

白尚恕 著

《九章算术》
注释

科学出版社

《九章算术》注释

白尚恕 注释

科学出版社

1988

内 容 简 介

《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著。分为方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程及句股等九章。魏、晋时代刘徽、唐初李淳风都对《九章算术》作过注解。本书用现代通俗易懂的语言对《九章算术》及刘徽、李淳风注文详加注释、考证，内容十分丰富。

本书可供数学史工作者、高等学校数学系师生以及中学数学教师参考之用。

《九 章 算 术》注 释

白尚恕 注释

责任编辑 杨贤英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年12月第 一 版	开本：850×1168 1/32
1988年4月第 二 次印刷	印张：11 5/8 插页：2
印数：94201—104650	字数：306,000

ISBN 7-03-000320-9

O·87

定价：5.00 元

亦當以一百五十七乘之六百而一其說
 如圖亭也臣淳風等謹按依密
 率以七乘之二百六十四而一

今有漸堵下廣二丈袤一十八丈六尺高二丈五尺問積幾何

答曰四萬六千五百尺

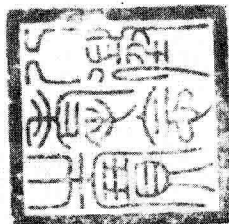
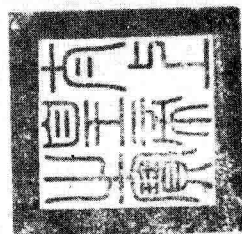
術曰廣袤相乘以高乘之二而一邪解立
 壑堵錐復隨方亦為壑堵故二而一此則
 合所規畢推其物體蓋為壑上疊也其形
 如城而無上廣與所規某形異而同
 實未聞所以名之為壑堵之說也

今有陽馬廣五尺袤七尺高八尺問積幾何

答曰九十三尺少半尺

術曰廣袤相乘以高乘之三而一按此術
 令方錐一隅也今謂四柱屋隅為陽馬之
 廣袤各一尺高一尺相乘之得立方積
 一尺邪解立方得兩壑堵邪解壑堵其
 為陽馬一為龍腰陽馬居二龍腰居一不
 而易之率也合兩龍腰成一陽馬其三陽馬
 而成一立方故兩龍腰一驗之以基其形露
 矣悉割陽馬凡為六龍腰觀其割分則體
 勢互通蓋易了也其基或脩短或廣狹立
 方不等等者亦割分以六龍腰其形不悉
 相相似然見數同積實均也龍腰殊形陽馬
 異體然則陽馬異體則不可純合純合則難
 為之矣何則按邪解方基以為壑堵者必
 當以半為分邪解壑堵以為陽馬者亦必
 當以半為分一從一橫耳設為陽馬為分

宋本《九章算術》



金華

九章算術

九章算術卷第一

魏劉徽注

唐開元中奉天皇帝幸金華山避暑幸金華山避暑



田廣十五步從十六步問為田幾何

答曰一畝

又有田廣十二步從十四步問為田幾何

百六十八步

從十四步

均輸 凡二十問

卷第七

盈不足 凡二十問

卷第八

方程 凡十問

卷第九

句股 凡二十問

卷第十

音義

九章算術卷第一

魏 劉 徽 注

唐劉義夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋

方田以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何答曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何答曰一百六十八步

方田術曰廣從步數相乘得積步

此積謂田畧凡廣從相乘謂之畧

臣淳風等謹按經云廣從相乘得積步注云廣從相乘謂之

畧觀斯注意積畧義同以理推之固當不爾何則畧是四方

單布之名積乃衆數聚居之稱猶名責實二者全殊雖欲同

之爲恐不可今以凡言畧者據廣從之一方其言積者舉衆



徽幼明九年
 長舟詳覽
 觀陰陽之
 刻製總算
 術之根源
 探賾之暇遂
 任其意是
 以敢竭頑魯
 采其所見為
 之作注
 補引劉徽九章算
 術注原序表詳錄以
 茲其意像
 庚申年 畫

刘徽造像

蒋兆和作于北京 1980年11月

序

《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著，不仅指导着我国数学的发展达两千余年之久，而且对世界数学的发展也有不可估量的巨大影响，线性联立方程组的解法及有关正负数的引入祇其一例而已。我国古代数学有它自己的体系与形式，与西方之以欧几里得几何为代表的所谓公理化体系者旨趣既异，途径亦殊。《九章》与《几何原本》东西辉映，无疑是数学史上的两大传世名著，也是现代数学的两大源泉。

《九章算术》的刘徽注是数学上的又一伟大成就。刘徽注不仅提出了丰富多采的创见与发明，并以严密的数学用语描述了有关数学概念，对《九章》中的许多结论给出了严格证明。他所采用的证明方法，不仅有综合法、分析法，而且有时还兼用反证法。他沿袭我国古代的几何传统，使之趋于完备，形成具有独特风格的几何体系。刘徽的发明、创造对后世有所启发，即使对于现今数学也有不少借鉴之处。从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里得、阿基米德等相提并论。

遗憾的是，像传本《九章》与刘徽注这样的伟大著作，由于古今文字迥异，专门名词与现代通用者更大不相同，加上文字简略，用字深奥，使当代有志者难于领略。白尚恕同志博征详考，对全书用现代通俗易懂的语言详加注释，既使国内外对我国古代数学有兴趣的人士易于涉猎了解，也使研究我国古代数学的发展及刘徽与其他人如李淳风等的创见有途可循，为之称便。这是一件十分有意义的事。为此不揣冒昧，谨志数语，聊为此书出版作贺。

系统科学研究所 吴文俊

1980年12月17日

前 言

《九章算术》是我国现存的一部最古老的数学书。作者不详。初步考证,大约成书于东汉初期。此书采用问题集的形式,搜集了二百四十六道与生产实践相联系的应用问题及其解法,依照问题的性质和解法,分别隶属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程及句股九章。

随着社会的发展,社会生产力的逐渐提高,从而促进了数学的发展。《九章算术》就是记载了古代劳动人民在生产实践中总结出来的数学知识。它不但开拓了我国数学的发展道路,在世界数学发展中也占有极其重要的地位。

魏、晋时代,刘徽对《九章算术》作过注解(以下简称为刘注)。唐初,李淳风(七世纪)也作过注解(以下简称为李注)。有刘、李注文的《九章算术》,在宋代有北宋元丰年间的刻本,南宋嘉定年间的刻本。清初,这两种刻本都渐次散失。流传到今的只有上海图书馆保存的南宋残本和故宫博物院所藏这残本的抄本。

清代,戴震(1724—1777)对于由《永乐大典》抄录出来的《九章算术》作过校订(以下简称为戴校本)之后,便依次刊刻成四库馆本、武英殿本以及微波榭本。后来还有万有文库本、丛书集成本和四部丛刊本等。为了恢复隋、唐时期的《九章算术》,一九六三年中华书局出版了天算史专家钱宝琮(1892—1974)校点的《算经十书》本。

刘徽除注解《九章算术》外,还编著《海岛算经》一书。由于资料所限,其籍贯身世、生卒年月则无可详考。只能根据不多的一些记载断定他是魏、晋时代淄乡(今山东临淄或淄川一带)人。

刘徽在《九章算术》注解中,“析理以辞,解体用图”,不但给出明确的概念,导出正确的理论,而且还有很多创造发明。从而取得

了不可磨灭的功绩。可以看出，刘徽在数学方面的成就是十分伟大的、十分辉煌的，他不愧是我国古代一位杰出的布衣数学家。

南北朝祖冲之（429—500）是我国古代伟大的科学家，在数学方面多所发明。他也注解过《九章算术》，正如《南齐书》所称：“注《九章》，造《缀述》数十篇。”可惜的是他的注文全都亡佚。

唐代李淳风注《九章算术》时，除引证祖冲之及其子祖暅对体积理论的贡献外，其他注文多与刘注相类，较刘注似通俗易懂。

宋代杨辉于《详解九章算法》（1261）中选《九章算术》八十道典型问题进行详解，对刘、李注文也作过一番解释。清代李潢（？—1811）于《九章算术细草图说》中对《九章算术》进行了校订，补绘了图形，列出了细草。对刘、李注文也作了解释。在解释中有的固然十分恰当，有的未必符合注者的原意，还有的地方，他采取避而不释的态度。

《九章算术》及刘、李注文的语句简略，用字深奥，阅读起来，十分不便。为了能较确切地理解作者的原意，必须注释。今以钱宝琮校点本（以下简称为钱校本）为蓝本，参考各家之说，用通俗语言、近代数学术语对《九章算术》及刘、李注文详加注释。为方便计只注释与数学有关的语句，凡与数学关系不大的概不注释。前后共写出注释文字四百九十多条。

由于辗转传抄、影摹刊刻，传本《九章算术》有很多错误文字。经过戴震、李潢等人的校勘，一般都文义通顺，易于了解。尤其是钱宝琮在前人的基础上重加校勘，使得《九章算术》文从字顺，上下贯通。这些对于读者都有莫大的裨益。但是，钱校本也有漏校、误校和句点不妥之处。现今，在注释之余，兼及校点。凡认为前人所校点是正确的，便择善而从。凡是与前人有出入的地方，则凭一管之见，加述理由。共写出校订及句读文字百余条。

此外，钱校本说：“商功章阳马术和句股章容圆术的刘徽注中各有意义难于理解而不能句读的文字，无法校订，只能付之缺疑。”对于这些文字，为了抛砖引玉，也做了些试释工作。

由于水平所限，缺点和错误在所难免，尚希不吝指正。

在注释中，曾得到北京师范大学教授程廷熙、钟善基两位先生的指导和协助。初稿之后，承蒙中国科学院系统科学研究所研究员吴文俊先生、中国科学院自然科学史研究所研究员严敦杰先生、内蒙古师范大学教授李迪先生分别先后惠予审阅，并提出宝贵意见。出版之前，又蒙吴文俊先生为本书撰写了序言，中央美术学院教授蒋兆和先生为刘徽绘制了造像。在此一并致以由衷的谢意。

白 尚 恕

一九八〇年十一月于北京师范大学

目 录

《九章算术》书影

刘徽造像

序

前言

刘徽九章算术注原序·····	1
九章算术卷第一 方田·····	12
九章算术卷第二 粟米·····	64
九章算术卷第三 衰分·····	82
九章算术卷第四 少广·····	95
九章算术卷第五 商功·····	136
九章算术卷第六 均输·····	184
九章算术卷第七 盈不足·····	226
九章算术卷第八 方程·····	257
九章算术卷第九 句股·····	306
附录 海岛算经·····	343
主要参考文献·····	364

刘徽九章算术注原序

昔在包牺氏始画八卦^[1]，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术^[2]以合六爻^[3]之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象^[4]精微之气可得而效焉。记称隶首作数^[5]，其详未之闻也。按周公制礼而有九数^[6]，九数之流，则《九章》是矣。

〔1〕 昔在包牺氏始画八卦

包牺亦作伏戏、宓戏，是历史传说中的神化人物。相传曾作结绳，造九九，执规矩，画八卦。

《汉书·律历志》记载：“自伏戏画八卦，由数起。至黄帝尧舜而大备。”颜师古注称：“言万物之数因八卦而起也。”包牺所画的八卦是：乾☰，坤☷，震☳，巽☴，坎☵，离☲，艮☶，兑☱。卦中一称为阳爻，就数说可表示为奇；--称为阴爻，可表示为偶。如沈括（1031—1095）《梦溪笔谈》：“多为阴，如爻之偶；少为阳，如爻之奇。”一卦含有三爻，爻无论阴阳，可以上下重复相叠地排列起来，就叫做卦。这样的卦，其数有八（即 $2^3=8$ ），故称为八卦。

〔2〕 九九之术

“九九”就是九九乘法口诀的称谓。《管子》：“宓戏作九九之数。”我国古代的九九乘法口诀，是由“九九八十一”开始，至“二二如四”终止，共三十六句。以后把“一九如九”、“一八如八”等九句加入，共有四十五句。《孙子算经》（四、五世纪）解释九九算法是由九九迄一一。由于这口诀开始于九九两字，所以称为九九。

到宋、元时代，九九乘法口诀的次序已经颠倒过来，《事林广记》及朱世杰《算学启蒙》（1299）所载都是由“一一如一”至“九九

八十一”，与现今四十五句的九九乘法口诀完全一致。杨辉《算法通变本末》(1274)及程大位《算法统宗》(1592)所载九九的次序也是由小到大。可是在隋、唐时期，九九曾传入日本，日人源为宪《口游》(970)中还记载了始于九九终于一一的逆序口诀。

刘徽所谓“九九之术”，若以李籍《九章算术音义》引《汉书》颜师古注“九九算术，若今《九章》、《五曹》之辈”来解释，则其意义不止于乘法口诀。在古代可能把九九之术作为当时数学的代名词。

【3】六爻

“爻”是组成卦的基本符号。一称为阳爻，--称为阴爻。一卦含有六爻；在阴阳两爻中若重复地任取六爻上下排列起来，其数有 $2^6 = 64$ 。如乾☰，坤☷，屯☳，蒙☶等，每个叫做重卦；也叫做卦。在八卦里，若重复地任取两卦、上下叠置起来，也可得到六十四($8^2 = 64$)卦。

爻，表示变动或变化的意思。如《易·系辞》说：“爻者，言乎变者也。”

【4】两仪、四象

《易·系辞》说：“易有太极，是生两仪。”又说：“两仪生四象。”所谓两仪，一说是指阴阳，阴阳又分老少，故有四象。一说是指奇偶。清代梁章钜(1775—1849)《退庵随笔》称：“夫天地间，不过一奇一偶而已。由此生之，皆奇偶之积耳。于是以奇偶互加而生四象，再加而成八卦矣。”若就重复排列来看，这一说法也通。

明末，熊三拔(Sobathina Urais, 1575—1620)《简平仪说》(1611)称：“周天圈，以赤道线、极线分为四圈分，每圈分，分九十度为周天象限，四象限共三百六十为周天度数。”其中象限是拉丁文 Quadrante 的译文，Quadrante 的原意是四分之一。这里译作“象限”，一面取意于四象，一面取意于四分之一。“象限”就是表示两条坐标轴分平面为四部分之一。

【5】隶首作数

相传黄帝时代隶首创造了数。实际上这是一种假托。这种假托都是辗转引自不知撰者的《世本》一书。如《唐六典》引《世本》说：

“隶首造数。”此外其他古笈的传述也是本于《世本》。如徐岳《数术记遗》称：“隶首注术，乃有多种。”甄鸾(约535—566)《五经算术》也说：“黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。”李籍《音义》说：“《世本》曰：黄帝时，隶首作数。”

[6] 九数

《周礼》：“养国子以道，乃教之六艺，……，六曰九数。”《周礼》未列出九数的细目，其具体内容则无法详考。汉代郑玄注《周礼》时引郑众所说：“九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要；今有重差，夕桀，句股也。”

汉武帝曾采用桑弘羊的建议，实行均输法。均输法就是按人口多少，路途远近，谷物贵贱，分配徭役和捐税的制度。《后汉书·朱晖传》说：“武帝时所谓均输也。”根据这些记载，近人多以为均输制就是由汉武帝于太初元年以后开始实行的赋税制度，事实上，1983年在江陵挖掘三座吕后时代古墓，出土了一批竹简，其中有律简五百余支，并有《均输律》。可见均输制度既非始于汉武帝，也未必是《周礼》原有的一个细目。”刘徽原序说：“徽寻九数有重差之名”，而《九章算术》并无重差一章。由此足见《九章算术》的章名与九数原有细目不同。所以刘徽说：“九数之流，则《九章》是矣。”“校其目则与古或异。”九数的细目可能是《九章算术》章名的前身。但是，有人把九数与《九章算术》混为一谈。如王孝通(七世纪)说：“九数即《九章》。”似是武断。也有人把九数理解为“周期的算卦”。这种理解，更无根据。

往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补^[7]。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

[7] 汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌，……，各称删补

根据《史记》记载可知：张苍，阳武人，“自秦时为柱下史，明习

天下图书计笈；又善用算律历。”于汉高祖六年(公元前201年)从攻臧荼有功而封为北平侯。汉高后八年(公元前180年)为御史大夫。汉文帝四年(公元前176年)为丞相。曾经“著书十八篇，言阴阳律历事”。

按《汉书》所说，耿寿昌于汉宣帝期间(公元前73—49年)“为大司农”。“以善为算，能商功利，得幸于上”。在天文方面，他主张浑天说，于甘露二年(公元前52年)曾上奏“以圆仪度日月行，考验天运。日月行赤道”。

张苍及耿寿昌都是以擅长数学著称于世的；虽然《史记》及《汉书》无有记载，但是根据刘徽所说，他们曾删补过旧数学书。

徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本榦者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黷，览之者思过半矣。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩^[8]度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。

周官大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中^[9]。说云：南戴日下万五千里^[10]。夫云尔者，以术推之。按《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差^[11]之名，愿其指趣乃所以施于此也。凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也^[12]。立两表于洛阳之城，

令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也^[13]。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也^[14]。以南戴日下及日去地为句、股，为之求弦，即日去人也^[15]。以径寸之筩南望日，日满筩空，则定筩之长短以为股率，以筩径为句率，日去人之数为大股，大股之句即日径也^[16]。虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史笈且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下^[17]。度高者重表，测深者累矩^[18]，孤离者三望^[19]，离而又旁求者四望^[20]。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

【8】规、矩

“规、矩”即是圆规、曲尺。

“规、矩”都是象形名称。在甲骨文中，规字作，象征一手拿着规作画图的姿势；矩字作，象征曲尺。

在一些古笈中也有关于规矩的记载。如《周礼》称：“圆者中规，方者中矩。”《尸子》：“古者，倕为规、矩、准、绳，使天下倣焉。”

【9】地中

“地中”就是一国地域的中央。周朝东都洛邑（即洛阳），认为是适中的地域，故称之为地中。

据《周礼》所载：“以土圭（量器，状似直尺，长一尺五寸）之法，测土深，正日景（即影字），以求地中。”“日至（即夏至）之景，尺有五寸，谓之地中。”郑众注称：“土圭之长，尺有五寸，以夏至之日，立八尺之表（即标竿），其景适与土圭等，谓之地中。”