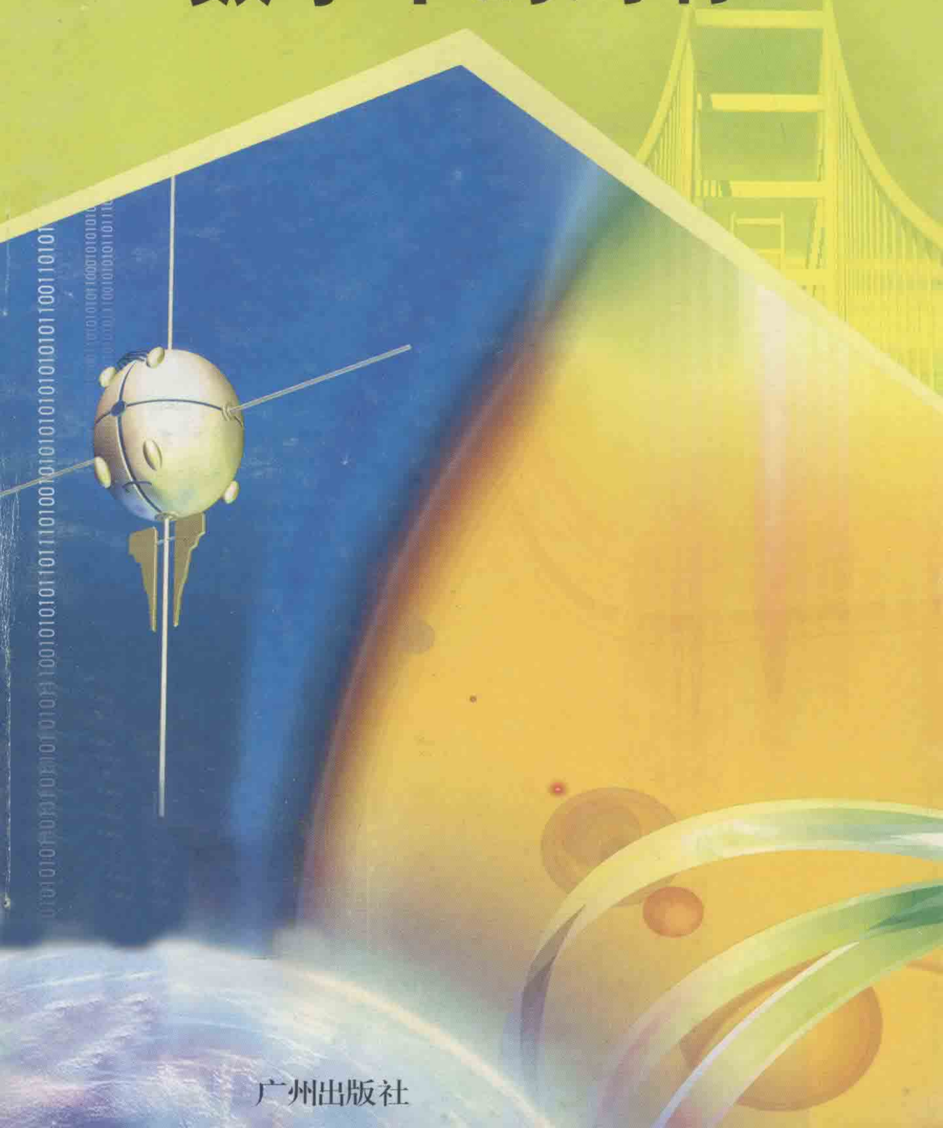
KE XUE WEN CONG 科学文丛

数学中的对称



广州出版社

科学文丛

数学中的对称

(74)

广州出版社出版

图书在版编目（CIP）数据

科学文丛．何静华 形继祖 主编．广州出版社．2003.

书号 ISBN7-83638-837-5

Ⅰ．科学...Ⅱ....Ⅲ. 文丛

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 082275 号

科学文丛

主　编：何静华 形继祖

广州出版社

广东省新宜市人民印刷厂

开本：787×1092 1/32 印张：482.725

版次：2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数：1-5000 套

书号 ISBN 7-83638-873-5

定价：（全套 104 本）968.80 元

目　　录

一、对称性巡礼

(一)大自然的启示

大自然创造了很多奇迹,对称性就是如此。比如美丽的枫叶和十字花冠,它们的美除了色彩的鲜艳之外,就表现在形式的对称上。在枫叶里,我们可以看到一根轴线,如果沿着这根轴线对折,它的两边就可以完全重合;在十字花冠里,明显存在一个中心,如果绕这个中心旋转 180°,它的位置就会与原来的位置重合。在小学数学里,我们已经知道,这种性质就叫做对称,前者被称为轴对称,后者被称为中心对称。自然界里的对称现象无所不在,大者,我们居住的这个地球,小者,氢原子的结构,就连我们本身,人体中的眼、耳、手、足等都是对称的,不少动物在正常生命状态下也大都如此。

对称可以产生美,比如湖岸边散乱差异的形态,并不怎么美,但在湖水平静的倒影中,就能将这散乱的形态产生对称形式的美感。正是基于这种特征,人类在创造美的活动中,把对称作为形式美的主要法则之一。不仅画画,而且在人类生活的各个领域,如房馆建筑,居室装潢,环境美化,园林建设,工艺美术,服装设计等,人们无不按照"对称美"和"不对称美"的规律塑造美的产品。对称的形式具有一种规则、整齐和稳定的美感,对称还可以衬托中心,如天安门两侧的对称建筑,可以衬托出天安门的中心地位。

可见,从美学的观点出发,足以说明对称的重要性。但还远远

不止这些,重要的是,对称是客观事物的必然规律。自然界形形色色的对称,并不是偶然的,在科学研究中,人们常常要对客观事物进行描述,可以用文字来说明,也可以用图形来表示。一般说来,描述中的对称性往往是客观对称性的反映,而描述中出现的不对称性并不一定是事物本身所固有的,可能是由人们的认识局限所造成的。例如,在我国古代"天圆地方"的宇宙模型中,大地被描绘成方的,缺乏它应有的球对称性,就是因为古人认识的局限性。更具有启发意义的例子是伟大的物理学家麦克斯韦建立电磁理论的过程。麦克斯韦根据法拉第的实验研究结果,把电磁理论方程写成:

$$rotE = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial H}{\partial t} \text{ 和 } rotH = 0$$

这两个数学表达式的左边分别为 rotE, rotH, 从形式上讲具有一种对称性,但右边却不具有对称性,麦克斯韦一方面出于电和磁的对称性的考虑,同时也出于电磁方程组形式上对称美的考虑,便"没有任何实验根据"地写下了完全不同的第二个方程: $\mathrm{rotH} = \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{t}}$,这个改写的方程和第一个方程是对称的,后来才被实验证实。正是它,正确地预言了电磁波的存在,在科学史上作出了划时代的贡献。麦克斯韦的成功,是对称法的胜利,由此看来,对称不仅是形式美的法则,而且是科学研究的方法。

数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系,"数学科学特别展示了秩序、对称和极限,这些是美的最伟大的形式(亚里士多德)"。数学中有各种各样的对称,既有形式上的对称,还有关系上的对称。同样,对称不仅是数学美的重要标志,也是数学研究的重要方法。在这本小册子里,我们先向读者展示小学生可以读懂的一系列对称问题,到第二章才需要初中的知识,全书涉及的知识都在中学数学的范围之内。

1938 年,华盛顿哲学会请数学家、物理学家、哲学家赫尔曼·外

尔(Hermann wegl,德国,1885—1955)作讲演,他以《对称》为题,概括了从古到今艺术上、自然界、数学中的对称性。最后用诗人安娜·威千姆(Anna Wick ham)的诗结束:“上帝啊,你就是至高无上的对称……”。1952 年,在这次讲演的基础上,《对称》这本书出版,成为美国科学家的必读物。1964 年,我国著名数学家段学复教授也为数学爱好者写了一本《对称》的小册子,这本书先讲代数对称,再讲几何对称,最后引出“群”的概念,有兴趣的读者,建议你们去读一读这两本书。

好吧！让我们从一个流传很广的游戏开始。

(二)桌面上的游戏

两人轮流地往一个圆桌上放同样大小的硬币,规则是:每人每次只能放一枚,让硬币平躺在桌面上,任何两枚硬币不能有重叠的部分。谁放完最后一枚,使得对方再也找不到空地放下一枚硬币的时候,谁就赢了。

胜败乃兵家之常事,可每当璟璟走第一步的时候,她总是赢,请问,璟璟稳操胜券的对策是什么呢?下面我们就来解开这个谜。

首先,我们注意到,璟璟先走的时候,总是把第一枚硬币放在圆桌面的中心,就像打仗时占领制高点一样。

如果桌面太小,以至不能放下第二枚硬币,璟璟的对手就会束手无策。实际上,由于桌面比较大,她的对手可以放下一枚硬币。现在又轮到璟璟放了,应该放在哪里呢?应当找对方硬币的对称位置,即把对方刚才放下的那枚硬币的中心与桌面的中心用线段联起来,接着再延长一倍,到桌面上的某一点,把一枚硬币的中心放在这一点上,就可以了 - 放法如图 1 - 1 所示。

以后,只要对方放一硬币,璟璟就照此办理,不愁找不到空地方,将自己的硬币放下去。

桌面的面积是有限的,放来放去,自然会遇到再也放不下去的时候。不过这个人不会是璟璟,一定是她的对手,她永远是赢家。

这里的秘诀在于她充分利用了圆的对称性，认识到圆心是圆的“对称中心”。

在任何一个中心对称的桌面上玩这种游戏，上述策略都有效，例如方桌，它的两条对角线的交点，就是它的对称中心，我们不妨把这种对策叫做“中心对称策略”。

下面，我们再来一个取棋游戏，相应的对策被称为“轴对称策略”。

将一些圆形的棋子在桌面上摆成环状，并使每一个棋子和相邻的两个接触，如图 1－2 所示。甲、乙二人轮流从中取棋，每次只能取一个或相邻的两个，条件是这一个或相邻的两个的两边必须都有和它们相接触的棋子。照上面的规定继续下去，直到不能再取为止，这时，最后一次取得棋子的人就算是赢家。想一想，采取怎样的取法才能总获胜？

获胜的取棋方法是：首先请对方取棋子，当对方取去一个或相邻的两个棋子后，这个环状形就有了缺口。若余下奇数个棋子，你就取出正中的一个；若余下偶数个棋子，你就取去正中的两个，使留下的棋子成轴对称的两部分。以后，对方在一块中取出一个或相邻两个棋子时，你就在其对称的位置上取出相同的个数，如此继续下去，胜利一定属于你。

接下来是第三个游戏，它是 1987 年列宁格勒数学奥林匹克的五年级试题：

两人做游戏，轮流在 9×9 的方格表中画十字和圈。先开始的人画十字，其对手画圈。所有方格都画满之后，按如下方式计分：数出这样的行和列的数目，其中十字多于圈，并将该数作为第一人的得分；再数出其中圈多于十字的行和列的数目，作为第二个人的得分；以得分多的人为胜。试问，第一个人怎样才能取胜？

这个游戏与前两个游戏的胜负标准虽然不同，但获胜的办法却别无二致。

不妨将第一个人称为甲，第二个人称为乙，甲先在正中间的方

格中画上十字，占领“对称中心”，接下去，不论乙在哪个方格中画圈，甲都在与该方格关于正中间方格对称的方格中画十字，这样对包含中间方格的行和列来说，除中间方格的十字外，其他十字都可与圈按中心对称的关系一一对应，也就是说，包含中间方格的行和列，十字多于圈，对不含中间方格的行和列来说，如果某一行（或列）圈多于十字，那么该行（或列）的对称行（或列）必然十字多于圈，也就是说，对不含中间方格的所有行和列，十字多于圈的数目等于圈多于十字的数目。由此可见甲的得分比乙多2，甲必然获胜。

（三）高斯巧算

高斯（1777.4.30—1855.2.23）是德国著名数学家。他在数论、代数、数学分析、概率论、级数理论、非欧几何、天文学等方面都有着重要的发现，是近代数学伟大的奠基者之一，是世界上少有的大科学家。由于高斯对天文学和数学的巨大贡献，因此获得了“格廷根巨人”和“数学王子”的荣誉称号。

高斯出身贫苦，幼年勤奋好学，有惊人的数学才能。大约在十岁的时候，高斯的老师布特纳在三年级的算术课上出了一道难题：“把从 1 到 100 的整数统统加起来！”每当有考试时，他们有如下的习惯：第一个做完的就把石板（当时通行，写字用）面朝下的放在老师的桌上，第二个做完的就把石板摆在第一张石板上，……就这样一个一个落起来。这个难题当然难不到学过等差数列的人，但这些孩子才刚刚开始学算术呢！布氏心想他可以休息一会了，但他想错了，因为还不到几秒钟，高斯已经把石板放在讲桌上了，同时说道：“答案在这儿！”其他的学生把数字一个个地加起来，额头都出了汗水，但高斯却静静地坐着，对老师投来的轻蔑的怀疑的眼光毫不在意。

考完后，老师一张张地检查石板，大部分都做错了，高斯的石板被最后翻过来时，只见上面只有一个数字：5050。这是正确的答

案。老师吃了一惊，高斯就解释他是如何找到答案的：$1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，…，$49+52=101$，$50+51=101$，一共有50对和为101的数目，所以答案是$50\times101=5050$。由此可见，高斯找到了这列数的对称性，并把"对称项"一对对地凑在一起，说得清楚些，我们把这列数从头到尾，从尾到头各写一遍：

$$1+2+3+\cdots+99+100$$
$$100+99+98+\cdots+2+1$$

然后把对应项加起来，就得到100个101。因为这是答案的2倍，所以答案是$50\times101=5050$。

也许，我们今天的很多同学都学会了这种方法，甚至还知道有个叫做等差数列的求和公式。但在高斯的孩童时代，不可能有人教给他这种方法和这个公式，那一定是他自己发现的。布特纳是一位有眼力的教师，看出这件事非同小可，于是一位冠绝古今的大数学家，从此开始了他的事业。

如上所述，高斯之所以在几秒钟就能得到其他同学几十分钟才可能得到的答案，就是因为高斯发现了1，2，3，……，100这列数对加法来说的一种对称性，即与首末两端距离相等的每两个数的和是相等的，可以形象地表示为下图所示：

$$\underbrace{1+\underbrace{2+\underbrace{3+\cdots+97+98}_{101}+99}_{101}+100}_{101}$$

实际上，这种算法还可以通过构造具有对称性的图形来理解。

下图1－3是依次用大小相同的正方形纸片1张、2张、3张、4张、5张、6张摆成的一块纸板A。

同样我们设想依次用1张到100张小正方形纸片构成的纸板B，现在问，纸板B由多少小正方形的纸片构成？

实际上也就是求出前100个自然数的和。

纸板B是由1张到100张纸片从上至下排列的，我们设想再

按 100 张到 1 张的顺序得到一张新的纸板 B′,也就是把 B 翻转过来得到 B′,再把 B 和 B′两个图拼在一起,就得到一个长为 101 个小正方形边长,宽为 100 个小正方形边长的长方形,这个长方形所含的小正方形总数为 101×100,然而这是纸片 B 所含小正方形个数的 2 倍。因此纸板 B 所含小正方形的个数为$\frac{101\times100}{2}=5050$。

这也说明,高斯算法中揭示的对称性和图形的对称性,从本质上讲是一回事。

为一般化起见,我们用字母来表示一列数:

$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1},a_n$

如果这列数满足条件 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$,也即具有规律:

与这列数首末两端距离相等的每两数之和等于首末两数之和,仿上述求和的方法,就可得到这列数的求和公式:

$$a_1+a_2+\cdots a_{n-1}+a_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$$

这个公式与梯形面积公式 $S_{梯形}=\frac{(上底+下底)\times 高}{2}$在形式上十分相似。不妨回顾一下梯形面积公式的推导过程,当我们把两个完全相同的梯形拼成一个平行四边形时,这两个梯形不是正好处于某种对称的位置吗?

(四)欧拉扩大羊圈的故事

很难想象一个人能写 100 本书。这种人是有的,但历史上能写出这么多数学书的却只有一位——欧勒(1707—1783)。他也是古往今来五六位第一流数学家中的一位,生于瑞士巴塞尔附近。他在拓扑学上的第一个发现"欧拉示性函数",通常叫做欧拉公式 $E=F+V-2$,有时教给中学高才生,首届"华罗庚金杯少年数学邀请赛"决赛第一试的 14 题,求多面体的面数、顶点数和棱数之和,

就是以欧拉示性函数为背景的。欧拉也像文化史上其他一些伟人一样，在双目失明后仍旧坚持工作。

这里我们讲一个欧拉小时候的故事：

在巴塞尔神学校的课堂上，小欧拉谦恭地向神职老师发问："既然上帝无所不能，他能告诉我天上有多少颗星星吗？"

老师回答道："这是无关紧要的，我们作为上帝的孩子，记住这一点就足够了：星星都是上帝亲手一颗颗地镶嵌在天幕上的。"

小欧拉百思不得其解，"既然星辰是由上帝一手安排的，他总该告诉我们一个数目吧？"

神学老师再也回答不了小欧拉的问题，他无可奈何地摇摇头叹声说道："可怜的孩子，迷途的羔羊。"

就这样小欧拉被神学校开除了。

老欧拉十分伤心地接回了儿子，想道：总得积攒学费送他上别的学校啊！老欧拉决定扩展羊圈，多养些羊，他招呼儿子，拆改旧羊圈。

可是没有多余的篱笆，怎么办呢？老欧拉没有了主意。

这时，站在一旁的小欧拉不慌不忙地说："爸爸，篱笆有了。你看，旧羊圈长 70 码，宽 30 码，面积为 2100 平方码，改成 50 码见方的新羊圈，不用添篱笆，羊圈就扩大了 40 平方码，……"

"太妙了，你是怎么想到的？"

"我是从您书橱的《几何学》上看来的。如果把羊圈围成圆形，面积将最大，有 3100 多平方码呢！"

老欧拉明白了，原来儿子在自学数学，放羊时还见他在草地上画来画去。小欧拉自学数学的热情打动了老欧拉，他决心推动儿子进入古老而神秘的数学王国。

欧拉扩大羊圈不添篱笆的事实说明：在一定周长下，正方形的面积比长宽不等的矩形面积大，而圆又比正方形的面积大。正方形四四方方，简单匀称，是完美的几何图形之一。圆这个最简单的曲线最令人惊叹，它是唯一的具有无穷多条对称轴的轴对称图形，

又是中心对称图形。正是这些对称图形的面积也最大，这是否是一种普遍规律呢？在本书中将会有更多的结果说明，对称性和最优性是紧密相连的。例如，仅仅用对称性便可猜到 $x\cdot y$ 在条件 $x+y=1$ 之下的最大值应在 $x=y=\frac{1}{2}$ 处达到。基茨(keats)的深邃的、美学的洞察力对此作了很好的总结："美就是真，真就是美。"

(五)一道培训题的巧合

在一个华罗庚杯少年数学邀请赛的集训班上，老师出了这样一道题：

在如图 1—4 的 7 个圆圈内各填一个数，要求每一条直线上的三个数中，当中的数是两边两个数的平均数，现在已经填好两个数，试求 x 的值。

老师的题目刚写完，一位叫璟璟的小朋友就说出了答案：$x=19$。璟璟原来并不知道这个题目，她的结果是正确的吗？

我们先来看看老师的解答：

为方便起见，我们先在图中的圆圈中标上一些字母 A、B、C、D (如图 1—5)。

依题意，A 是 13 和 17 的平均数，$A=15$，要求 x，必须先求 C，由于 C 既是 15 和 B 的平均数，也是 17 和 D 的平均数，所以 $2C=15+B=17+D$，从而 $B-D=17-15=2$。这里得到关于 B、D 的一个方程，又因为 D 是 13 和 B 的平均数，可得 B、D 的另一个方程 $2D=13+B$。解上述关于 B、D 的方程组，$B=17$，$D=15$。从而由 $2C=17+D=13+x$，得 $x=D+4=15+4=19$。

看来，璟璟的结果是正确的，老师运用方程的思想，有根有据地推出了最终的结果。璟璟显然不是这样想的，否则不可能这样快地得到答案，她凭借的完全是直觉。在她看来，老师画出的图形是对称的，处于对称位置上的数是可以相等的。这样当 $A=15$ 时，D 也等于 15，从而 $C=16$，$x=19$。如果注意到 C 处于中心位置的特

点，就可能知道C两边的和是一个定值，从而由 $D=15$ 即可推出 $x=19$。看来，璟璟的作法虽然不严格，但却具有创造性，可以帮助我们形成某种猜想，是值得珍视的。

题中图形具有某种对称性，如果我们根据题设要求，把7个圆圈中的数都填进去，就会得到一个完全对称的数阵图。值得我们探讨的问题是：对称的构图产生对称的结果，这难道是一种巧合吗？大量的事实说明，这里面具有某种必然的规律，需要我们去揭示。

（六）求花坛的面积

有一位数学家设计了一个美丽的正方形花坛，如图1—6，正方形的边长为10m，其中有阴影的部分种花，其余部分铺草皮。请你算一算种花部分的面积是多少？

这个图形初看起来很复杂，所给的条件也太少，如何求它的面积呢？先分别求出每一小块阴影的面积吗？这当然也是可以的，但太麻烦了。我们还是从对称的角度来思考吧！

如果我们以过正方形对边中点的直线为轴，就可以看到整个图形是一个对称图形，并且成对称的两部分一白一黑。由此可知，阴影部分面积总和是整个正方形面积的一半。也就是说，种花部分的面积 $S=\frac{1}{2}\times10^2=50$（平方米）。

这个例子告诉我们，对称总是和等量关系联系在一起的，我们可以通过观察图形的对称来寻求数量的相等。不仅如此，有时求某种图形的面积时，我们还要设法添作这个图形的对称图形，使它变成一个容易求出面积的新的组合图形。

比如，图1—7(1)是一个扇形，要我们求阴影部分的面积。

我们如果把图(1)再补上一半，如图(2)。这样扇形就变成了圆的四分之一，三角形变成了直角边为5cm的等腰直角三角形，阴影部分面积与三角形面积的关系更加明显，计算起来也更加方便，

新扇形的面积为 $3.14\times5^2\div4=19.625(cm^2)$，新直角三角形的面积为 $5\times5\div2=12.5(cm^2)$，因此所求阴影部分的面积是 $\frac{1}{2}(19.625-12.5)\approx3.56(cm^2)$。

我们可以把上述方法称为对称图形添加法，也就是说，我们可以通过构造对称图形来使算法简便。同样的，当图形具有对称性时，我们只需研究图形的一部分，而使运算量减少。

我们来看下面一个问题：

如图 1—8(1)，点 E、F 分别是平行四边形边 AB、BC 的中点，若平行四边形的面积为 1，问阴影部分的面积是多少？

基于对称性的考虑，我们把问题归结到△ABD 中，如图(2)所示，O 为 DB 的中点，G 为三角形两中线 AO，DE 的交点，为方便计，我们用 $S_{\triangle ABD}$ 表示△ABD 的面积。

由于 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DEA}$

所以 $S_{\triangle AOD}+S_{\triangle DEA}=S_{\triangle ABD}$

即 $2S_{\triangle AGD}+S_{\triangle AGE}+S_{\triangle DGO}$

$=S_{\triangle AGD}+S_{\triangle AGE}+S_{\triangle DGO}+S_{\text{四边形}GEBO}$

所以 $S_{\triangle AGD}=S_{\text{四边形}GEBO}$　　①

连接 GB 可知 $S_{\triangle AGE}=S_{\triangle BGE}$，$S_{\triangle DGO}=S_{\triangle BGO}$

所以 $S_{\triangle AGE}+S_{\triangle DGO}=S_{\text{四边形}GEBO}$　　②

结合①、②可知，△ABD 中阴影部分占有 $\frac{2}{3}$，从而在原平行四边形中，阴影部分也占有 $\frac{2}{3}$。由于平行四边形的面积是 1，故所求阴影部分的面积是 $\frac{2}{3}$。

进一步，我们猜想，取 AD 的中点 F′，DC 的中点 E′，并将 BF′、BD、BE′连起来，就可以将平行四边形分割成等积的 12 小块，其中