中等专业学校教学参考书

高等数学

人民教育出版社

中等专业学校教学参考书

高　等　数　学

工科中专数学教材编写组编

人 民 教 育 出 版 社

中等专业学校教学参考书

高 等 数 学

工科中专数学教材编写组编

*

人民教育出版社 出 版

新华书店北京发行所发行

北 京 新 华 印 刷 厂 印 装

*

1963年7月第一版 1978年7月第11次印刷

书号：13012·0151 定价：0.95 元

目　　录

第二篇 微分学初步

第三篇　积分学初步

附 录

绪　　言

高等数学和其他学科一样，都是导源于生产实践，并为生产实践服务的。在十七世纪，生产的迅速发展，引出了物理、天文、几何和力学上的一系列问题，而这些问题又不能从初等数学中获得解决，于是就产生了高等数学中的一些基本概念和方法，这些概念和方法是由笛卡儿、牛顿、莱布尼兹等数学家，总结了前人的经验而创立的。在高等数学中，解析几何、微分学、积分学所研究的对象，主要是变化的量(变量)和变化的图形。

本书共分三篇：第一篇平面解析几何学基础；第二篇微分学初步；第三篇积分学初步。

解析几何是通过笛卡儿坐标，用代数方法研究几何图形的一门课程，在这里，代数和几何密切地结合在一起了。

微分学和积分学，通常简称为微积分学，它以无穷小量和变量的极限概念为基础，并由此建立微积分学的基本理论和运算法则。

高等数学是学好技术基础课和专业课的重要工具，我们必须很好掌握它。

第一篇　平面解析几何学基础

解析几何是以代数方法研究几何图形的一门数学，它把几何问题化为代数的计算来研究，使数与形密切地结合起来，这种结合的基本方法是**坐标法**。

第一章　坐标法

用数表示点的位置的方法叫做坐标法。例如：用一个实数来表示直线上一点的位置；用一对实数来表示平面上一点的位置等，这些在代数里都已经讲过。但坐标法是高等数学中最基本的问题，因此，我们有必要再加以阐述。

§1-1　平面上点的直角坐标

确定平面上点的位置的一对实数，叫做这个点的**坐标**。各种坐标中，最常用的是直角坐标。

在平面上取两条有方向而且互相垂直的直线，这两条直线叫做**坐标轴**；水平直线 Ox 叫做**横轴**，铅垂直线 Oy 叫做**纵轴**，它们的交点 O 叫做**坐标原点**。并取定一个长度单位①（图1-1）。在 Ox 轴上规定由原点起向右为正方向，向左为负方

---

① 一般两轴上取同一个长度单位，但也可以各取不同的长度单位。

向;在 Oy 轴上由原点起向上为正方向，向下为负方向。Ox 轴、Oy 轴、原点 O，以及所取定的长度单位全体，称为**直角坐标系**或**笛卡儿坐标系**①。

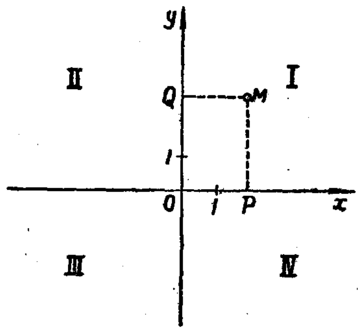

图 1-1

设 M 为坐标平面上任一点，过 M 点向 Ox 轴及 Oy 轴作垂线，其垂足分别为 P 和 Q(图 1-1)。用取定长度单位量 OP 所得的数 x，叫做 M 点的**横坐标**(简称横标)，如 P 在 O 点的右边，横标 x 为正数，如在左边，则为负数。

用同样长度单位量 OQ 所得的数 y，叫做 M 点的**纵坐标**(简称纵标)，如 Q 在 O 点的上方，纵标 y 为正数，如在下方，则为负数。

上面所说的一对实数 x 和 y 叫做 M 点的坐标，记作 $M(x, y)$。

因为有了 M 点就确定了 P 点和 Q 点，随之也就得到唯一的一对实数 x 和 y。反之，对于任一对实数 x 和 y，可以在横轴与纵轴上分别定出 P 点和 Q 点，从这两点各引垂直于坐标轴的垂线，就得到它们唯一确定的交点 M。从这里知道平面上的一点 M 与一对实数 x 和 y 之间有一一对应的关系。

Ox 轴与 Oy 轴将平面分为四部分，各部分叫做**象限**。由

① 笛卡儿是法国的数学家和哲学家，他总结了前人的經驗，于 1637 年发表过解析几何学的最初著作。

点的两个坐标都为正的那个象限开始，按反时针的方向依次叫做第一，第二，第三与第四象限(图 1-1 中分别用 I, II, III 与 IV 来表示)，那末在各个象限内点的坐标符号如下表所示:

符号 象限 / 坐标	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

坐标法是数与形相结合的基本方法，所以读者应该牢固地掌握下面两个问题的解法:

1° 由已知点 M，求它的坐标;

2° 由已知坐标 (x, y)，求它所确定的点。

例 1. 图 1-2 中的点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ 和 $M_6(x_6, y_6)$ 有坐标:

1° $x_1 = Q_1M_1 = OP_1 = +4$,

$y_1 = P_1M_1 = OQ_1 = +3$;

2° $x_2 = Q_2M_2 = OP_2 = -1$,

$y_2 = P_2M_2 = OQ_2 = +2$;

3° $x_3 = Q_3M_3 = OP_3 = -4$,

$y_3 = P_3M_3 = OQ_3 = -3$;

4° $x_4 = Q_3M_4 = OP_1 = +4$,

$y_4 = P_1M_4 = OQ_3 = -3$;

5° $x_5 = 0$,

$y_5 = OM_5 = +4$;

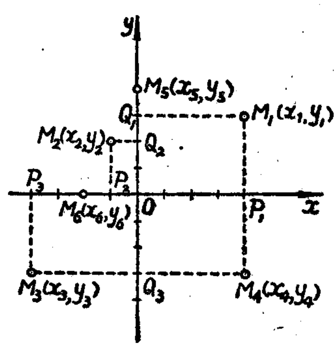

图　1-2

6° $x_6 = OM_6 = -2$,

$y_6 = 0$。

又从图 1-2 中容易看出来：如果点在横轴上，则它的纵标 y 等于零；如果点在纵轴上，则它的横标等于零；如果点与坐标原点重合，则它的坐标 x 和 y 都等于零。

例 2. 作出下列各点：

1° $M_1(4,3)$;

2° $M_2(-1,2)$;

3° $M_3(-4,-3)$;

4° $M_4(4,-3)$;

5° $M_5(0,4)$。

解： 如图 1-3 的作法，便可得出上述各点。

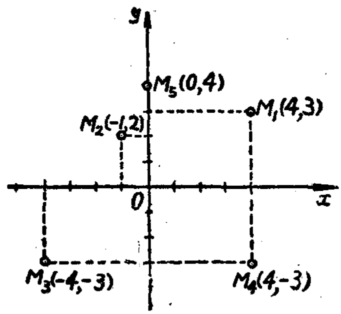

图 1-3

根据平面几何中关于点的轴对称和中心对称的定义，从图 1-3 中可以看出：

点 M_1 与 M_4 的横标相等，纵标的绝对值相等而符号相反，显然它们是关于 Ox 轴对称的；

点 M_4 与 M_3 的纵标相等，横标的绝对值相等而符号相反，显然它们是关于 Oy 轴对称的；

点 M_1 与 M_3 的横标及纵标都是绝对值相等，符号相反，显然它们是关于原点对称的。

例 3. 如果点 $A(a,3)$ 是在第二象限内（图 1-4），试写出与它关于

1° Ox 轴；2° Oy 轴；3° 原点

对称的点的坐标。

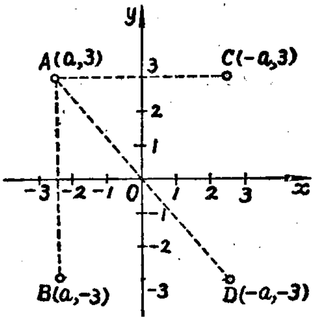

图　1-4

解： 如图 1-4 可知：

1° 与点 $A(a, 3)$ 关于 Ox 轴对称的点 B 的坐标为 $(a, -3)$；

2° 与点 $A(a, 3)$ 关于 Oy 轴对称的点 C 的坐标为 $(-a, 3)$；

3° 与点 $A(a, 3)$ 关于原点对称的点 D 的坐标为 $(-a, -3)$。

例 4. 设边长为 4 的正三角形，它的底边与 Ox 轴重合，而且这条边的中点是原点。求这个三角形的三个顶点的坐标。

解： 设这个正三角形的第三个顶点 C 落在 Oy 轴的正的一半上(图 1-5)。因为 $\triangle AOC$ 是直角三角形，且 $\angle CAO = 60°$，所以

$$OC = AC \cdot \sin 60° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

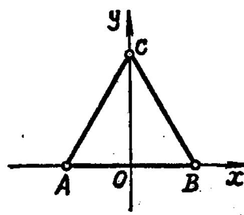

图　1-5

于是三个顶点的坐标分别是：$A(-2, 0)$，$B(2, 0)$ 和 $C(0, 2\sqrt{3})$。

如果顶点 C 落在 Oy 轴的负的一半上，那末三个顶点的坐标分别是 $A(-2, 0)$，$B(2, 0)$ 和 $C(0, -2\sqrt{3})$。

§1-2　两点间的距离

假设有两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$。试用坐标来表示它们间的距离。

设 A 与 B 的距离为 d, 如图1-6由 A 点与 B 点分别作 Ox 轴的垂线 AP 与 BQ, 并经过 A 点引平行 Ox 轴的直线 AC 交 BQ 于 C, 则得直角三角形 ABC。由勾股定理得

$$d^2=AB^2=AC^2+CB^2. \quad (1)$$

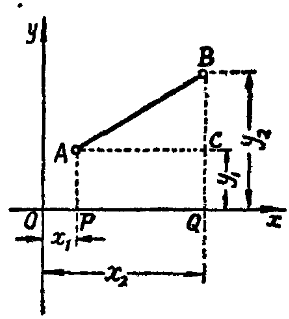

图 1-6.

但

$$AC=PQ=OQ-OP=x_2-x_1,$$
$$CB=QB-QC=$$
$$=QB-PA=y_2-y_1.$$

将 AC 与 CB 这两个值代入等式(1), 得

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

由此, 得

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad \text{(I)}$$

在根式前面永远取正号(+), 因为两点间的距离永远是正的。应当注意, 在推演公式(I)的时候, 我们假设 A 与 B 两点都在第一象限, 因此, 它们的坐标都是正的。同样可以证明 A 与 B 两点在任何其他一个象限或者分别在两个象限时, 上面的公式也都是成立的。这个公式用语言叙述出来, 就是: 两点间的距离等于这两个点的同名坐标之差的平方和的平方根。

如果两点中有一点是坐标原点, 即(0, 0), 另一点的坐标是(x, y), 那末这一点到原点的距离公式为

$$d=\sqrt{x^2+y^2}. \quad \text{(II)}$$

例 1. 试求 $A(-3, 5)$和 $B(1, 2)$两点之间的距离。

解: 由已知条件可知 $x_1=-3$, $y_1=5$; $x_2=1$, $y_2=2$。把这些坐标代入公式(I), 得

$$AB=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=$$
$$=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

例 2. 求与已知点$M_1(1,2)$; $M_2(-1,-2)$; $M_3(2,-5)$等距离的一点。

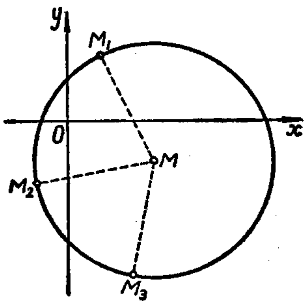

图 1-7

解: 在平面上, 有了一点的坐标, 就可以找到这个点。所以在解析几何里求一点就是求它的坐标。

假设 x, y 为所求点 M 的坐标。由已知条件, 得

$$MM_1=MM_2,$$
$$MM_2=MM_3.$$

按公式(I), 得

$$MM_1=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2};$$
$$MM_2=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2};$$
$$MM_3=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.$$

于是得方程组

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},\\ \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.\end{cases}$$

解之, 得 $x=\frac{8}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$[①], 因此所求的点是 $M\left(\frac{8}{3},\right.$

① 本书凡遇到解无理方程和分式方程所得到的根, 都是經过驗算的。

$-\frac{4}{3}\Big)$。

显然，求得的点 $M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ 就是过三个已知点 M_1, M_2, M_3 的圆的中心（图1-7）。

例 3. 设 $A(1,5)$ 和 $B(x, 2)$ 两点间的距离为5，求 B 点的横标 x。

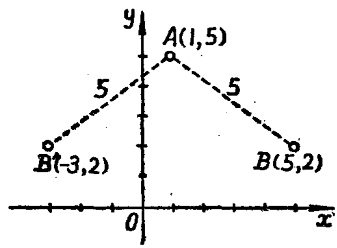

图 1-8

解： 由已知条件可知 $x_1=1$, $y_1=5$; $x_2=x$, $y_2=2$。

把这些坐标代入公式(I)，得

$$\sqrt{(x-1)^2+(2-5)^2}=5.$$

两边各自平方，并整理，便得

$$x^2-2x-15=0.$$

解这二次方程，可得

$$x=-3 \text{ 或 } x=5.$$

于是知所求 B 点的横标为 -3 或 5（如图1-8）。

复习問題

1. 什么叫做坐标法、直角坐标系和点的坐标？
2. 试述两点间的距离公式。它是怎样证明的？

习題 1-1

1. 平行于

$1°$ Ox 轴；　　$2°$ Oy 轴

的直线上的点，它们的坐标有什么特点？

2. 在坐标轴夹角的平分线上的点，它们的坐标有什么关系？

3. 写出图 1-9 中各点的坐标。

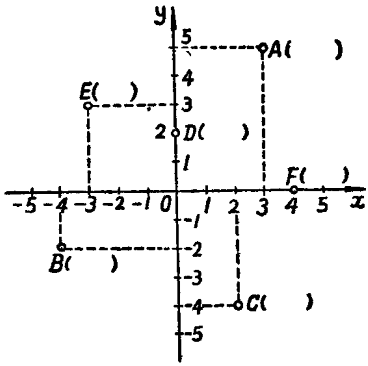

图　1-9

4. 作出下列各点并指出哪些点是关于 Ox 轴、Oy 轴、原点对称的。

1° $A(1,1)$；　2° $B(3,1)$；　3° $C(5,-2)$；

4° $D(-3,1)$；　5° $E\left(0,2\frac{1}{2}\right)$；　6° $F\left(0,-2\frac{1}{2}\right)$；

7° $G(-1,-1)$；　8° $H(0,0)$.

5. 如果点 $M(2,b)$ 是在第四象限内，试写出与它关于

1° Ox 轴；2° Oy 轴；3° 原点

对称的点的坐标。

6. 图 1-10 中，$ABCDEF$ 是正六边形，中心在原点，边长为 a，求它的六个顶点的坐标。

7. 试在横轴上求一点 A，使它与点 $B(4,6)$ 的距离为 10 个单位。

8. 已知一个三角形的三个顶点分别为 $(3,4)$，$(-2,4)$，$(2,2)$，试求它的周长。

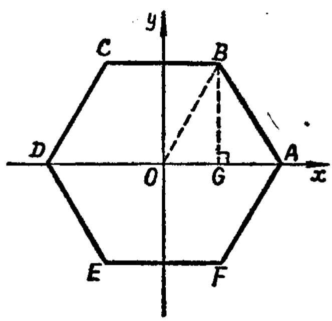

图　1-10