高等学校试用教材

微分几何

梅向明 黄敬之 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

微分几何

梅向明 黄敬之 编

人民教育出版社

本书是根据高等师范院校微分几何教学大纲（供数学专业用）编写的。全书共有三章：第一章曲线论和第二章曲面论为经典微分几何的主要内容；第三章介绍外微分形式和活动标架以及外微分形式和活动标架法在三维欧氏空间曲面论上的应用。

本书由数学、力学、天文学教材编审委员会委托朱鼎勋教授初审、白正国教授复审。可作为高等师范院校数学系《微分几何》课程的试用教材。

高等学校试用教材

微分几何

梅向明　黄敬之　编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京通县印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 8.75　字数 210,000

1981年7月第1版　1981年11月第1次印刷

印数 00,001—18,500

书号 13012·0626　　定价 0.80 元

前　言

这本教材是我们多年来讲授《微分几何》课所用的讲义，根据高等师范院校《微分几何》教学大纲的要求，整理修改而成. 其中第一、二章曾在六六年前反复讲授多遍，第三章只在近年来才讲过.

微分几何是一门历史悠久的学科，可以这样说，微积分诞生时就同时诞生了微分几何，不过这门学科的生命力至今还很旺盛. 近年来它对数学中其它分支的影响越来越深刻，对于自然科学中其他学科的影响的范围也越来越扩大. 与此同时，这门学科本身从内容上到方法上也在不断更新. 作为一本教科书应该尽可能地反映这样一种发展趋势. 但是由于高等师范院校数学专业教学计划中所给予微分几何这门课的课时的限制，不可能完全满足这样的要求. 我们的想法是，从内容上来说还是讲授微分几何中最基础的部分——三维欧氏空间中的曲线和曲面的局部理论，可是从方法上来说则加以更新. 这样做将使学生能够从较浅显的内容去学习近代的处理方法，对新方法接受起来阻力比较小一些；另一方面，对于微分几何有兴趣的学生，在掌握了新方法以后，就可以通过选修课或讨论班进一步运用这些方法去学习微分几何的近代内容.

在这本教材里作为新的方法来说，我们的目的是介绍法国数学家嘉当 (E. Cartan) 的活动标架法，同时介绍相应的数学工具——外微分形式. 不过为了使学生容易接受，开始时我们还是用向量分析的方法讲授三维欧氏空间的曲线和曲面的局部理论. 到了曲面论的基本定理和曲面上的内蕴几何部分，由于用向量符

号表达起来不方便，我们采用了张量符号，使学生稍稍接触一些张量分析的方法．最后，我们在第三章里用嘉当的活动标架法把曲线论和曲面论又复习一遍，使学生既学习了新方法，同时又加深对已学过的知识的理解．

杭州大学的白正国教授和北京师范大学的朱鼎勋教授在审查这本教材时提出了不少宝贵的意见，我们谨在此表示衷心的感谢．同时希望使用这本教材的兄弟院校的同志对教材中的错误缺点和不足之处给予批评指正．

梅向明　黄敬之

1981年4月于北京师范学院数学系

目　　录

第一章　曲　线　论

§1*　向量代数复习

我们在这里对向量的概念及其代数运算作简单扼要的复习.

我们经常遇到的量有两种，一种是数量(或称标量)，另一种量是既有大小又有方向的量称为**向量**(或称**矢量**).

在几何中的有向线段就是一个直观的向量（如图 1-1），用带有箭头的记号 $\overrightarrow{OA}$ 或用 $\boldsymbol{a}$ 表示这个向量，我们常用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$ 表示这个向量.

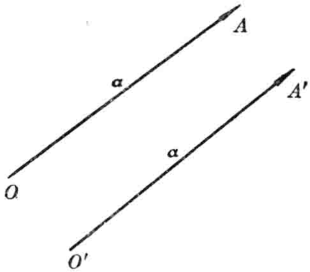


图　1-1

把相等的向量看作是在不同地点的同一向量，这种具有大小和方向而无特定位置的向量称为**自由向量**. 自由向量的始点可以是空间内的任何一点. 由此，一个向量的图形可以自由平移，今后如有必要就可以把几个向量移到同一出发点.

表示向量的大小（或长度）的数值称为向量的**模**(或**绝对值**)，用记号 $|\overrightarrow{OA}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$ 表示. 模等于 1 的向量称为**单位向量**(或称**么矢**). 模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$. 模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**逆向量**(或称**负向量**)，记作 $-\boldsymbol{a}$.

对于空间内任意一点 P，以直角坐标系的原点 O 为始点，以 P 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的**向径**(或**矢径**)，记作 $\boldsymbol{r}$(图 1-2). 空间的点和它的向径是一一对应的，因此今后我们经常用向径 $\boldsymbol{r}$ 代表 P 点，并且习惯上把 P 点说成 $\boldsymbol{r}$ 点，这样可以把有关空间的点的

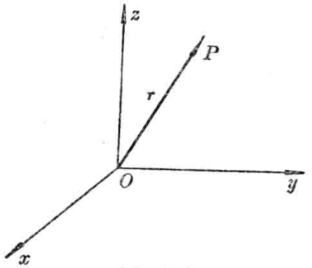


图 1-2

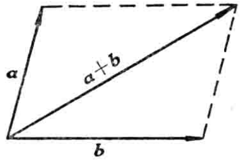


图 1-3

讨论转换为有关向量的讨论.

下面复习有关向量的一些运算.

向量的和与差　对于两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和，有平行四边形法则：把 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的始点放在同一点，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两边作平行四边形，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的公共始点为起点，而以它在平行四边形中的相对的顶点为终点的向量（图 1-3）. 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 定义为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量与数量的乘积(向量的数乘)　向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 λ，规定它们的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍为一个向量，它的模是 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，如果 $\lambda>0$，那么 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向和 $\boldsymbol{a}$ 相同；如果 $\lambda<0$，那么 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向和 $\boldsymbol{a}$ 相反；如果 $\lambda=0$，那么 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 直观上可以看出，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\lambda\boldsymbol{a}$ 互相平行. 反过来，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，则必存在实数 $\lambda\neq0$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

当然，对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 λ 的乘积，把 λ 写在 $\boldsymbol{a}$ 的右侧也是一样的：$\boldsymbol{a}\lambda=\lambda\boldsymbol{a}$.

如果 μ 是另一个数量，那么

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$$

任何一个向量都可以写成它的模和单位向量的乘积. 例如，设向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是 $\boldsymbol{a}_0$，我们就可以写为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$$

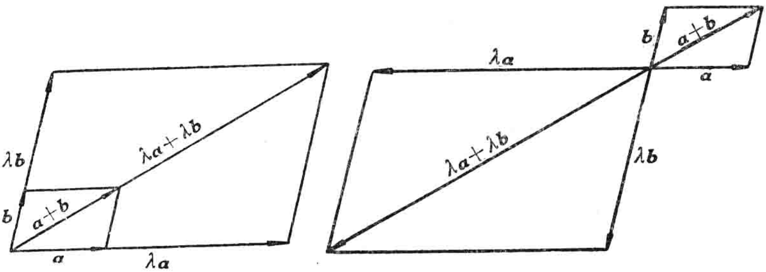
当 $|\boldsymbol{a}|\neq0$ 时，

$$a_0=\frac{1}{|a|}a$$

由向量加法的平行四边形法则(见图 1-4),立刻得到

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$$

这就是说,向量的数乘满足分配律.



(λ>0)　　　　(λ<0)

图 1-4

向量的分量　在空间的笛卡儿直角坐标系的三个坐标轴上,分别取三个向量 e_1、e_2、e_3,它们满足以下条件: (1) e_1 在 Ox 轴上, e_2 在 Oy 轴上, e_3 在 Oz 轴上;(2) e_1、e_2、e_3 中每一个向量的方向与它们所在轴的正向相同; (3) e_1、e_2、e_3 都是单位向量. 我们把向量 e_1、e_2、e_3 中的每一个称为坐标系的**基向量**, 简称为坐标系的基(图 1-5).

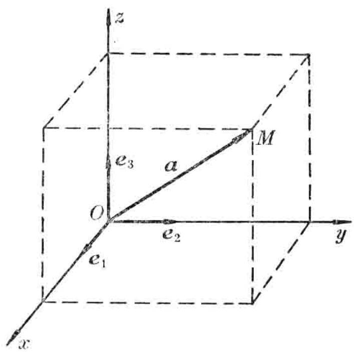


图 1-5

空间中任何一个向量 a, 可以把它的始点移到坐标原点 O, 则 a 可以唯一地分解为三个平行于 e_1、e_2、e_3 的向量. 即

$$a=xe_1+ye_2+ze_3$$

数组 (x, y, z) 称为向量 a 的**分量**或**坐标**. 记为

$$\boldsymbol{a}=(x, y, z)$$

由向量的分量的定义可以看出，对于一个向量，不论把它的始点放在何处，它在坐标轴上的分量是不变的.

利用向量的分量，可以得到向量加减法及向量数乘的分量表示.

若 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2+z_1\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+z_2\boldsymbol{e}_3$ 为两个向量，

则有 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{e}_1+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{e}_2+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{e}_3$

若 λ 是一数量，而向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$, 则有

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x)\boldsymbol{e}_1+(\lambda y)\boldsymbol{e}_2+(\lambda z)\boldsymbol{e}_3$$

向量的数量积(点乘)和它的性质　给出两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 设它们的夹角为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$, 定义它们的**数量积**如下:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

根据定义可以直接推出:

1° 向量的数量积满足下列规则:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \qquad \text{(交换律)}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \qquad \text{(分配律)}$$

$$m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \qquad \text{(与数乘的结合律)}$$

2° $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是它们的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

3° 若 $\varphi=0$, 则 $\cos\varphi=1$. 所以

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$$

因此向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

进一步我们得到以下结论：若 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1$, 反之也成立.

4° 笛卡儿直角坐标系的三个基向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$满足以下关系

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

5° 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量为 (x, y, z)，利用上式得到

$$x=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1,\quad y=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2,\quad z=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3$$

若 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量，它和 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 的夹角分别为 α、β、γ，则有

$$\boldsymbol{a}=\cos\alpha\boldsymbol{e}_1+\cos\beta\boldsymbol{e}_2+\cos\gamma\boldsymbol{e}_3$$

即

$$\boldsymbol{a}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

6° 设两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的分量分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2)，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

特别地

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$

设两个单位向量 $\boldsymbol{a}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 和 $\boldsymbol{b}(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ 的夹角为 φ，则有

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$

7° 对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$，设它们的夹角为 φ，则有

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

例 1 求过 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 点，并且垂直于方向 $\boldsymbol{n}(a, b, c)$ 的平面方程.

解 设平面上任一点是 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$（图 1-6），则向量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，因而它们的数量积等于零.

所求平面方程是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$$

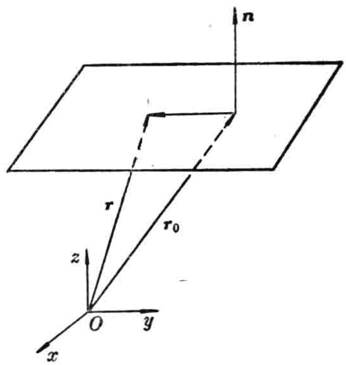


图 1-6

用坐标表示这个平面方程得到

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

或

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

记 $ax_0+by_0+cz_0=-d$, 就得到平面的一般方程

$$ax+by+cz+d=0$$

反过来, 任给一平面 $ax+by+cz+d=0$, 它必垂直于向量 $\boldsymbol{n}(a, b, c)$, 我们把 $\boldsymbol{n}(a, b, c)$ 称为此平面的法向量.

向量的向量积(叉乘)和它的性质 给出两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 设它们的夹角为 φ, 定义它们的**向量积(叉乘)**如下: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量, 而且

1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$;

2) 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系;

3) 向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, 即以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边所构成的平行四边形的面积.

根据上述定义, 可以直接推出:

1° 向量积的运算满足下列规则:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) \qquad (\text{反交换律})$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \qquad (\text{分配律})$$

$$m\boldsymbol{a}\times n\boldsymbol{b}=mn(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \qquad (\text{与数乘的结合律})$$

2° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

3° 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是它们的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

4° 对于三个基向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0} \qquad (i=1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\pm\boldsymbol{e}_k$$

其中 (i, j, k) 是 $(1, 2, 3)$ 的一排列, 偶排列时取正号, 奇排列时取负号.

5° 向量的向量积可以用坐标表示. 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2), 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 是笛卡儿直角坐标系的三个基向量.

例 2 给出两个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

求过 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 点, 且平行于所给两个平面交线的直线方程.

解 所求直线的方向向量 $\boldsymbol{l}$ 分别垂直于已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2(a_2, b_2, c_2)$, 因此 $\boldsymbol{l}\parallel\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$

设所求直线上任一点是 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$, 则有

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{l}$$

其中 t 是参数. 因此所求直线方程为

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$$

即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$$

用坐标表示这个平面方程就是:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

向量的混合积 给出三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 定义它们的**混合积**如下:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

混合积 $(\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c})$ 的几何意义是它的绝对值 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ 表示以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

可以证明三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面(即平行于同一平面) 的充分

必要条件是

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$$

向量的混合积也可以用坐标表示. 设三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), 则混合积的坐标表示为:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

由行列式的性质可以得到:

推论 1　$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$
$=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$

推论 2　$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

二重向量积　给出三个向量 $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\boldsymbol{c}(x_3, y_3, z_3)$, 则有以下关系:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{1.1}$$

证明　根据向量积的坐标表示

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
$$=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{l}_1+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{l}_2$$
$$+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{l}_3$$

因而有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ y_1z_2-y_2z_1 & z_1x_2-x_1z_2 & x_1y_2-y_1x_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
$$=(z_1x_2z_3+y_1x_2y_3-x_1z_2z_3-x_1y_2y_3)\boldsymbol{e}_1$$
$$+(x_1y_2x_3+y_2z_1z_3-y_1x_2x_3-y_1z_2z_3)\boldsymbol{e}_2$$
$$+(y_1z_2y_3+x_1z_2x_3-y_2z_1y_3-z_1x_2x_3)\boldsymbol{e}_3$$

因而得到

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

例 3 证明拉格朗日(Lagrange)恒等式:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}\\ &=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{d}\\ &=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\\ &=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

例 4 证明三重向量积有以下关系:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$$

证明 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 根据向量积的运算法则及二重向量积得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{m}\\ &=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{d}\\ &=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\end{aligned}$$

习　　题

1 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$

2 证明 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$

3 证明 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=0$

4 证明 $((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}))=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

5 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$

6 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 证明:

$$\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=a^4\boldsymbol{b}$$

7 求三平面 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\alpha$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=\beta$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}=\gamma$ 平行于同一直线的条件.