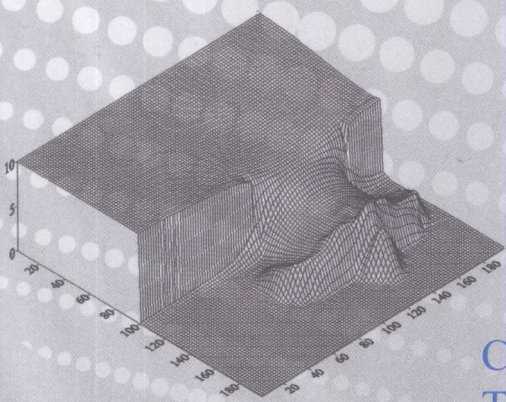


河海大学“211工程”三期资助研究生系列教材



COMPUTATIONAL HYDRAULICS
THEORY AND APPLICATION

计算水力学 理论与应用

汪德燿



科学出版社

河海大学“211 工程”三期资助研究生系列教材

计算水力学

理论与应用

汪德燿

科学出版社

北 京

内 容 简 介

计算水力学是涉及经典力学、计算方法、数值分析、程序编制、数据处理和可视化等学科的一门综合性交叉学科,是水利、交通、环境、土木、地质、采矿、能源等工科专业硕、博士研究生培养方案中一门重要的专业基础课程。

本书将计算水力学的主要内容写成五篇,分别为有限差分法,有限单元法,有限体积法,边界的特殊处理及可视化方法与应用。其中第1章概述计算水力学的内涵、特点、基本方程和学习要求;第2、3章阐述有限差分法的理论及应用;第4~7章阐述有限单元法的理论及应用;第8、9章阐述有限体积法的理论及应用;第10~12章阐述特殊边界的处理;第13、14章阐述可视化方法与应用。每篇内容中理论部分从物理概念的分析入手,阐述基础的建模思路、建模步骤和解法;应用部分主要选择多年来的科研成果,也部分选用一些其他研究工作者的典型实例,注重介绍分析、处理问题的方法和途径。另外本书还附自编的基础性、启发性的教学软件,读者可在科学出版社网站(www.sciencep.com)下载区资料代码类下载该软件(计算水力学理论与应用配套程序)。

图书在版编目(CIP)数据

计算水力学理论与应用/汪德燿. —北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-031272-3

I. 计… II. 汪… III. ①水力计算 IV. TV1314

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 101154 号

责任编辑:胡 凯 龚 勋/责任校对:邹慧卿

责任印制:赵 博/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2011年8月第一次印刷 印张: 37 1/2

印数: 1—2 000 字数: 760 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

计算水力学是一门交叉学科,形成于 20 世纪 60 年代中期,在随后的 20 年中迅速发展成为一门重要学科,广泛应用于水资源开发及其他工程中. 20 世纪 90 年代后,计算水力学无论在计算方法还是求解技术上,均出现了许多新的成果,随着计算机硬件和软件突飞猛进的发展,在计算水力学计算结果的图示和可视化方面也取得了丰硕的成果. 这些都为计算水力学增添了更为丰富的内容. 因此撰写本书以反映计算水力学的基本理论和近代成果已是十分必要.

水动力学及以水为载体的物质的传输过程的控制方程具有强非线性和非正定性,在多数情况下无法求得方程函数的解析解. 为此,将计算区域剖分,用有限个空间点的集合来代表计算区域,用控制方程的某种代表形式(离散形式)求出这些空间点处的函数值,用这些函数值的集合构成方程函数的近似解. 这就是水动力学及以水为载体的物质的传输问题的数值模拟思路. 根据剖分计算区域的方法的不同,以及构成控制方程代表形式的原理的不同,数值模型可以大致分成三种主要类型:有限差分法、有限单元法和介乎前两者之间的有限体积法. 从数学表达的形式上,这三种数值模型可以用如下的形式统一表达

$$\sum_{e=1}^N \left[\int_{\Omega_e} L(\tilde{u})w(x)dx - \lambda \int_{S_e \cap S} l(\tilde{u})w(x)dS \right] = 0$$

式中, $L(\cdot)$ 代表控制方程; $l(\tilde{u})$ 是梯度边界条件; $\tilde{u}$ 是方程函数的近似解; $w(x)$ 是选定的权函数; λ 是拉格朗日乘数; Ω_e 是计算区域剖分成的子区域; S_e 是子区域的边界; S 是整个计算区域的边界; x 是空间坐标; N 是子区域的数目. 选取不同的权函数就可以得到三种数值模型的表达式. 本书包括有限差分法、有限单元法和有限体积法的内容,给出数值模型比较完整的概念. 近年来计算成果的可视化发展也为计算水力学增添了新的色彩,使数值成果以物理图像的形式逼真地显示,使人们形象地看到了一个虚拟、但又会在现实世界实实在在出现的物理过程. 本书也包含了近年来我们这方面的研究成果.

本书将计算水力学的主要内容分为五篇,分别为有限差分法、有限单元法、有限体积法、边界的特殊处理及可视化方法与应用. 其中第 1 章概述计算水力学的内涵、特点、基本方程和学习要求;第 2、3 章阐述有限差分法的理论及应用;第 4~7 章阐述有限单元法的理论及应用;第 8、9 章阐述有限体积法的理论及应用;第 10~12 章阐述边界的特殊处理;第 13、14 章阐述可视化方法与应用.

本书的撰写思想: 每篇内容中理论部分从物理概念的分析入手, 阐述基础的建模思路、建模步骤和解法; 应用部分主要选择我们课题组几十年来的科研成果, 也部分选用一些其他研究工作者的典型实例, 注重介绍分析、处理问题的方法和途径. 另外本书还附自编的基础性、启发性的教学软件, 读者可在科学出版社网站 (www.sciencep.com) 下载区资料代码类下载该软件 (计算水力学理论与应用配套程序).

本书由汪德燿、赖锡军、周杰、戴昱等撰写, 其中, 第二篇由戴昱撰写, 第三篇由赖锡军撰写, 第五篇由周杰撰写, 最后由汪德燿统稿.

在本书的编撰过程中, 课题组的谢龙博士、庞翠超、徐健、李羽文、王磊新、周加成、冯乐、路明、唐锐、徐秀楠、张金亮、张秀姬、张晓慧硕士不仅提供了有关素材, 提出了许多有益的建议, 而且还承担了全书稿的打印和绘图工作. 他们的智慧和辛勤工作将一并留在本书的字里行间.

汪德燿

2010 年 3 月

目 录

前言

第 1 章 计算水力学和基本控制方程	1
1.1 引言	1
1.2 本书的基本内容	3
1.3 物理守恒定律的数学表达式	4
1.3.1 连续方程、动量方程和能量方程	4
1.3.2 均值方程与脉动量方程	13
1.3.3 水动力学计算中的基本方程	16
1.3.4 涡的传输方程	22
1.3.5 标量的传输方程	24
1.3.6 方程的分类	25
参考文献	28

第一篇 有限差分法

第 2 章 有限差分的基本形式	31
2.1 基本概念	31
2.1.1 连续函数与数值离散逼近	31
2.1.2 差分的概念	32
2.2 Taylor 级数法	33
2.3 多项式插值	35
2.4 积分法	36
2.5 控制体法	38
2.6 显式和隐式差分格式	41
2.6.1 显式差分格式	41
2.6.2 隐式差分格式	41
2.7 差分方程的守恒性	42
2.8 差分方程的相容性、收敛性和稳定性	45
2.8.1 相容性	45
2.8.2 收敛性	47

2.8.3 稳定性	47
2.9 特征线法	64
2.9.1 特征方程、特征线和 Riemann 不变量	64
2.9.2 特征线法	67
2.10 显式差分格式	70
2.10.1 Lax 格式和耗散界面 (Dissipative Interface)	70
2.10.2 逆风格式 (Upwind Scheme)	72
2.10.3 蛙跳格式 (Leap-frog Scheme)	73
2.10.4 Dufort-Frankel 格式	76
2.10.5 Lax-Wendroff 二阶精度格式	77
2.10.6 MaCormack 格式	79
2.10.7 Adams-Bashforth 格式	80
2.10.8 Rusanov 格式	81
2.10.9 Самарский 格式	82
2.10.10 TVD 格式	83
2.11 隐式差分格式	87
2.11.1 一般描述	87
2.11.2 隐式格式的变权形式	90
2.11.3 矩阵稳定分析法	91
2.11.4 隐式格式的解法	94
2.11.5 关于隐式格式的若干说明	95
2.12 变系数与非线性方程的有限差分离散	96
2.12.1 非线性微分方程的显式格式	96
2.12.2 非线性微分方程的隐式格式	99
2.12.3 线性迭代 (Picard) 与二次迭代 (Newton) 的比较	103
2.13 二维和三维方程的有限差分离散	103
2.13.1 概述	103
2.13.2 分步法的概念	104
2.13.3 空间概念上的分步法	104
2.13.4 物理概念上的分步法	113
2.13.5 空间概念上和物理概念上联合分步的格式	115
2.14 初始条件与边界条件	116
2.15 误差分析	120
2.15.1 舍入误差和截断误差	120
2.15.2 误差的物理概念	122

2.16 适定性的物理意义与 Lax 等价定理	128
第 3 章 有限差分法在水力学问题中的应用	130
3.1 明渠非恒定流的有限差分解	130
3.1.1 一维明渠非恒定流方程 (Saint-Venant Equations)	130
3.1.2 明渠非恒定流微分方程的差分形式	131
3.1.3 Lax-Wendroff 格式, Abbott 格式和 Preissmann 格式的误差分析	154
3.1.4 河网非恒定流的有限差分解	162
3.1.5 平面二维明渠非恒定流的有限差分解	169
3.1.6 计算实例	196
3.2 扩散问题的有限差分解	199
3.2.1 一维扩散方程的数值解	199
3.2.2 二维对流-扩散方程的数值解	203
3.2.3 计算实例	206
3.3 明渠重力异重流的有限差分解	209
3.3.1 异重流的控制方程	209
3.3.2 异重流内界面的定义	211
3.3.3 异重流控制方程的简化形式	212
3.3.4 算例	215
3.4 浅水区波浪问题的有限差分解	217
3.4.1 微分方程	217
3.4.2 Boussinesq 方程的数值解	220
3.4.3 计算实例	222
3.5 河床演变的有限差分解	223
3.5.1 河床演变的数学模型 I(考虑总输沙过程或底沙输送为主的情况)	223
3.5.2 数值模型 I 的数值解	229
3.5.3 河床演变的数值模型 II(以悬移质为主的情况)	231
3.5.4 计算实例	234
3.6 Navier-Stokes 方程的有限差分解	236
3.6.1 概述	236
3.6.2 速度-压强求解法	242
3.6.3 计算实例	247
3.7 势流的有限差分解	248
3.7.1 概述	248
3.7.2 迭代求解法	249
3.7.3 边界条件	253

3.7.4 收敛准则	254
3.7.5 迭代法的收敛性和收敛速度	254
3.7.6 计算实例	259
参考文献	262

第二篇 有限单元法

第 4 章 有限单元法的预备知识	267
4.1 线性空间及线性算子	267
4.1.1 线性空间 (Linear Space)	267
4.1.2 线性算子	268
4.1.3 最佳逼近	269
4.2 伽辽金法的基本概念	274
4.2.1 基本概念	274
4.2.2 例子	274
第 5 章 有限单元法	277
5.1 有限单元法的基本概念	277
5.2 伽辽金有限单元法离散	280
5.2.1 单元矩阵	280
5.2.2 整体矩阵	289
5.3 施加边界条件	292
第 6 章 内插函数	294
6.1 概述	294
6.2 三角形单元	295
6.2.1 斜坐标和面坐标	295
6.2.2 线性内插函数	298
6.2.3 二次内插函数	301
6.3 矩形单元	303
6.3.1 局部坐标系	303
6.3.2 线性插值函数	304
6.3.3 二次内插函数	304
6.3.4 等参单元	306
第 7 章 在水力学问题中的应用	311
7.1 渗流问题中的应用	311
7.1.1 恒定渗流	311
7.1.2 非恒定渗流	312

7.2 明渠非恒定流计算	318
7.2.1 控制方程	318
7.2.2 控制方程的离散	318
参考文献	326

第三篇 有限体积法

第 8 章 有限体积法	331
8.1 基本概念	332
8.1.1 相关名词	332
8.1.2 控制体积的选择	333
8.1.3 结构与非结构网格	334
8.2 有限体积法离散	336
8.2.1 离散思路及基本格式	336
8.2.2 物理特性要求	340
8.2.3 迎风型通量格式	343
8.2.4 TVD 格式	347
8.3 非结构网格上的有限体积法	351
8.3.1 基本方程	351
8.3.2 离散基本思路	353
8.3.3 数值通量的近似	354
第 9 章 在水力学问题中的应用	358
9.1 二维明渠非恒定流计算	358
9.1.1 基本方程	358
9.1.2 控制方程的离散	359
9.1.3 计算实例	370
9.2 浅水方程的 LU-SGS 隐式算法	377
9.2.1 网格重新编号	377
9.2.2 LU-SGS 隐式推进	381
9.2.3 长江口潮流模拟	383
9.3 三维浅水流动计算	385
9.3.1 基本方程	385
9.3.2 数值方法	386
9.3.3 模型验证	388
9.4 三维紊动分层流计算	391

9.4.1 紊动分层流基本方程	392
9.4.2 紊流模型及控制方程离散	393
9.4.3 压力校正法	393
9.4.4 边界条件	396
9.4.5 盐度引起的负浮力流动的模拟	397
参考文献	400

第四篇 边界的特殊处理

第 10 章 开边界	405
10.1 概述	405
10.2 辐射型开边界模型	405
10.2.1 辐射型开边界模型 (Sommerfeld Condition)	405
10.2.2 曲线边界条件下含变系数波动方程的开边界	409
10.2.3 一阶对流方程	411
10.2.4 线性浅水方程的开边界	416
10.2.5 开边界条件的有限差分离散	419
10.3 特征方程型开边界模型	420
10.3.1 特征方程法	420
10.3.2 在明渠非恒定流动的应用	424
10.3.3 N-S 方程中的应用	431
第 11 章 动边界	444
11.1 概述	444
11.2 欧拉 (Euler) 模型	445
11.2.1 MAC 法 (Marker-In-Cell Method)	445
11.2.2 流体体积法 [Volume of Fluid (VOF) Method]	452
11.2.3 网格变换法	458
11.3 拉格朗日模型 (Lagrangian Model)	469
11.3.1 标准的拉格朗日法	469
11.3.2 拉格朗日-欧拉 (Lagrangian-Eulerian) 模型	478
11.3.3 自由拉格朗日 (Lagrange) 模型	490
第 12 章 网格变换	501
12.1 概述	501
12.2 广义曲线坐标	502
12.2.1 广义坐标	502

12.2.2 变换的度量张量和物理特性	504
12.2.3 正交和保角坐标的限制	505
12.2.4 广义坐标引入的附加误差	507
12.2.5 广义坐标系中的控制方程	509
12.3 区域映射的类型	512
12.3.1 单连通域 (Simply Connected Regions)	512
12.3.2 多连通域 (Multiply-Connected Regions)	514
12.4 坐标变换的微分方程法	516
12.4.1 求解椭圆微分方程	516
12.4.2 广义坐标应用的例子	519
参考文献	521

第五篇 可视化方法与应用

第 13 章 基本信息元的可视化方法	525
13.1 标量场的可视化方法	525
13.1.1 等值线的绘制方法	525
13.1.2 曲面的绘制方法	530
13.2 矢量场的可视化方法	531
13.2.1 流场的可视化方法	531
13.2.2 流线的绘制	534
第 14 章 可视化发展趋势	536
14.1 地理信息系统的结合	536
14.2 虚拟现实的应用	537
14.3 OpenGL 的应用	542
14.4 网络化趋势	547
参考文献	547
附录 1 浅水方程有限单元离散方程中的单元矩阵	549
附录 2 非恒定渗流有限单元模型的单元矩阵	556
附录 3 一维非恒定流计算程序	557
附录 4 二维对流-扩散方程程序	562
附录 5 拓广的拉普拉斯方程的有限单元程序	566
附录 6 例子程序: Lawson 算法	577
附录 7 等值线的绘制程序	584

第 1 章 计算水力学和基本控制方程

1.1 引言

计算水力学作为一门独立的学科,形成于 20 世纪 60 年代中期,它的出现标志着工程流体力学发展的一个新阶段,是世界经济迅猛发展和科学技术水平不断提高,特别是高速、大容量电子计算机的快速更新换代为计算技术的发展提供了雄厚技术基础的一个硕果. 计算水力学已经深入到几乎所有的技术科学领域,甚至某些社会科学方面.

自 19 世纪 Froude 奠定了物理比尺模型的理论基础,并首次应用于船舶阻力的比尺模型试验以后,物理比尺模型曾经是验证流体力学理论和研究工程水力学问题的唯一手段. 但是随着工程的不断大型化,社会、经济、环境的综合考虑在整个工程规划中占据越来越重要的地位. 大型水利、航运工程的规划和工程结构设计,不能仅考虑紧邻区域的水力条件及其影响,而必须考虑该项工程对于整个区域(例如,河流的整个流域),甚至对邻近区域的影响. 又如,要真正发挥一个排灌渠系(或河网)的最大效益,仅仅对其中的渠道(或河道)进行单个地考虑是不行的. 如果整个渠系(或河网)的过水或输沙(排污)能力不合要求,那么即使个别渠道(或河道)设计、整治得很好,渠系(或河网)的效益也不可能得到充分发挥. 依赖物理比尺模型对渠系进行系统研究是难以奏效的,在经济上也是不合理的. 在环境问题中,由于生物、化学过程的参与,物理比尺模型则不能用于这类问题. 这就迫使人们不得不寻求其他研究手段,数学模型也就应运而出了.

数学模型是将已知的水动力学及以水为载体的物质的传输过程的基本定律用数学方程进行描述. 在一定的定解条件(初始条件和边界条件)下求解这些数学方程,从而达到模拟某个水动力学及以水为载体的物质的传输过程的理论问题或工程实际问题. 应该说传统的水力计算也是一种“数学模拟”,但由于它只涉及初等数学理论,能解决的问题较简单,还不能算是真正的数学模型. 在 20 世纪 50 年代以前,数学模拟的基本理论已经建立,运用这些理论也曾解决过一些工程问题. 但是,这些基本理论的真正工程应用却是在电子计算机发明以后. 1952~1954 年 Isaacson 和 Troesch 首次建立了俄亥俄河和密西西比河的部分河段的数学模型,并进行了实际洪水过程的模拟^[1]. 但这以后,这方面的研究并没有得到发展. 直至 20 世纪 60 年代中期,为了解决各种各样的设计和规划问题,数学模型再次得到重视. 人们针对个别的工程问题建立了大量用途单一的数学模型并编制了相应的计算程序,这些

模型可以用于解决一系列的工程问题. 在此工作的基础上, 70 年代中期, 一种功能更加完善的系统数学模型出现了. 这种系统模型综合了过去的用途单一的模型的功能, 可以对整个流域、河湖、近海、建成的或规划中的水利工程等进行系统的模拟. 这种系统模型的功能已远远超过了物理比尺模型.

在理论课题的研究领域中, 1955 年 Allen 和 Southwell 求解了黏性不可压缩流体的圆柱绕流^[2], 在 $Re = 100$ 时, 计算中出现了不稳定, 这种不稳定与物理上的不稳定倾向间奇妙的一致性揭示了数学模拟的物理实质. 1965 年 Harlow 和 Fromm 利用数学模拟, 得到了时间因变的卡门涡街的精细形态^[3]. 1968 年 Compbell 和 Mueller 利用数学模型发现了亚音速斜激波的分离现象, 而后才由风洞试验证实了这个现象的存在^[4]. 这两个著名的数学模拟的例子展示了数学模型富含的创造力. 数学模型在工程应用和理论研究中的成功标志着一门新的学科——计算水力学的诞生. 这门新的学科一经出现就显示出了它强大的生命力, 已成为可与物理比尺模型相比拟的研究与设计的重要手段. 进入 20 世纪 80 年代后, 不少研究、设计部门集中力量加强了数学模型的研究、开发. 特别是紊动模式的不断完善, 三维的数学模型也已进入实用阶段. 许多复杂边界下的三维流场的数学模拟已获得成功. 现在, 尤其是工程问题, 几乎一半以上的研究、设计工作均由数学模型完成. 在一些领域, 例如, 在环境领域内, 物理比尺模型只起到校核和提供数学模型所需参数的作用.

计算水力学可以说是研究如何用计算机进行实验的科学. 正确处理的边界条件相当于物理比尺模型中的固体边界与自由边界; 数学模型中用以表征流体性质的参数, 诸如: 黏性、密度等, 则相当于物理比尺模型中所用的试验流体; 而通过数值运算求得的计算域内每一个特定的空间点 (计算水力学中称之为节点) 处的待求函数值, 如水动力学中常用的速度、压强和环境问题常用的污染物浓度等的值, 则与物理比尺模型中利用探头测得的某些固定点处的速度、压强值或浓度值相对应^①. 所以, 从这个角度看, 称数学模拟是计算机实验, 是十分确切的. 但是数学模拟有它独特的优点:

- 可以完全自由地改变或控制流体的性质;
- 可以进行严格的一维、二维和三维流动的“试验”;
- 可以完全自由地选择流动参数, 如初始速度剖面等;
- 可以进行全尺度“试验”, 不存在比尺效应;
- 可以进行物理和生物化学现象的各种理论近似处理的有效性和敏感性试验;
- 可以验证流体的本构方程的可靠性, 如非牛顿流体的本构方程的验证等.

这些都是物理比尺模型难以或无法做到的. 当然, 数值模型所依据的是数学方

^① 不同的是物理比尺模型中可以记录速度、压强、浓度等物理或化学量随时间变化的连续值, 而数学模型中只是给出它们的时间的离散值.

程的离散形式, 计算区域和方程的离散不仅引起量上的误差, 而且处理不当常常改变了方程的性质. 描述无黏性流体流动的方程离散后会引入无物理意义的数值黏性, 改变了流体的性质和流场的形态. 用以代表物理边界的边界条件的处理难以尽善尽美, 引入的误差常使计算出现物理现象原本不存在的不稳定. 尽管目前多种紊流模式已被引入实用的计算, 但都是基于一系列的假定的基础上得出的, 模式越复杂, 引入的实验常数越多, 给出的也只是紊动的平均效应. 紊动的结构及其基本特性仍是数学模型所难以模拟的, 必须依赖于物理模型的试验. 所以, 数值模型不能完全代替物理实验, 更不能代替理论分析. 实际上, 理论分析、数学模型和物理实验的紧密结合才是解决理论问题与工程实际问题的有效途径.

计算水力学是涉及经典水力学、计算方法、数值分析、程序编制和资料处理等学科的一门综合性的交叉学科. 它既不是水力学, 也不是数值分析, 它有自身的概念与特点, 有其确定的应用领域. 计算水力学用的是偏微分方程(组), 但更注重方程中每一项所代表的物理意义, 在什么条件下可以略去方程中的某些项而仍能确切地模拟某些特定的水力现象. 方程中涉及的物理、生化参数的正确确定, 边界条件的合理给定, 均需要对所模拟的水动力学现象及以水为载体的物质的传输过程的物理和生化本质有深切的理解. 为了证明一个数学模型是水动力学现象及以水为载体的物质的传输过程的可靠模型, 则又需要利用数值分析中的线性理论, 对所用数学模式的收敛性、相容性和稳定性进行证明. 而计算结果的质量则又与资料的收集、整理和正确利用休戚相关, 这往往取决于从事数学模拟的人的经验与技巧.

1.2 本书的基本内容

计算水力学是一门学科的总称, 由于离散的基本原理不同, 大致分成三种主要类型: 有限差分法, 有限单元法和介乎两者之间的有限体积法. 本书将计算水力学的主要内容分成五篇, 分别为有限差分法, 有限单元法, 有限体积法, 边界的特殊处理及可视化方法与应用. 其中第 1 章概述计算水力学的内涵、特点, 根据三个物理基本守恒定律, 推导出数学模型的基本方程. 为了二维、三维数学模拟的需要, 还介绍了基于 Reynolds 分解原理导出的描述紊动的平均效应的均值方程和脉动量的方程, 在上述方程的基础上, 又导出水动力学计算中常用的一维、二维和三维的控制方程, 方程的分类和学习要求; 第 2、3 章阐述有限差分法的理论及应用; 第 4~7 章阐述有限单元法的理论及应用; 第 8、9 章阐述有限体积法的理论及应用; 第 10~12 章阐述边界的特殊处理; 第 13~14 章阐述可视化方法与应用. 每篇内容中理论部分从物理概念的分析入手, 阐述基础的建模思路、建模步骤和解法; 应用部分主要选择我们几十年来的科研成果, 也部分选用其他研究工作者的一些典型实例, 注重介绍分析、处理问题的方法和途径. 各篇有一定的相对独立性, 读者可以根据

需要选读. 另外本书还附自编的基础性、启发性的教学软件, 读者可在科学出版社网站 (www.sciencep.com) 下载区资料代码类下载该软件 (计算水力学理论与应用配套程序).

正如前面所述, 计算水力学的应用已深入技术科学的许多领域, 经验及成果是如此之丰富, 本书不可能涉及计算水力学的所有应用领域. 希望读者在浩瀚的计算水力学的文献中寻求更深入、更专业的知识.

1.3 物理守恒定律的数学表达式

本章基于质量守恒、动量守恒和能量守恒定律, 推导计算水力学的控制方程.

1.3.1 连续方程、动量方程和能量方程

本节利用控制体积法推导连续方程, 动量方程和能量方程的三维形式.

1. 连续方程

连续方程是质量守恒定律的数学表达式. 取一个微小控制体 (图 1.3.1), 它的每一个表面的外法向分别平行笛卡尔坐标轴 x, y, z . 它的中心位于坐标 (x, y, z) , 三个方向的尺度为 $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz . 速度矢 U 沿三个坐标轴的分量分别用符号 u, v, w 表示, 根据质量守恒定理, 对于每一个坐标方向, 单位时间内某种物质流入控制体的量与流出的量之差应该等于单位时间内由于沿该坐标方向的流动引起的该种物质在控制体中的累积量. 以 x 向为例

$$\text{单位时间流入控制体的质量} = \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z;$$

$$\text{单位时间流出控制体的质量} = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \Delta y \Delta z;$$

$$\text{单位时间内由于 } x \text{ 向流动引起的控制体内质量的累积量} \approx -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z;$$

由于点 (x, y, z) 处的 $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$ 值一般并不等于 Δx 长度内的平均值. 这就是说, Taylor 展开式中的高阶导数被略去不计. 只要控制体的体积很小, 这种近似的误差很小. 同样地可以得出沿 y 向和沿 z 向的流动引起的控制体内物质质量的累积率为

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

和

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

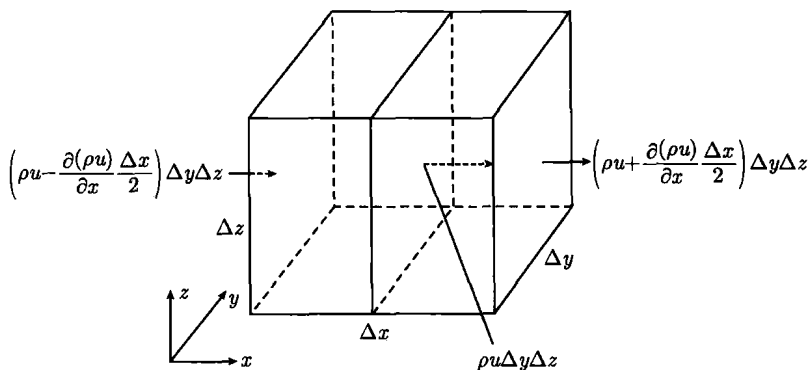


图 1.3.1 笛卡尔坐标系中通过控制体的质量通量

因而单位时间内控制体内质量的净增量为

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

这个质量的净增率应该等于控制体内质量的变化率

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

从而有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} (\Delta x \Delta y \Delta z) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

用控制体体积 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 除等式两边, 并取极限, 即得笛卡尔坐标系下的连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (1.3.1)$$

对于恒定流动, 连续方程形如

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (1.3.2)$$

对于密度保持常数的流体的流动, 连续方程取形式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.3.3)$$

式 (1.3.2), 式 (1.3.3) 左边是矢量 $\rho \mathbf{U}$ 或 $\mathbf{U}$ 的散度, 故两式又可写成

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{U} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$$