

THE QUANTUM THEORY OF
THE SPACETIME

空间时间的 量子理论

邵 亮 邵 丹 邵常贵 著



科学出版社

空间时间的量子理论

邵 亮 邵 丹 邵常贵 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书在微观 Planck 尺度, 利用自旋群 $SU(2)$ 及量子群 $SU(2)_q$ 提供的纯关系, 采取体制与背景无关和物理量非微扰的手段, 把广义相对论与量子力学相结合, 不采用其他假设, 发展出了以自旋结网圈引力态为特征的微分同胚等价类表述的空间时间的量子化理论. 书中在对空间的组合形成以及时间的持续跃迁进行深入探索的同时, 对引力态的运动学和动力学也进行了全面的研究, 且较充分地阐述了各种可能的空时激发、跃迁和演化模式. 本书在理论上较全面地树立了一种空间时间离散和量子化的新图景. 书中最后部分介绍了空间时间的量子理论在一些物理学前沿领域研究上的延伸.

图书在版编目(CIP)数据

空间时间的量子理论 / 邵亮, 邵丹, 邵常贵著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-031822-0

I. ①空… II. ①邵… ②邵… ③邵… III. ①空间时间函数—量子论
IV. ①O412.1 ②O413

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第134728号

责任编辑: 胡 凯 杨 锐 / 责任校对: 张 林

责任印制: 赵 博 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年9月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011年9月第一次印刷 印张: 23 3/4

印数: 1—1 500 字数: 479 000

定价: 70.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

最隐秘狡黠的幽灵，就在你身旁，那便是曾被认作最简白不过的时间。

事实上，空间与时间是物理学最狰狞难解之谜。

对它们的探求，将无尽头！

作 者

序 言

20 世纪发展起来的力学量的量子化和场的量子化理论,是自然科学向微观世界进展取得的两大基本成就.建立起来的微观骨干量子理论和相对论,为物理学奠定了两块基石.随着科学的不断发展,这两种根本理论之间的联系,越来越成为物理学新的探索对象和创立深层理论的发源地,并使得物理学开启了对空间时间量子化的系统研究.

最近 20 年来, A. Ashtekar 等人将广义相对论与量子力学相结合发展出了圈量子引力.他们在这一根本问题的研究上,已经取得了重要的进展和成果.这种理论不采用任何新的物理假设,将二者用物理量非微扰的方法和体制与背景无关的手段,从根本原理上实现了成功而彻底的结合,已经在体制上建立起来了空间自旋网引力态的完整运动学理论,并在态的动力学的研究上取得了重要的一致性成果.目前, C. Rovelli 和 L. Smolin 等人又在引力子散射、引力子传播子以及与弦和膜的联系上相继取得了理论上的进展.在空间量子化的研究上,已发展出可进一步用做预言的完整方法和系列成果.关于时间量子化,在 Hamilton 约束动力学、空时自旋泡沫理论、管自旋网的膜场论等的研究中,已提出了新的不同的时间概念和跃迁演化规则.在这种理论中,空间与时间自身在 Planck 尺度,是一种 $SU(2)$ 或 $SU(2)_q$ 代数描述的态的量子动力学离散组合关系系统.空间与时间的量子化体制,为空时概念自身的深层次发展以及引力量子化的最终实现,开辟了一条新的道路,并在物理学某些基本理论的源头研究上,有重要可能的延伸.随着理论研究的不断深入,圈量子引力在空间时间量子化上取得的起始性开放成果,已不断为整个国际物理学界所承认并看好.

本书的目的,就是专门介绍这一较为完整的研究成果.

书中的主要内容是阐述空间时间量子化的基本思想与原理,并介绍其前沿研究上的主要与最新成果,描述一个新的较完整的空间时间量子化的物理图景.在叙述过程中,既注重不同原则与方法的充分论证,又对具体结果进行全面探求.而对空间时间量子理论发展的有关背景、基本概念与技巧的形成及联系,也将从基础上给出较为全面的介绍.

第 1 章为数学准备,简要介绍圈量子引力研究使用的数学工具,即重耦理论.第 2 章,给出了自旋网的定义后,便将理论建立在自旋网表象之中,使空时量子

化理论的叙述更为简便，并在自旋网表象中展开本书而后的讨论. 第 3 章，通过某些比较，详细介绍了国际上多种面积量子化方法以及所得到的结果. 第 4 章，专门用来阐述利用双元计算方法，在自旋网表象中得到的体积量子化，其中包括对这种方法特点的分析与算例. 第 5 章，介绍利用重耦理论得到的体积量子化，对图式计算的不同方法、体积算符重耦矩阵的各种表达式，以及顶角体积期望值的不同定义等，均做了详细的论述. 第 6 章，将面积量子化和体积量子化的离散结果组合在一起，编织出了三维空间的局部平坦区域，给出了用自旋网编织空间的基本方法和举例. 第 7 章，将 Ashtekar 正则广义相对论的 Hamilton 约束作为量子化过程中空时遵守的准则，给出了时间量子化的基本概念，以及自旋网的多种跃迁演化. 第 8 章，在空间三角剖分基础上，系统介绍了空时自旋泡沫理论，以及引力散射理论等. 第 9 章，把自旋网推广为管自旋网，建立了管自旋网的膜场论以及矩阵理论，讨论了弦与膜在膜场论中的存在. 第 10 章，探讨了空间时间量子化理论在黑洞的熵、量子信息、纠缠态的非定域性以及量子暴胀空时等前沿问题的新近研究上的理论延伸.

邵亮 邵丹 邵常贵

武汉汤逊湖玉龙岛

2008 年 8 月

目 录

序言

第 1 章 重耦理论基础	1
1.1 Penrose 双元计算	1
1.1.1 图的拓扑改变及等价性	1
1.1.2 Penrose 双元恒等式	4
1.1.3 Reidemeister 移动	5
1.2 Kauffman 括弧	6
1.2.1 Kauffman 括弧多项式	6
1.2.2 Kauffman 括弧多项式下的 Reidemeister 移动	8
1.3 自旋网与 Kauffman-Lins 重耦理论	9
1.3.1 自旋网	9
1.3.2 Kauffman-Lins 重耦理论	12
1.4 重耦理论中的 $SU(2)$ 表示	15
1.4.1 克莱布什-戈丹条件与相容条件	15
1.4.2 结网算子	17
1.4.3 Wigner $3n-j$ 记号	18
第 2 章 圈量子引力的自旋网表象	26
2.1 正则广义相对论	26
2.2 圈量子引力中的自旋网	31
2.3 自旋网表象	34
2.3.1 Mandelstam 恒等式与自旋网的独立性	35
2.3.2 自旋网量子态	39
2.3.3 态空间及其测度	40
2.3.4 态空间 $\mathcal{H}^0$ 上的内积与顶角展开的无关性	43
2.4 圈算符及抓作用	45
2.5 圈量子引力的约束	49
2.5.1 正则体系的约束与约束方程	49
2.5.2 约束的圈变量表示	51
2.5.3 微分同胚约束方程	53

第 3 章 面积量子化	60
3.1 面积算符	60
3.2 面积算符通过生成元的 Casimir 算子获得本征值	61
3.3 面积算符通过抓对腿的作用获得本征值	64
3.3.1 带抓的面积算符	64
3.3.2 面积算符作用的重耦计算	67
3.4 重耦理论得到的完备面积谱	70
3.4.1 三维空间中圈算符的正规化	71
3.4.2 毗邻 n -顶角的腿贡献的面积本征值	75
3.5 面积算符通过抓对圈线的作用获得本征值	77
3.5.1 二元计算得到的面积本征值	78
3.5.2 二元计算得到的完备面积谱	81
第 4 章 利用二元计算的体积量子化	85
4.1 体积算符及其对自旋网的作用原理	85
4.1.1 圈变量表示的体积算符	85
4.1.2 体积算符对自旋网态的作用与一般方程	88
4.2 统一描述下圈算符的本征作用与体积算符的本征方程	90
4.2.1 圈算符 $\hat{T}^{abc}[\alpha_{\sigma p}]$ 对顶角本征作用的证明	90
4.2.2 抓在圈线上的体积算符本征作用方程	96
4.3 3 价顶角和 4 价顶角的体积	98
4.3.1 3 价顶角的体积谱	98
4.3.2 腿型及圈算符对 $n (>3)$ 价顶角的本征作用	98
4.3.3 4 价顶角的体积谱	99
4.4 5 价顶角的体积	104
4.4.1 腿型(■-■-■)	104
4.4.2 腿型(■-■, ■)	106
4.5 6 价顶角的体积	109
4.5.1 腿型(■-■-■)	110
4.5.2 腿型(■-■, ■)	112
4.5.3 腿型(■, ■, ■)	112
4.6 n 价顶角体积的计算及与 3 价顶角展开的无关性	115
4.6.1 n 价顶角的体积计算程式	115
4.6.2 n 价顶角的体积不变量	117

第 5 章 利用重耦计算的体积量子化	122
5.1 n 价顶角体积与重耦矩阵的定义	122
5.1.1 n 价顶角的重耦矩阵	122
5.1.2 n 价顶角体积的定义	124
5.2 利用 $9-j$ 记号得到 3、4 价顶角的体积	128
5.2.1 3 价顶角的重耦矩阵与体积	128
5.2.2 4 价顶角的重耦矩阵	129
5.2.3 4 价顶角的体积表达式	131
5.2.4 4 价顶角体积算例	133
5.2.5 正规化 4 价顶角的重耦矩阵	138
5.3 利用 $9-j$ 记号得到的 n 价顶角重耦矩阵表达式	140
5.3.1 连续的抓三重组重耦矩阵表达式	140
5.3.2 化简法得到的 n 价顶角重耦矩阵表达式	142
5.4 n 价顶角重耦矩阵的另一定义及体积矩阵	150
5.4.1 n 价顶角重耦矩阵的另一定义与表达式	150
5.4.2 n 价顶角体积矩阵及举例	152
5.5 通过 Tet 记号得到的 n 价顶角重耦矩阵表达式	162
5.5.1 抓的运动的定义与 3 价顶角的重耦矩阵表达式	163
5.5.2 4 价顶角的重耦矩阵表达式	165
5.5.3 5 价顶角的重耦矩阵表达式	167
5.5.4 n 价顶角重耦矩阵的一般表达式	172
5.5.5 体积量子化小结	174
第 6 章 空间的编织	178
6.1 空间平坦度规的编织	178
6.2 眼镜网编织空间薄层区域	179
6.3 立体格点网编织空间区域	182
6.4 Gauss 编织与度量算符	185
6.5 度量算符对角分量 $\hat{M}(s_\alpha, s_\alpha)$ 对顶角 ϕ_k 的本征作用及表示矩阵的一般表达式	187
6.5.1 度量算符分量 $\hat{M}(s_1, s_1)$ 对 ϕ_k 的本征作用及表示矩阵的一般表达式	187
6.5.2 度量算符其余对角分量对 ϕ_k 的本征作用及表示矩阵的一般表达式	191
6.6 度量算符非对角分量 $\hat{M}(s_\alpha, s_\beta)$ 对顶角 ϕ_k 的本征作用及表示矩阵的一般表达式	195
6.7 Gauss 编织的计算	203
6.7.1 Gauss 编织的宽度与颜色峰值	203

6.7.2 度量算符 $\hat{M}(s_\alpha, s_\beta)$ 的表示矩阵在 $p=1$ 时的数值计算	204
6.7.3 Gauss 编织态的自旋几何	211
6.8 三维空间 $\mathcal{E}$ 几何的非交换性	215
第 7 章 Hamilton 动力学与时间量子化	217
7.1 欧几里得 Hamilton 约束的量子化	218
7.2 欧几里得 Hamilton 约束算符对自旋网态作用的矩阵元	221
7.2.1 算符 $\hat{H}_\Delta^{(1)}$ 和 $\hat{H}_\Delta^{(2)}$ 的作用为零	222
7.2.2 算符 $\hat{H}_\Delta^{(1)}$ 和 $\hat{H}_\Delta^{(2)}$ 作用的矩阵元	223
7.2.3 欧几里得 Hamilton 约束算符对腿态的作用	233
7.2.4 时间	238
7.3 自旋网态的 Feynman 演化与时空量子几何	239
7.3.1 自旋网态的演化	239
7.3.2 “曲面上的和”贡献的跃迁振幅	242
7.3.3 基本顶角四面体	247
7.4 自旋网态的时空多面体演化	251
7.4.1 $n(\leq 4)$ 维空间三角剖分中的对应关系	251
7.4.2 自旋网的 $(2+1)$ 维时空多面体演化	253
7.4.3 自旋网的 $(3+1)$ 维时空多面体演化	257
7.5 自旋网态的零测地关系演化与时间的离散性	258
7.5.1 自旋网态的 $(2+1)$ 维零测地关系演化	259
7.5.2 自旋网态的 $(3+1)$ 维零测地关系演化	263
7.5.3 时间的多通离散渗透模型	265
第 8 章 时空自旋泡沫模型及引力散射	270
8.1 自旋泡沫模型的一般表达式	270
8.2 三维离散量子化广义相对论模型	272
8.2.1 三维离散广义相对论	272
8.2.2 三维离散广义相对论的量子化	274
8.3 四维离散量子化广义相对论的 BF 模型	277
8.4 自旋泡沫与群场论的对偶	280
8.4.1 对偶与模展开	280
8.4.2 $(\varphi^2 + \varphi^5)$ 理论的 Feynman 图	283
8.5 四维广义相对论的 BC 模型及自旋泡沫模型表	285
8.5.1 四维广义相对论的 BC 模型	285
8.5.2 自旋泡沫模型表	289

8.6 自旋网与自旋泡沫体系	290
8.6.1 三维离散广义相对论作用量的其他形式	290
8.6.2 泡泡红外发散	292
8.6.3 自旋泡沫体系小结	293
8.7 圈量子引力的引力散射理论	294
8.7.1 离散空时 n -点引力散射振幅的确定	295
8.7.2 圈量子引力的引力子传播子	300
第 9 章 管自旋网的膜场论与矩阵理论	307
9.1 管自旋网的态空间	307
9.1.1 3 贯球面网的态空间	307
9.1.2 4 贯球面网的态空间	310
9.2 管自旋网的替换移动与运动学算符	311
9.2.1 管 4 单形	311
9.2.2 管 4 单形的替换移动	311
9.2.3 管自旋网的算符	313
9.3 管自旋网态的动力学与因果演化	316
9.3.1 管自旋网态替换算符	316
9.3.2 管自旋网态的因果演化及振幅	318
9.4 管自旋网膜场论	321
9.4.1 量子引力的共同原理	321
9.4.2 管自旋网边界膜场论	324
9.5 弦对历史的微扰及 D0 膜	327
9.5.1 弦对历史的微扰	327
9.5.2 孔与 D0 膜	329
9.6 膜场论的矩阵运动学模型及自旋几何	330
9.6.1 边界态空间上的矩阵算符	330
9.6.2 自旋几何定理与矩阵算符的取值	333
9.7 膜场论的矩阵动力学模型	335
9.7.1 D0 膜动力学 Hamilton 算符的定义	335
9.7.2 矩阵模型动力学及局部替换移动	336
第 10 章 空间时间量子理论的延伸	341
10.1 用微观面积量子态计算黑洞的熵	341
10.2 空时中的信息量子及空间的量子非定域性	344
10.2.1 空间 Qubit 的来源	344
10.2.2 面积量子的零时关联与空间量子非定域性	345

10.3 空时量子暴胀	348
10.3.1 面积量子作为 Qubit 态	348
10.3.2 空时量子暴胀概述	350
10.4 等价类及空时量子化的意义	352
10.4.1 微分同胚等价类	352
10.4.2 时空节律与超光速	354
10.4.3 空间时间量子化的意义	357
参考文献	364

第 1 章 重耦理论基础

目前, 圈量子引力(LQG)采用广义相对论(GR)与量子力学(QM)的基本原理相结合的思想, 用独特的数学手法, 发展与建立了起来. 在物理学上, 圈量子引力的重要成果, 是它给出了空间以及时间量子化的描述. 空间和时间的量子化, 是建立在表述非连续物理系统的数学基础之上的, 这种特殊的数学工具, 即是纽结(knot)和缠跨(tangle)理论, 以及用于图形估值不变量研究中的重耦理论和自旋结网图(自旋网)原理. 本章作为数学准备, 着重从数学角度介绍用于圈量子引力的自旋网, 及其计算所用的重耦理论.

1.1 Penrose 双元计算

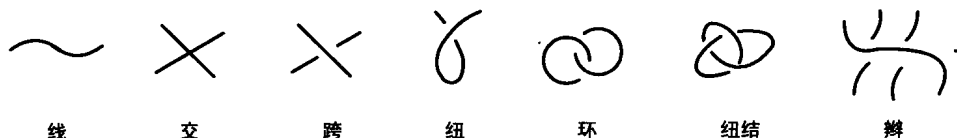
R. Penrose 在 20 世纪七八十年代提出的, 用粒子的自旋以及自旋的表示描述物理系统的做法, 即用自旋网(Spin Network)作为工具, 试图描述物理系统的量子化的想法, 使人们系统地开始了用与背景无关的方法对物理系统的量子化研究. 他的双元计算以及自旋网的概念, 是圈量子引力空时量子化理论中起根本作用的必备原理与基础.

结合本书的需要, 本节首先从曲线的图的代数描述, 以及拓扑改变下的不变性开始介绍, 然后论述作为重耦理论基础的 Penrose 恒等式, 最后证明在 Reidemeister 移动下曲线图具有的等价性.

1.1.1 图的拓扑改变及等价性

从数学角度, 自旋网可简单地看成是由三维空间中的一些圈组成的. 这些圈是封闭的曲线, 不过不是通常意义下的几何曲线, 对它们的处理需要满足一些基本规则. 下面就先来介绍这些有关规则.

由于通常是在纸面上来研究这些曲线的, 现在让我们首先从这种曲线画在纸面上的图的研究开始. 我们知道, 曲线图各部分间的相对位置, 以及它的交叉状态, 将表征曲线的性质. 下面是几种常见的典型曲线的图



曲线的图的形式改变, 将遵守一些规则. 现在来研究图在拓扑改变下其平滑变形满足的规则.

按着 Penrose 的做法, 平面上任意一条曲线, 都可分解成 Kronecker 记号 δ 与选择记号 ε 之积. 为此, 这里令 Kronecker 记号 and 选择记号的图分别为

$$I_b^a = \delta_b^a, \quad \bigcap_{a \ b} = \varepsilon_{ab}, \quad \bigcup_{a \ b} = \varepsilon^{ab}. \quad (1.1)$$

式中, a, b 标定平面上的两点, 均取值 1, 2. 这两点间由不同走向的曲线相连接, 便得到了对应于 δ_b^a , ε_{ab} , ε^{ab} 的图. 对于 δ , 有

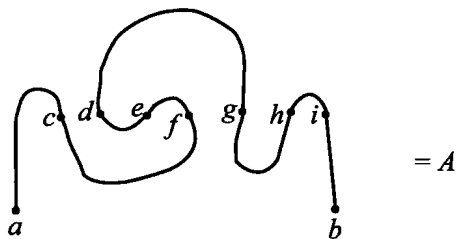
$$\delta_b^a = \begin{cases} 1, & \text{当 } a=b, \\ 0, & \text{当 } a \neq b, \end{cases}$$

对于 ε , 有

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = 1, \\ \varepsilon_{21} = -1, \\ \varepsilon_{ij} = 0, & \text{若 } i=j. \end{cases}$$

不过, 当将曲线画在平面上时, 须令图中出现的每一(局部)极小 “ $\cup$ ” 和每一交 “ $\times$ ” 各附加 (-1) 因子. 这就是 Penrose 负号规则. 这样, 平面上任意一曲线的图将可用 δ 及 ε 的乘积描述, 并可用来讨论当曲线图做拓扑改变时, 它的图式的某些不变性质.

例如, 如下曲线



是用 δ 与 ε 进行了分割, 当利用 Penrose 负号规则后, 它可以写成

$$\begin{aligned} A &= (-1)^3 \varepsilon_{ac} \varepsilon^{cf} \varepsilon_{ef} \varepsilon^{de} \varepsilon_{dg} \varepsilon^{gh} \varepsilon_{hi} \delta_b^i \\ &= (-1)^3 (-1) \delta_a^f (-1) \delta_f^d (-1) \delta_d^h \varepsilon_{hi} \delta_b^i \\ &= (-1)^6 \delta_a^d \delta_d^h \varepsilon^{hi} \delta_b^i \\ &= \varepsilon_{ai} \delta_b^i \\ &= \varepsilon_{ab}, \end{aligned}$$

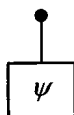
从而有



$$(1.2)$$

(1.2)式说明, 两端的曲线之间做平滑的拓扑变形时, 若引入 Penrose 负号规则, 它们仍具有等价意义, (1.2)式的得到就是对这种意义的描述.

Penrose 早年还用图的方法引入了表述其中有指标求和的张量表达式. 例如, 令旋量

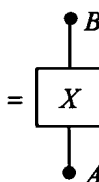


$$\psi^A = \text{box } \psi, \quad (1.3)$$

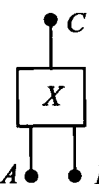


$$\psi_A = \text{box } \psi, \quad (1.4)$$

张量

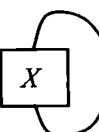


$$X_A^B = \text{box } X, \quad (1.5)$$



$$X_{AB}^C = \text{box } X, \quad (1.6)$$

张量的迹



$$\text{tr}X = - \text{box } X, \quad (1.7)$$

两个张量之积

$$\varepsilon_{AB} XY^{AB} = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{X} \quad \boxed{Y} \end{array}, \quad (1.8)$$

等. 而且在 Penrose 负号规则下, 有

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{\xi} \quad \boxed{\xi} \end{array} = -\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}\varepsilon^{CD}\xi^A\xi^B = \varepsilon_{AB}\xi^A\xi^B = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{\xi} \quad \boxed{\xi} \end{array} \quad (1.9)$$

和

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{\xi} \quad \boxed{\xi} \end{array} = -\varepsilon_{CD}\delta_A^D\delta_B^C\xi^A\xi^B = \varepsilon_{AB}\xi^A\xi^B = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{\xi} \quad \boxed{\xi} \end{array} \quad (1.10)$$

若不采用 Penrose 负号规则, 则(1.9)和(1.10)式两端的图皆差一个负号, 即这二式两端的图的等价意义得不到描述. (1.9)和(1.10)式说明, 它们各自两端的两个图间的任意连续改变, 并不影响该二图之间的拓扑等价.

类似的计算可知, 一个闭合圈在这种理论中将给出个数, 其值为-2. 即有

$$\bigcirc = a \cdot b = -\varepsilon_{ab}\varepsilon^{ab} = -\delta_a^a = -2. \quad (1.11)$$

如上几例已看到, 图中出现的极小或交, 按 Penrose 负号规则附加(-1)因子后, 该图可以用 δ 与 ε 标记, 并且它们在拓扑改变下具有的等价性质, 亦可用这种代数表达法经计算而得.

1.1.2 Penrose 双元恒等式

Penrose 双元恒等式确定了4个点(或方位)间用两条线连接时的基本关系, 即

$$X + \text{Y} + \text{Z} = 0. \quad (1.12)$$

(1.12)式中, 第一项的交与第二项的极小可以各储存一个 (-1) 因子. 将隐藏的 (-1) 因子在其前面写出, 则该双元恒等式可写成如下形式:

$$-\begin{array}{c} c \quad d \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad b \end{array} - \begin{array}{c} c \quad d \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} + \begin{array}{c} c \quad d \\ | \quad | \\ a \quad b \end{array} = 0, \quad (1.13)$$

(1.13)式中的交和极小携带的 (-1) 因子, 已被负号明显记入式中, 此式中的交与极小已不再含有 (-1) 因子. (1.13)式用 δ 及 ε 做代数表记, 可写成

$$-\delta_b^c \delta_a^d - \varepsilon^{cd} \varepsilon_{ab} + \delta_a^c \delta_b^d = 0. \quad (1.14)$$

我们可以认为, Penrose 的双元计算是建立在如下两个恒等式之上的:

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = - \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \end{array}, \quad (1.15)$$

$$\bigcirc = -2, \quad (1.16)$$

(1.15)式规定了图的计算中, 两条线连接 4 个点时的三种连接方式必须满足的基本关系, 而这种关系表达在平面上时要遵从 Penrose 负号规则.(1.16)式则给出了这种图式计算中, 作为基本图的一个圈所对应的数值. 后面将看到, 它可使整个自旋网对应一个数.

利用(1.15)和(1.16)式进行计算, 可得

$$\begin{aligned} \bigcirc \bigcirc &= -\bigcirc - \bigcirc \bigcirc \\ &= -(-2) - (-2)(-2) \\ &= -2, \end{aligned} \quad (1.17)$$

并且计算中假定

$$\bigcirc \cup G = (-2)G. \quad (1.18)$$

式中, G 为图, $\cup$ 表示 $\bigcirc$ 与 G 同时出现并估值.(1.18)式是曲线估值计算中的基本表达式.

1.1.3 Reidemeister 移动

曲线的图的如下三种移动, 称为 Reidemeister 移动: