以，由后两命题的正确，就保证前两命题也正确，这就是前两命题的证明.

请看，这样的证明多么简单. 那么，前后两命题有什么关系？为什么后两命题正确就保证前两命题也正确呢？这就要说到欧几里得几何的“对偶原理”(duality principle).

0.2 射影几何的对偶原理

我们知道，在射影几何(Projective Geometry)里，将一个命题(以下均指真命题)中所涉及的“点”和“直线”互换，形成的新命题也一定是真命题，这就是射影几何的“对偶原理”，如巴斯加(Blaise Pascal)定理和布里安香(C. J. Brianchon)定理就是一对对偶的命题，当然也有自身对偶的命题，如笛沙格(Girard Desargues)定理和巴普斯(Pappus)定理(参阅第 4 章).

由于射影几何不涉及度量(measure)，所以内容比较贫乏，其对偶原理很容易建立.

那么，在涉及长度和角度测量(linear measure and angular measure)的欧几里得几何中，是否也有“对偶原理”呢？

0.3 历来的观点

长期以来，人们都认为欧几里得几何中“没有”对偶原理，例如，在叶菲莫夫

的《高等几何学》一书的第 368 页上，作者这样说："我们注意到，在初等几何里没有对偶性. 例如在欧几里得几何的从属关系里，点和直线就不是互相对偶的；事实上，在欧几里得平面上，两个点总有公共的直线，但是两条直线，并不总有公共的点(可以是平行的). 在顺序关系里对偶性也不存在，那就是，欧几里得直线上所有的点排列成线性的顺序，而线束里的射线排成轮转的顺序，还容易说明在线段和角(这些东西在射影几何里都没有)的合同关系里有着不同，举例说，在欧几里得平面上，有合同的边的三角形相等(注：原文这里说的'相等'，是'全等'(congruence)的意思)，而有合同的角的三角形一般地却不相等(注：不全等)."

这段文字是想说明：欧几里得几何(初等几何)没有对偶原理的"道理"，实在是太简单、太明了，别在这件事上异想天开了.

然而事实并非如此，**欧几里得几何不但有对偶原理，而且"那个世界很精彩".**

为此，我们先弄清下面两件事.

0.4 两直线平行的定义

常见的定义是："若两直线没有公共点，则说这两直线平行"，这种定义用了否定词"没有"，这就掩盖了"平行"的实质.

其实，两直线平行时，也有"公共点"，它是一个"位于无穷远"、"看不见"、"摸不着"的"点"，不妨称为"假点(imaginary point)".

我们规定：**每条直线上都有且仅有一个假点；平行直线上的假点是相同的，不平行直线上的假点是不同的；所有的假点构成一条"假线(imaginary line)"，记为 z_1；凡假点均在假线上，且凡假线上的点都是假点.**

0.5 角的度量是怎样进行的

通常认为：因为平移不会改变角的大小，所以在哪里度量一个角，其结果都是一样的，无需什么规定，这个想法是错误的.

我们作如下规定：取一个点，记为 O_1，若一个角的顶点正好在 O_1，那么，该角的大小就按常规度量，该多大就多大；若一个角的顶点不在 O_1，那就需要作平移，使其顶点移到 O_1，然后按常规度量. 简而言之，只有顶点在 O_1 的角，才能按常

规直接度量.

这条规定看似多余,实则极为重要.

我们把上述选定的点 O_1 称为“标准点(standard point)”,它不仅是度量角的需要,而且也是度量线段长度的需要.

0.6 欧氏几何(欧几里得几何)的对偶几何

为统一起见,我们把欧氏几何改称为“**红几何(Red-geometry 或 R-geometry)**”.

红几何里研究的基本对象有两个:“红点”和“红线”.

“红点”包括通常的点和假点,前者称“红欧点”,后者称“红假点”.

“红线”包括通常的直线(但每条直线上都添加了一个红假点)和假线,前者称“红欧线”,后者称“红假线”.

重申一遍,每条红欧线上都有一个红假点;不平行的红欧线上的红假点是不相同的;红假点构成的集合称“红假线”;红假线只有一条.

现在把红点和红线的身份互换,即认为红点是“线”,称为“黄线”;红线是“点”,称为“黄点”. 那么,红几何的对偶几何就产生了,称为“**黄几何(Yellow-geometry 或 Y-geometry)**”.

生活在“黄世界”(黄几何)里的居民所说的“黄点”,就是指我们平常说的红线;那里居民所说的“黄线”,就是指我们说的红点. 走进那个“世界”,会很别扭,很不习惯,那么,这里就暂时搁下“黄几何”,先来探讨黄几何的对偶几何——“**蓝几何(Blue-geometry 或 B-geometry)**”.

0.7 “蓝几何”

蓝几何研究的基本对象有两个:“蓝点”和“蓝线”.

“蓝点”是指黄线,也就是红点.

“蓝线”是指黄点,也就是红线.

“点”就是点,“线”就是线,好像我们又转回了红几何,其实不然,因为在0.4、0.5 节中我们曾经指出:**红几何中有一条特殊的红线——红假线 z_1,以及一个特殊的红点——红标准点 O_1**,所以在蓝几何中也应该有这两样东西.

那么,由什么来担任“假线”的角色呢? 应该说,蓝线中任何一条都有资格,

因而，我们就任选一条，记为 z_3（图 0.5），称为“蓝假线”. **注意，在红观点下，这条 z_3 是很寻常的红欧线，然而，在蓝观点下，它很不寻常，它的身份相当于红假线 z_1，**是“看不见”、“摸不着”的，它在“无穷远处”.

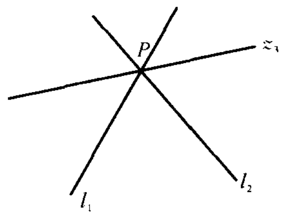

图 0.5

由什么来担任“标准点”的角色呢? 应该说，蓝点中任何一个都有资格，但是，**为方便计，我们就以红标准点 O_1 作为“蓝标准点”，不过，改记为 O_3.**

z_3 上的蓝点称“蓝假点”（相当于红假点），不在 z_3 上的蓝点（包括 z_1 上的红假点）称“蓝欧点”（相当于红欧点），除了 z_3 外，其余的蓝线（包括 z_1）称为“蓝欧线”（相当于红欧线）.

在图 0.5 中，在红观点下，l_1、l_2 是两条相交直线（红欧线），但是在蓝观点下，l_1、l_2 是两条“平行直线”（“平行的蓝欧线”）.

0.8　蓝角的度量（“蓝角度”）

在图 0.6 中容易看出，蓝角 α 和蓝角 β 是“蓝平移”关系，因而，在蓝观点下，它们是“蓝相等”的.

我们规定，凡顶点在 O_3 的蓝角的大小，就以其在红观点下的大小计算，例如，图 0.6 中的 β，其顶点恰好在 O_3 处，所以，在红观点下，如果它是 60°，那么，在蓝观点下，蓝角 β 的大小也是 60°，于是与 β“蓝相等”的 α，在蓝观点下也是 60°.（其实，在红观点下，角 α 远不止 60°）

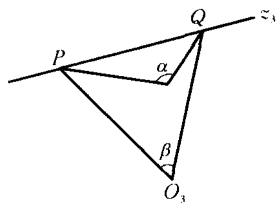

图 0.6

0.9　蓝线段的度量（“蓝长度”）

在图 0.7 中，两个蓝欧点 A、B 所形成的“蓝线段”，记为“lan (AB)”，它的“蓝长度”（也记为 lan(AB)）是这样规定的：

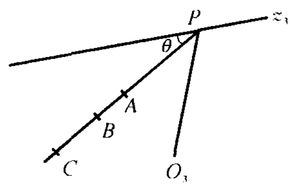

图 0.7

$$\mathrm{lan}(AB)=\frac{O_3P\cdot AB}{PA\cdot PB\cdot\sin\theta},$$