全国高等农林院校"十一五"规划教材

线性代数

王章雄　李任波　主编

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

中国农业出版社

全国高等农林院校　　　　规划教材

线　性　代　数

王章雄　李任波　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 王章雄，李任波主编．—北京：中国农业出版社，2009.7
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-13881-0

Ⅰ．线…　Ⅱ．①王…②李…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 091511 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
责任编辑　朱　雷　魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行
2009 年 7 月第 1 版　　2010 年 7 月北京第 2 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：13.25
字数：233 千字
定价：19.90 元

内 容 简 介

全书包括矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等内容，重点介绍线性代数的基本概念、基本原理、基本方法，强调科学性与实用性的统一，内容编排由浅入深，易于理解且富有启发性。可供高等学校理工农林类及经济管理类学生作为教材使用，也可供有关专业技术人员参考。

编　写　人　员

主　编　王章雄　李任波

副主编　徐光辉　刘　琳

参　编（按照姓氏笔画顺序）

王章雄（浙江农林大学）
刘　琳（西南林业大学）
任丽洁（西南林业大学）
张　健（西南林业大学）
李春艳（重庆科技学院）
李任波（西南林业大学）
胡慧兰（浙江农林大学）
徐光辉（浙江农林大学）

前　言

线性代数是研究有限维向量空间和线性变换的重要数学分支。由于线性问题广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域中，且很多非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题来处理，这使得它的思想、方法和结论在科学技术、工程技术、管理科学等众多领域都有着广泛的应用。另外它的结构化、公理化思维方式，对训练和提高学生的计算、抽象思维、逻辑推理、数学表达等能力也都非常有益。随着现代社会的发展和知识结构的快速更新，线性代数的方法和思想日渐为人们所重视。

在各类高等院校中，《线性代数》都是数学教育的一门重要的公共基础课，它不仅传授给学生在学习许多后续专业课程时所必需的知识基础，而且其思想方法在大学生素质教育中的重要性也日益显现。本教材以讲授代数基本知识和提高学生抽象数学思维能力为出发点，注重培养学生综合运用所学知识分析问题和解决实际问题的能力，也使学生能够掌握代数知识在专业学习、生产实践中的具体应用方法和应用手段。

本书包括了矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等内容，涵盖了线性代数课程的基本要求。基于一般非数学专业的线性代数课程的学时的限制，本书重点放在线性代数的基本概念、基本原理、基本方法方面，有些内容不再做深入探讨。遵照目前我国高校一般工、农（林）、经（管）类专业《线性代数》课程设置惯例，本书按 48 学时安排教学内容。根据专业的不同需求，教师可以在此基础上酌减相应内容（例如带“*”的内容），使之能够适用于较少学时的其他专业的《线性代数》课程。

行列式与矩阵都是线性代数的重要基本理论，它们又有着相似的“外表”，但多数现行教材在处理它们时是采用了完全不同的方法体系，这使得初学者时常感到混乱而困惑。因此本书改变以往教材从行列式到矩阵的编写次序，全书以矩阵为主线，先讲矩阵的初等变换，并用之于行列式的计算，而把矩阵的计算与更深刻的讨论放到第四章里，这样使读者感觉方法统一、线条清晰，更容易理解和掌握。

本书的编写工作由下列老师完成：浙江农林大学王章雄（主编，第二章及全书复习题），西南林业大学李任波（主编，第一章），浙江农林大学徐光辉（副主编，第五章），西南林业大学刘琳（副主编）和张健（第三章并负责全书习题答案查验），浙江农林大学胡慧兰（第六章），西南林业大学任丽洁（第四章），重庆科技学院李春艳（第七章）。全书由王章雄和李任波老师负责统稿。

本书在编写过程中，参考了众多的相关教材和参考书，相关学校教务部门、学院领导对本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此一并致谢！

书中不妥甚至错误之处，希望各位专家、同行、读者给予批评指正。

编 者

2009年4月

目　　录

第一章　矩阵的初等变换与方程组的消元法

矩阵是线性代数研究的主要对象和工具，它在数学的其他分支以及自然科学、现代经济学、管理学和工程技术领域等方面具有广泛的应用．矩阵的初等变换是线性代数的基础，在以后各章的学习中有重要作用．它是求解行列式、研究变量的线性变换、研究向量组的线性相关性及线性方程组求解等问题的有力且不可替代的工具．

在本章中，首先引进矩阵的概念和定义；然后重点介绍矩阵的初等变换，通过初等变换把矩阵变成行阶梯形、行最简形以及标准形；最后说明用消元法解线性方程组等同于其增广矩阵的初等行变换．

§1.1　矩阵的概念

1. 引例

在现实生活中，我们经常会遇到表示各种问题的数表，如：

例 1　表 1－1 是某校四个学生的数学，物理，化学三门课程的成绩表：

表 1－1

姓名	数学	物理	化学
张三	65	61	72
李四	77	77	76
王五	67	63	49
赵六	80	69	75

表 1－1 中数据有四行，分别代表四位同学，第 1 行代表张三，第 2 行代表李四，等等；有三列，分别代表数学、物理、化学三门课程；表格中的每个数据分别表示它所在行所在列的成绩，如位于第 2 行第 3 列的数据 76 表示第二位同学（李四），第三门课程（化学）的成绩，这样既能清楚地看到每位同

学的每一门课程的成绩，又能对不同同学（行）的成绩或不同课程（列）的成绩进行对比．

除去这个表格的实际意义，只看它的数据部分，可用以下的数表来表示：

$$\begin{pmatrix} 65 & 61 & 72 \\ 77 & 77 & 76 \\ 67 & 63 & 49 \\ 80 & 69 & 75 \end{pmatrix}.$$

该数表作为一个整体，描述了四位同学三门课程的成绩，不同行代表了不同同学，不同列代表了不同课程．

例 2 为了比较甲，乙，丙三种不同土壤条件下苗圃的育苗情况，分别在三个苗圃中培育苗木．一定时间后，从甲，乙，丙三苗圃中各随机抽取若干株苗木，观察苗木合格情况．

在甲苗圃中抽取了 255 株，其中 225 株合格，30 株不合格；

在乙苗圃中抽取了 195 株，其中 188 株合格，7 株不合格；

在丙苗圃中抽取了 380 株，其中 365 株合格，15 株不合格．

为了更清楚地表示三个苗圃合格苗木的分布情况，我们建立如表 1－2 所示的数表，表中有三行，第 1 行表示甲苗圃，第 2 行表示乙苗圃，第 3 行表示丙苗圃；有两列，分别代表合格株数，不合格株数；表格中的每个数据分别表示它所在行所在列的特征，如位于第 1 行第 1 列的数据 225 表示甲苗圃的合格株数为 225，这样既能清楚地看到不同苗圃合格与不合格的株数，又能对不同行（列）代表的数据进行比较．

表 1－2

苗圃	合格株数	不合格株数
甲	225	30
乙	188	7
丙	365	15

除去这个表格的实际意义，只看它的数据部分，可用以下的数表来表示：

$$\begin{pmatrix} 225 & 30 \\ 188 & 7 \\ 365 & 15 \end{pmatrix}.$$

数表的不同行代表了不同的苗圃，不同列代表了苗木合格与不合格的株数，显

然表中的数据表示了它所在行所在列的数字特征．

例 3　某航空公司在 A，B，C，D 四个城市之间的航线如图 1－1 所示．

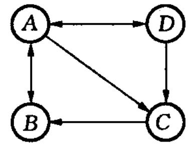

图 1－1

也可用表 1－3 来表示：

表 1－3

城市	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	0
C	0	1	0	0
D	1	0	1	0

表 1－3 中，“1”表示有航班，“0”表示没有航班．即得如下数表：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

该数表的行代表出发城市，列代表到达城市，表中的数据反映了 A，B，C，D 四个城市之间的交通连接情况．

通过以上例子可以看到，我们经常用这样的数表来表示一些实际问题．对于每个问题对应的数表有不同的实际意义，除去每个数表的实际背景，它们有共同的特征，即每个数表看作一个整体，由若干行若干列组成，其中不同行代表一个变量的不同取值，列代表另一个变量的不同取值，表中的数据表示了它所在行所在列的数字特征．

这样的数表在现实生活中随处可见．例如，企业上经常用到的年报表，月报表；林业上用到的小班调查表；人事部门的员工信息表，员工工资表；等等. 因此研究表格及其关系具有实际意义．

这些数表就是我们要介绍的矩阵．

2. 矩阵的定义

定义 1　由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）排成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ **矩阵**．通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…表示矩阵，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**，简称为**元**，元素 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i, j) 元．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示元素所在的行，称为**行标**，第二个下标 j 表示元素所在的列，称为**列标**．以数 a_{ij} 为 (i, j) 元的矩阵可简记为 (a_{ij})．有时为了表明一个矩阵的行数和列数，用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列矩阵．

元素是实数的矩阵称为**实数矩阵**，简称**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**．本书中的矩阵除特别说明外，都指实矩阵．

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为**行矩阵**；只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**．

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_n$.

在 n 阶方阵中，行标与列标相等的元素 $a_{ii}(i=1, 2, \cdots, n)$，称为（主）**对角线元素**（有时也称 a_{1n}，$a_{2,n-1}$，…，a_{n1} 为次对角线元素）．主对角线之外的全为零的方阵称为**对角矩阵**，简称**对角阵**．如：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

也记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$．

两个矩阵的行数相等，列数也相等，就称它们是**同型矩阵**．如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，并且对应的元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 4 设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 2-z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} z+1 & 2 \\ y & 2-y \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x，y，z.

解 因为
$$2=z+1, x=2,$$
$$2-z=2-y,$$

所以，$x=2$，$y=1$，$z=1$.

我们看到，上一节的例 1～例 3 中的数表都是矩阵．如，例 1 中学生成绩表可表示为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}65 & 61 & 72\\ 77 & 77 & 76\\ 67 & 63 & 49\\ 80 & 69 & 75\end{pmatrix},$$

这是一个 4×3 的矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每一个元素表示每一名同学的数学、物理、化学课程的成绩．

例 3 中四城市之间的航线可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

这是一个 4 阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的元素反映了 A，B，C，D 四个城市两两之间有无航班的交通情况．

3. 常用的矩阵

(1) 零矩阵

$m\times n$ 个元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$.

注意：不同型的零矩阵是不同的．

(2) 单位矩阵

主对角线上的所有元素全为 1 的对角阵，称为**单位阵**，记作 $\boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

(3) 数量矩阵

主对角线上的所有元素全为 λ 的对角阵，称为**数量阵**，记作 $\lambda\boldsymbol{E}$.

$$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}.$$

(4) 三角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为**上三角形矩阵**.

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为**下三角形矩阵**.

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**，简称**三角阵**.

§1.2 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵的一种十分重要的运算，它在整个矩阵理论中有重要作用.

1. 矩阵的初等变换

定义 2 矩阵的下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1) 交换矩阵的两行（交换 i，j 两行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

例 5
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

互换一，三两行，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 以一个非零实数 k 乘矩阵的某一行（第 i 行乘以数 k，记为 $r_i \times k$ 或 kr_i）；

例 6 对例 5 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$，以 $\frac{1}{3}$ 乘矩阵的第一行，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$