面向21世纪全国高职高专数学规划教材

高等数学

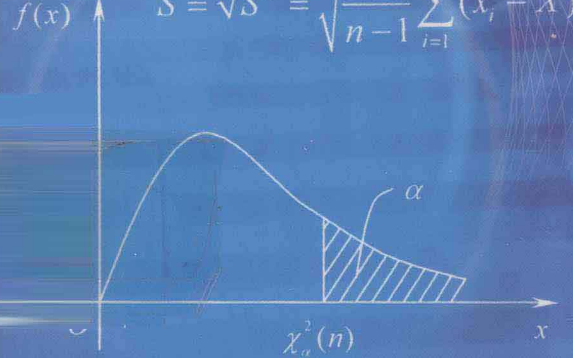
GAODENG SHUXUE

（下）

吕保献　罗　萍　主　编

侯新华　黄勇林　副主编

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}$$



北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材

高等数学（下）

吕保献　罗萍　主编

侯新华　黄勇林　副主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材是“面向21世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高职高专院校的培养目标编写的。在内容编排上，删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点，适合教师教学和学生自学。

本套教材分两册出版。下册内容包括：线性代数初步、拉普拉斯变换、概率论初步、数理统计初步、Mathematica 软件的应用。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”的部分为选学内容。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下）/吕保献，罗萍主编．—北京：北京大学出版社，2005.10
（面向21世纪全国高职高专数学规划教材）
ISBN 7-301-09126-5

I．高… II．①吕…②罗… III．高等数学—高等学校：技术学校—教材 IV．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 069436 号

书　　名：高等数学（下）
著作责任者：吕保献　罗萍　主编
责 任 编 辑：温丹丹　沈欣
标 准 书 号：ISBN 7-301-09126-5/O・0650
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　16.5 印张　358 千字
2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：24.00 元

前　言

我们受北京大学出版社的委托，根据教育部现行全日制普通高级中学教学大纲和高等职业技术教育数学教学大纲及教学基本要求，以应用为目的，以“必需、够用”为度，由高职高专院校中长期从事高职数学教学的资深教师编写本套教材。可供招收高中毕业生的二年制或三年制高职高专院校的学生使用。也可作为高职高专成人教育教材和自学考试学生的课外教材，同时也供一般工程技术人员参考，适合教师教学和学生自学。

本套数学教材是“面向21世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高职高专院校的培养目标编写的，以降低理论、加强应用、注重基础、强化能力、适当更新、稳定体系为指导思想。在内容编排上，注重理论联系实际，注意由浅入深，由易到难，由具体到抽象，循序渐进，并兼顾体系，加强素质教育和能力方面的培养。在内容上删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯；在结构的处理上注意与现行高中及中职教材内容相衔接，同时注意吸收国内外数学教材的优点，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点。为了适应计算机应用的发展的步伐，本书特意增加了 Mathematica 软件的应用方面的内容。

本套教材分两册出版。上册内容包括：函数的极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，空间解析几何，多元函数微积分初步，常微分方程，无穷级数等内容；下册内容包括：拉普拉斯变换，线性代数初步，概率论初步，数理统计初步，Mathematica 软件的应用等内容。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

教材中每节后面配有一定数量的习题。每章后面的复习题分主、客观题两类，供复习巩固本章内容和习题课选用。书末附有习题答案供参考。

下册由吕保献、罗萍任主编，侯新华，黄勇林任副主编，齐延信负责最后统稿。其中第1章由薛洪编写，第2章、第3章由罗萍编写，第4章、第5章由吕保献编写。

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请教师和读者批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

2005年2月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　线性代数初步

线性代数是研究线性方程组、矩阵和线性空间理论的一门学科，是数学的一个重要分支，是现代科学研究的一个重要工具．本章我们着重介绍行列式和矩阵以及有关的一些基本概念，并简要介绍线性方程组解的结构问题和求解方法．

1.1　行 列 式

1.1.1　二、三阶行列式及其计算

行列式的概念是从求解方程个数与未知数个数相等的线性方程组问题引入的，所谓线性方程组是指未知数的最高次幂是一次的方程组．

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

这里的 x_1，x_2 为变量，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 是它们的系数，b_1，b_2 为常数项，我们用加减消元法来求解，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

式（1-2）给出了二元一次方程组解的一般公式，为了便于记忆和应用，我们记 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为**二阶行列式**，其中横排称为行列式的行，竖排称为行列式的列，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为行列式的元素，从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**，由此，二阶行列式的值就规定为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

等式右端$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为**二阶行列式的展开式**.

若将行列式D中的第一列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理，将行列式D中的第二列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

不难看出，式（1-2）可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

其中$D\neq 0$，在这里D称为方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$的**系数行列式**.

例 1 解方程组$\begin{cases} x+3y-2=0, \\ x-2y+3=0. \end{cases}$

解 原方程组可化为

$$\begin{cases} x+3y=\ \ 2, \\ x-2y=-3. \end{cases}$$

那么

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5,\quad D_1=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-5,$$

所以

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = -1, \\ y = \dfrac{D_2}{D} = 1. \end{cases}$$

例 2　计算行列式$\begin{vmatrix} a+b & 0 \\ -a^2 & a-b \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} a+b & 0 \\ -a^2 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)-(-a^2)\times 0 = a^2-b^2$.

下面我们再来看三元一次线性方程组的求解过程.

三元一次线性方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1-3}$$

我们可以先消去其中一个未知量，比如先消去x_3，得到一个二元一次方程组

$$\begin{cases} (a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})x_2 = b_1a_{23}-b_2a_{13}, \\ (a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})x_2 = b_1a_{33}-b_3a_{13}. \end{cases}$$

设这个方程组的系数行列式$D \neq 0$，那么可以解出x_1，x_2，再代入原方程组，可求出x_3.于是原方程组的解为:

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13}),$$

$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} + a_{31}b_1a_{23} - a_{11}b_3a_{23} - a_{21}b_1a_{33} - a_{31}b_2a_{13}),$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{31}a_{12}b_2 - a_{11}a_{32}b_2 - a_{21}a_{12}b_3 - a_{31}a_{22}b_1).$$

其中$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \neq 0$，为便于记忆，我们同样引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

表示上述代数式的和，并称它为**三阶行列式**，记为D，即

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1-4}$$

若分别记

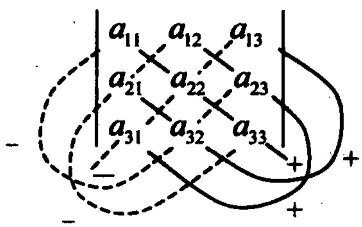
$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix},$$

则方程组的解可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

这里 $D\neq0$，是系数行列式，D_1，D_2，D_3 是将 D 中第一、二、三列的元素分别换成对应的常数项得到的.

三阶行列式含有 3 行、3 列，共 9 个元素，式（1-4）的右端称为它的**展开式**，共有 6 项，每一项都是行列式中位于不同行不同列的 3 个不同元素的乘积，具体地我们可以引用对角线法把三阶行列式的展开式写出来，方法是在原来行列式的基础上按下图连线.



则三阶行列式中展开式中的 6 项分别是由表中 6 条线，每条线所连接的 3 个元素乘积的和得到的其中实线连接的积取“＋”，虚线连接的积取“－”.

例 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&4&1\\2&-6&5\end{vmatrix}.$$

解 $$\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&4&1\\2&-6&5\end{vmatrix}=2\times4\times5+(-1)\times(-6)\times0+2\times(-1)\times1$$
$$-2\times4\times0-(-1)\times(-1)\times5-2\times(-6)\times1=45.$$

例 4　求$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & y & 3 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix}$的展开式.

解　$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & y & 3 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = xyz + 1\times 3\times 3 + 2\times 2\times 1 - 2\times y\times 3 - 3\times 1\times x - 1\times 2\times z$

$= xyz - 6y - 3x - 2z + 13$.

例 5　解线性方程组

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3, \\ -x - 4y + \ z = 7, \\ 3x + 7y + 4z = 3. \end{cases}$$

解

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(-4)\times 4 + 2\times 1\times 3 + 2\times 7\times(-1) \ -2\times(-4)\times 3 - 1\times 7\times 1 - 4\times(-1)\times 2 = 1,$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3\times(-4)\times 4 + 2\times 1\times 3 + 2\times 7\times 7 \ -2\times(-4)\times 3 - 1\times 7\times 3 - 4\times 7\times 2 = 3,$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 7\times 4 + 3\times 1\times 3 + 2\times 3\times(-1) \ -2\times 7\times 3 - 1\times 3\times 1 - 4\times(-1)\times 3 = -2,$$

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-4)\times 3 + 2\times 7\times 3 + 3\times 7\times(-1) \ -3\times(-4)\times 3 - 7\times 7\times 1 - 3\times(-1)\times 2 = 2,$$

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}} = 3,\quad x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}} = -2,\quad x_3 = \frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}} = 2 .$$

1.1.2　n阶行列式的概念

定义 1.1　由n^2个数组成的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**．其中 a_{ij} （i，$j=1,2,3,\cdots$，n）称为行列式第 i 行第 j 列的元素．

特殊地

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**主对角行列式**．

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**上三角行列式**．

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**下三角行列式**．这三个行列式的值都为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．

习 题 1-1

1．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$；　（3）$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$；　（5）$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　（6）$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$．

2. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ x+2y=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-6y=1, \\ x-\ \ y=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x+\ \ y+2z=2, \\ 2x+\ \ y+\ z=4, \\ 9x+2y+5z=3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-4y+\ \ z=\ \ 7, \\ 3x+2y+3z=15, \\ 4x-3y+3z=\ \ 9. \end{cases}$

3. 当 λ 为何值时，行列式的值为 0 .

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & \lambda \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

4. 解方程

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0 .$$

1.2　行列式的性质

1.2.1　行列式的性质

用行列式的定义直接计算行列式的值，常是十分复杂的．本节我们不加证明地给出行列式的一些性质，通过它们可使行列式的计算在许多情况下大为简化．

定义 1.2　如果把行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换（即每一行都变为相应的列，每一列都变为相应的行）得到的行列式

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}．显然

$$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = D .$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

性质 1 说明行列式中行与列的地位是相同的，凡对行成立的性质，对列也同样成立．

性质 2 如果将行列式的任意两行（列）互换，那么行列式的值只改变符号．

推论 如果行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值等于零．

性质 3 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

推论 1 数 k 乘以行列式等于数 k 乘以行列式的某行（列）的所有元素．

推论 2 如果行列式中有一行（列）元素全为零，则此行列式的值等于零．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

推论 3 如果行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零．

性质 4 如果行列式中某一行（列）的每一个元素都是两个数的和，则此行列式等于把这二项式各取一项作为相应的行（列）上的元素，而其余元素不变的两个行列式的和．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

性质 5 行列式的某一行（列）的所有元素乘以常数 k 后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在行列式的计算中采用以下记号：

（1）$r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行与第 j 行交换位置，$c_i \leftrightarrow c_j$ 表示第 i 列与第 j 列交换位置；

（2）kr_i 表示第 i 行的 k 倍，kc_j 表示第 j 列的 k 倍；

（3）$r_j + kr_i$ 表示第 i 行的元素乘以数 k 加到第 j 行上去；$c_j + kc_i$ 表示第 i 列的元素乘以数 k 加到第 j 列上去．

1.2.2　行列式的展开

为了介绍行列式的展开，先引入余子式和代数余子式的概念．

在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩下的元素按原次序构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}． M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 的积称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

例如，三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

元素 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

定理 1.1　行列式 D 等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和．即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com