

欧氏几何对偶原理研究

——“红、黄、蓝几何”纲要

陈传麟 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

欧氏几何对偶原理研究

——“红、黄、蓝几何”纲要

陈传麟 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书主要内容,一是构建及论证欧氏几何对偶原理的存在(包括三维几何);二是该原理的应用.本书指出椭圆、双曲线、抛物线经“对偶”都可以当做“圆”;反之,圆经“对偶”都可以当做“椭圆”,或“双曲线”,或“抛物线”.本书还指出存在“自对偶”的图形和“互对偶”的图形,等等.欧氏几何对偶原理的建立,使欧氏几何这棵参天古树绽开了一片新葩.

本书可作为大专院校数学系师生和中学数学教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

欧氏几何对偶原理研究/陈传麟著. —上海:上海交通大学出版社, 2011
ISBN 978-7-313-07030-2

I. ①欧… II. ①陈… III. ①欧氏几何—对偶—研究
IV. ①0184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 001459 号

欧氏几何对偶原理研究

陈传麟 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

昆山市亭林印刷有限责任公司印刷 全国新华书店经销
开本: 710mm×1000mm 1/16 印张: 20.5 字数: 351 千字

2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷

印数: 1~2030

ISBN 978-7-313-07030-2/O 定价: 50.00 元

版权所有 侵权必究

本书谨献给三十年后，
不，五十年后的读者。

“试验、研究,而不要信仰。”

—— Rene' Descartes (1596~1650)

“因此,怀疑论是走向真理的第一步。”

—— Diderot (1713~1784)

“久而久之,任何东西就不能始终不变。”

—— Lamarck (1744~1829)

作者简介

陈传麟,1940年5月生于上海.

1963年安徽大学数学系本科毕业.

1965年试建立欧几里得几何的对偶原理,并于当年获得成功.

序

欧几里得几何(欧氏几何)是一门古老的几何,它的基本对象是“点”和“直线”。“点”是什么?“直线”是什么?通常是指看得见、摸得着的点和直线,即“有限点”和“有限直线”。而本书所说的“点”,除了“有限点”外,还包含着“无穷远点”;本书所说的“直线”,除了“有限直线”外,还包含着“无穷远直线”。

“无穷远点”在所有“点”中,是一批特殊的“点”;“无穷远直线”在所有“直线”中,是一条特殊的“直线”,本书称前者为“假点”;称后者为“假线”。

众所周知,引进“假点”和“假线”后,射影几何就有了“对偶原理”,那么,欧氏几何是否也有“对偶原理”呢?长期以来人们都认为“没有”。

本书作者指出:欧氏几何也有“对偶原理”。

“假线”是诸“直线”中一条特殊的“直线”,那么,对偶后就是一个特殊的“点”,因此,本书作者指出:在欧氏几何中,应该指定一个确定的点,让它与“假线”相对偶,称之为“标准点”。

在欧氏几何中引入“标准点”是建立欧氏几何对偶原理的成败之举,本书作者的睿智即表现于此。

常言道:“画龙点睛。”如果把欧氏几何比作一条长龙,那么,“标准点”就是“龙睛”,得此“睛”者得正果。

本书前半部论证了欧氏几何对偶原理的存在,后半部则是该原理的应用,举例数百款,涉及诸多方面,包括三维空间,可谓题题精彩。

欧氏几何对偶原理的建立,为欧氏几何注入了新的活力。

本书犹如一座宝山,阅读时需要有耐心、有毅力,切勿入宝山而空返。

汪义生

2010年12月20日

前 言

长期以来人们都认为,只有射影几何才有“对偶原理”,而欧几里得几何没有,原因是:欧几里得几何涉及度量,其内容远比射影几何复杂,以致没有“对偶原理”,这是再明白不过的。

然而事实并非如此,本书论证了欧氏几何对偶原理的存在,并以大量的应用加以佐证。

欧氏几何里有着大量的概念,它们的“对偶概念”都要逐一说明,这是必不可少的,所以阅读本书需要相当的耐心,更何况,“对偶”本身就很“折磨”人,没有一定的毅力,恐怕很难读完全书。

射影几何的对偶原理的使用是一次性的,而欧氏几何的对偶原理可以反复使用,就是说,一个(真)命题,经对偶再对偶,得到的是一个更新的(真)命题,而不是回到原来的命题。欧氏几何的对偶原理,好比一台会生产定理的“机器”,它可以从一个定理开始,“生产”出一连串新而又新的定理,至于它们的正确性,均毋庸置疑,盖由欧氏几何的对偶原理保证。

欧氏几何的对偶原理,使我们再一次感受到数学的至善至美,由它得出的结论,有不少是前所未有的,相信该原理的价值会进一步体现在后续的研究中。

本书所据资料丰厚、翔实,全书含范例 500 余款,凡题皆配图,凡图必精制,全书共附图 800 余幅。

数学是“数”与“形”的科学,两者互相渗透。本书侧重的是“形”,它的发展必然会对“数”的发展有所影响,因而,本书除可供大专院校,尤其是师范院校师生教学参考外,还可以作为科研选题,供研究用。

目 录

绪论	1
第 1 章 红几何	17
1.1 欧氏几何	17
1.2 欧氏几何的研究对象	17
1.3 “相交”和“平行”	17
1.4 “红点”和“红线”	18
1.5 “红线段”	18
1.6 “红角”	19
1.7 “红标准点”	19
1.8 两个红角的相等	19
1.9 两条红线段的相等	19
1.10 红几何的逻辑基础	20
1.11 抽象的观点和集合的观点	20
1.12 红点、红线的坐标	20
1.13 红点、红线间的三种关系：“属于”、“介于”、“合于”	21
1.14 “红变换”	22
第 2 章 蓝几何	25
2.1 “蓝几何”	25
2.2 蓝几何中的“平行”	26
2.3 “蓝线段”	26
2.4 “蓝角”	26

2.5	“蓝介于”	27
2.6	“蓝标准点”	27
2.7	蓝角的相等	27
2.8	蓝线段的长度	27
2.9	蓝线段的相等	28
2.10	蓝几何中的“合于”	28
2.11	用解析法研究蓝几何	29
2.12	“蓝变换”	30
2.13	几个例子	30
2.14	几个重要的问题	33
2.15	解决问题(1)	33
2.16	解决问题(2)	34
2.17	解决问题(2)(续)(蓝标准点 O_3 在红圆锥曲线外)	34
2.18	解决问题(2)(续)(蓝标准点 O_3 在红圆锥曲线上)	35
2.19	解决问题(2)(续)(蓝标准点 O_3 在红圆锥曲线内)	35
2.20	解决问题(3)	40
2.21	解决问题(4)	41
2.22	解决问题(5)(第一种情况)	42
2.23	解决问题(5)(第二种情况)	43
2.24	解决问题(6)(第一种情况)	45
2.25	解决问题(6)(第二种情况)	49
2.26	红圆锥曲线和蓝圆锥曲线	51
第3章	黄几何	58
3.1	“黄几何”	58
3.2	“黄平行”与“黄相交”	59
3.3	“黄角”及其度量	59
3.4	“黄线段”及其度量	59
3.5	黄点、黄线的“黄坐标”	60
3.6	黄几何中的“正交线性变换”(“黄变换”)	63

3.7	“黄圆锥曲线”	65
3.8	黄圆锥曲线和红圆锥曲线的关系	66
3.9	红圆 L 所产生的黄圆锥曲线 L'	71
3.10	红圆锥曲线 L 产生的黄圆 L'	73
3.11	红、黄、蓝几何	77
第4章	自对偶	86
4.1	自对偶构图	86
4.2	巴普斯定理的推广	87
4.3	几个著名射影定理的“源头”	88
4.4	一般构图(二维)	91
4.5	一般构图(三维)	92
4.6	复杂的构图	94
4.7	“降维”与“升维”	97
4.8	“红、黄自对偶图形”	98
4.9	“红、蓝自对偶图形”	103
4.10	“黄、蓝自对偶图形”	108
4.11	“红、黄、蓝三方对偶图形”	114
4.12	“蓝一维几何”	115
第5章	互对偶	119
5.1	矩形和菱形	119
5.2	三角形的“外接圆”和“内切圆”	124
5.3	四边形的“外接圆”和“内切圆”	138
5.4	“等角共轭点”和“等截共轭线”	142
5.5	椭圆和双曲线	144
5.6	“等轴双曲线”和“等轴椭圆”	154
5.7	“黄等轴双曲线”和“黄等轴椭圆”	157
5.8	正多面体的对偶关系	159

第 6 章 欧氏几何对偶原理的应用	162
6.1 “正对偶”和“逆对偶”	162
6.2 有关对称性的命题	170
6.3 有关一个圆的命题	180
6.4 有关两个圆的命题	187
6.5 其他命题的例子	220
6.6 “共轭三曲线”	237
 附录 1 二维几何中的对偶原理	244
附录 2 三维几何中的对偶原理	247
附录 3 将红圆锥曲线视为“蓝圆锥曲线”	265
附录 4 由红圆锥曲线产生的“黄圆锥曲线”	285
附录 5 补遗	295
 人名中英文对照	310
 参考文献	312
 后记	313

绪 论

众所周知,射影几何是有对偶原理的. 那么,它的子几何——欧几里得几何是否也有对偶原理呢? 本书给出的回答是: 有!

0.1 引言

看得出来,解下面两道题,不会很轻松.

命题 1 设椭圆和抛物线有相同的焦点 F 及相同的准线 f , 过 F 作两射线, 且分别交椭圆、抛物线于 A 、 A' 和 B 、 B' , 设 AB 、 $A'B'$ 交于 P , 求证: P 在 f 上 (如图 0.1).

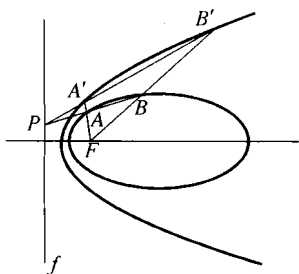


图 0.1

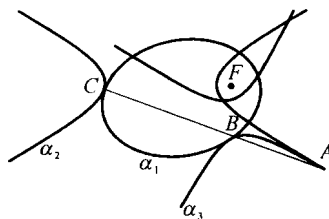


图 0.2

命题 2 设椭圆 α_1 、双曲线 α_2 、双曲线 α_3 有公共的焦点 F , 且 α_1 、 α_2 、 α_3 间都有且仅有三个公共点, 在 α_1 、 α_2 的三个公共点中, 有一个是切点, 记为 C ; 在 α_2 、 α_3 的公共点中, 有一个是切点, 记为 A ; 在 α_3 、 α_1 的公共点中, 有一个是切点, 记为 B , 求证: A 、 B 、 C 三点共线 (如图 0.2).

再看两个命题:

命题 1' 设两个圆 α_1 和 α_2 有共同的圆心 O , 过 O 作两射线, 且分别交 α_1 、 α_2 于 A 、 A' 和 B 、 B' , 求证: $AB \parallel A'B'$ (如图 0.3).

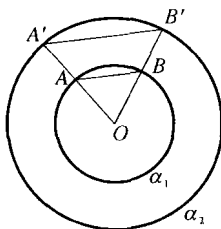


图 0.3

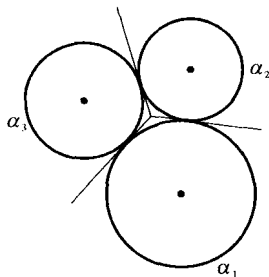


图 0.4

命题 2' 设三个圆 α_1 、 α_2 、 α_3 两两外切, 求证: 它们的三条内公切线共点 (如图 0.4).

这后两个命题的正确性几乎是明显的.

因为前两个命题源于后两个命题, 所以, 由后两命题的正确, 就保证前两命题也正确, 这就是前两命题的证明.

请看, 这样的证明多么简单. 那么, 前后两命题有什么关系? 为什么后两命题正确就保证前两命题也正确呢? 这就要说到欧几里得几何的“对偶原理” (duality principle).

0.2 射影几何的对偶原理

我们知道, 在射影几何 (Projective Geometry) 里, 将一个命题 (以下均指真命题) 中所涉及的“点”和“直线”互换, 形成的新命题也一定是真命题, 这就是射影几何的“对偶原理”, 如巴斯加 (Blaise Pascal) 定理和布里安香 (C. J. Brianchon) 定理就是一对对偶的命题, 当然也有自身对偶的命题, 如笛沙格 (Girard Desargues) 定理和巴普斯 (Pappus) 定理 (参阅第 4 章).

由于射影几何不涉及度量 (measure), 所以内容比较贫乏, 其对偶原理很容易建立.

那么, 在涉及长度和角度测量 (linear measure and angular measure) 的欧几里得几何中, 是否也有“对偶原理”呢?

0.3 历来的观点

长期以来, 人们都认为欧几里得几何中“没有”对偶原理, 例如, 在叶菲莫夫

的《高等几何学》一书的第 368 页上,作者这样说:“我们注意到,在初等几何里没有对偶性.例如在欧几里得几何的从属关系里,点和直线就不是互相对偶的;事实上,在欧几里得平面上,两个点总有公共的直线,但是两条直线,并不总有公共的点(可以是平行的).在顺序关系里对偶性也不存在,那就是,欧几里得直线上所有的点排列成线性的顺序,而线束里的射线排成轮转的顺序,还容易说明在线段和角(这些东西在射影几何里都没有)的合同关系里有着不同,举例说,在欧几里得平面上,有合同的边的三角形相等(注:原文这里说的‘相等’,是‘全等’(congruence)的意思),而有合同的角的三角形一般地却不相等(注:不全等).”

这段文字是想说明:欧几里得几何(初等几何)没有对偶原理的“道理”,实在是太简单、太明了,别在这件事上异想天开了.

然而事实并非如此,欧几里得几何不但有对偶原理,而且“那个世界很精彩”.

为此,我们先弄清下面两件事.

0.4 两直线平行的定义

常见的定义是:“若两直线没有公共点,则说这两直线平行”,这种定义用了否定词“没有”,这就掩盖了“平行”的实质.

其实,两直线平行时,也有“公共点”,它是一个“位于无穷远”、“看不见”、“摸不着”的“点”,不妨称为“假点(imaginary point)”.

我们规定:每条直线上都有且仅有一个假点;平行直线上的假点是相同的,不平行直线上的假点是不同的;所有的假点构成一条“假线(imaginary line)”,记为 z_1 ;凡假点均在假线上,且凡假线上的点都是假点.

0.5 角的度量是怎样进行的

通常认为:因为平移不会改变角的大小,所以在哪里度量一个角,其结果都是一样的,无需什么规定,这个想法是错误的.

我们作如下规定:取一个点,记为 O_1 ,若一个角的顶点正好在 O_1 ,那么,该角的大小就按常规度量,该多大就多大;若一个角的顶点不在 O_1 ,那就需要作平移,使其顶点移到 O_1 ,然后按常规度量.简而言之,只有顶点在 O_1 的角,才能按常

规直接度量.

这条规定看似多余,实则极为重要.

我们把上述选定的点 O_1 称为“标准点(standard point)”,它不仅是度量角的需要,而且也是度量线段长度的需要.

0.6 欧氏几何(欧几里得几何)的对偶几何

为统一起见,我们把欧氏几何改称为“红几何(Red-geometry 或 R-geometry)”.

红几何里研究的基本对象有两个:“红点”和“红线”.

“红点”包括通常的点和假点,前者称“红欧点”,后者称“红假点”.

“红线”包括通常的直线(但每条直线上都添加了一个红假点)和假线,前者称“红欧线”,后者称“红假线”.

重申一遍,每条红欧线上都有一个红假点;不平行的红欧线上的红假点是不相同的;红假点构成的集合称“红假线”;红假线只有一条.

现在把红点和红线的身份互换,即认为红点是“线”,称为“黄线”;红线是“点”,称为“黄点”.那么,红几何的对偶几何就产生了,称为“黄几何(Yellow-geometry 或 Y-geometry)”.

生活在“黄世界”(黄几何)里的居民所说的“黄点”,就是指我们平常说的红线;那里居民所说的“黄线”,就是指我们说的红点.走进那个“世界”,会很别扭,很不习惯,那么,这里就暂时搁下“黄几何”,先来探讨黄几何的对偶几何——“蓝几何(Blue-geometry 或 B-geometry)”.

0.7 “蓝几何”

蓝几何研究的基本对象有两个:“蓝点”和“蓝线”.

“蓝点”是指黄线,也就是红点.

“蓝线”是指黄点,也就是红线.

“点”就是点,“线”就是线,好像我们又转回了红几何,其实不然,因为在0.4、0.5节中我们曾经指出:红几何中有一条特殊的红线——红假线 z_1 , 以及一个特殊的红点——红标准点 O_1 , 所以在蓝几何中也应该有这两样东西.

那么,由什么来担任“假线”的角色呢?应该说,蓝线中任何一条都有资格,

因而,我们就任选一条,记为 z_3 (图 0.5),称为“蓝假线”. 注意,在红观点下,这条 z_3 是很寻常的红欧线,然而,在蓝观点下,它很不寻常,它的身份相当于红假线 z_1 ,是“看不见”、“摸不着”的,它在“无穷远处”.

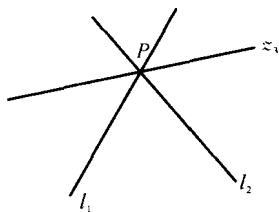


图 0.5

由什么来担任“标准点”的角色呢? 应该说,蓝点中任何一个都有资格,但是,为方便计,我们就以红标准点 O_1 作为“蓝标准点”,不过,改记为 O_3 .

z_3 上的蓝点称“蓝假点”(相当于红假点),不在 z_3 上的蓝点(包括 z_1 上的红假点)称“蓝欧点”(相当于红欧点),除了 z_3 外,其余的蓝线(包括 z_1)称为“蓝欧线”(相当于红欧线).

在图 0.5 中,在红观点下, l_1 、 l_2 是两条相交直线(红欧线),但是在蓝观点下, l_1 、 l_2 是两条“平行直线”(“平行的蓝欧线”).

0.8 蓝角的度量(“蓝角度”)

在图 0.6 中容易看出,蓝角 α 和蓝角 β 是“蓝平移”关系,因而,在蓝观点下,它们是“蓝相等”的.

我们规定,凡顶点在 O_3 的蓝角的大小,就以其在红观点下的大小计算,例如,图 0.6 中的 β ,其顶点恰好在 O_3 处,所以,在红观点下,如果它是 60° ,那么,在蓝观点下,蓝角 β 的大小也是 60° ,于是与 β “蓝相等”的 α ,在蓝观点下也是 60° . (其实,在红观点下,角 α 远不止 60°)

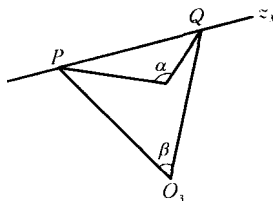


图 0.6

0.9 蓝线段的度量(“蓝长度”)

在图 0.7 中,两个蓝欧点 A、B 所形成的“蓝线段”,记为“ $\text{lan}(AB)$ ”,它的“蓝长度”(也记为 $\text{lan}(AB)$)是这样规定的:

$$\text{lan}(AB) = \frac{O_3P \cdot AB}{PA \cdot PB \cdot \sin \theta},$$

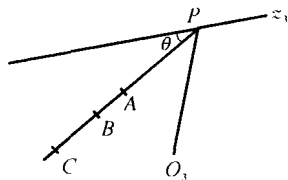


图 0.7