



全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

王章雄 李任波 主编

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

 中国农业出版社

全国高等农林院校

规划教材

线 性 代 数

王章雄 李任波 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数 / 王章雄, 李任波主编. —北京: 中国农业出版社, 2009. 7

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-13881-0

I. 线… II. ①王…②李… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 091511 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

责任编辑 朱 雷 魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2009 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月北京第 2 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 13.25

字数: 233 千字

定价: 19.90 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

全书包括矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等内容，重点介绍线性代数的基本概念、基本原理、基本方法，强调科学性与实用性的统一，内容编排由浅入深，易于理解且富有启发性。可供高等学校理工农林类及经济管理类学生作为教材使用，也可供有关专业技术人员参考。

编 写 人 员

主 编 王章雄 李任波

副主编 徐光辉 刘 琳

参 编 (按照姓氏笔画顺序)

王章雄 (浙江农林大学)

刘 琳 (西南林业大学)

任丽洁 (西南林业大学)

张 健 (西南林业大学)

李春艳 (重庆科技学院)

李任波 (西南林业大学)

胡慧兰 (浙江农林大学)

徐光辉 (浙江农林大学)

前 言

线性代数是研究有限维向量空间和线性变换的重要数学分支。由于线性问题广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域，且很多非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题来处理，这使得它的思想、方法和结论在科学技术、工程技术、管理科学等众多领域都有着广泛的应用。另外它的结构化、公理化思维方式，对训练和提高学生的计算、抽象思维、逻辑推理、数学表达等能力也都非常有益。随着现代社会的发展和知识结构的快速更新，线性代数的方法和思想日渐为人们所重视。

在各类高等院校中，《线性代数》都是数学教育的一门重要的公共基础课，它不仅传授给学生在后续专业课程时所必需的知识基础，而且其思想方法在大学生素质教育中的重要性也日益显现。本教材以讲授代数基本知识和提高学生抽象数学思维能力为出发点，注重培养学生综合运用所学知识分析问题和解决实际问题的能力，也使使学生能够掌握代数知识在专业学习、生产实践中的具体应用方法和应用手段。

本书包括了矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等内容，涵盖了线性代数课程的基本要求。基于一般非数学专业的线性代数课程的学时的限制，本书重点放在线性代数的基本概念、基本原理、基本方法方面，有些内容不再做深入探讨。遵照目前我国高校一般工、农（林）、经（管）类专业《线性代数》课程设置惯例，本书按 48 学时安排教学内容。根据专业的不同需求，教师可以在此基础上酌减相应内容（例如带“*”的内容），使之能够适用于较少学时的其他专业的《线性代数》课程。

行列式与矩阵都是线性代数的重要基本理论，它们又有着相似的“外表”，但多数现行教材在处理它们时是采用了完全不同的方法体系，这使得初学者时常感到混乱而困惑。因此本书改变以往教材从行列式到矩阵的编写次序，全书以矩阵为主线，先讲矩阵的初等变换，并用之于行列式的计算，而把矩阵的计算与更深刻的讨论放到第四章里，这样使读者感觉方法统一、线条清晰，更容易理解和掌握。

本书的编写工作由下列老师完成：浙江农林大学王章雄（主编，第二章及全书复习题），西南林业大学李任波（主编，第一章），浙江农林大学徐光辉（副主编，第五章），西南林业大学刘琳（副主编）和张健（第三章并负责全书习题答案查验），浙江农林大学胡慧兰（第六章），西南林业大学任丽洁（第四章），重庆科技学院李春艳（第七章）。全书由王章雄和李任波老师负责统稿。

本书在编写过程中，参考了众多的相关教材和参考书，相关学校教务部门、学院领导对本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此一并致谢！

书中不妥甚至错误之处，希望各位专家、同行、读者给予批评指正。

编 者

2009年4月

目 录

前言

第一章 矩阵的初等变换与方程组的消元法	1
§ 1.1 矩阵的概念	1
1. 引例	1
2. 矩阵的定义	3
3. 常用的矩阵	5
§ 1.2 矩阵的初等变换	6
1. 矩阵的初等变换	6
2. 矩阵的标准形	8
§ 1.3 消元法	13
1. 线性方程组的一般形式	13
2. 高斯消元法	14
3. 消元法与矩阵的初等行变换	15
习题一	20
第二章 方阵的行列式及其性质	22
§ 2.1 行列式的概念	22
1. 低阶行列式	22
2. n 元排列及其性质	25
3. n 阶行列式的概念	26
4. 行列式的按行按列展开	28
§ 2.2 行列式的性质与计算	29
1. 行列式的性质	29
2. 行列式的计算	32
§ 2.3 克莱姆法则和行列式的应用	37
1. 克莱姆法则	37
2. 齐次线性方程组的情形	39

3. 行列式的其他应用	40
习题二	41
第三章 n 维向量与向量空间	45
§ 3.1 n 维向量及其运算	45
1. n 维向量的概念	45
2. n 维向量的线性运算	46
§ 3.2 向量组的线性相关性	48
1. 线性相关性的概念	48
2. 线性相关性的有关定理	54
§ 3.3 向量组的秩	57
1. 向量组的极大线性无关组	57
2. 向量组的秩及其求法	58
3. 极大线性无关组的求法	64
*§ 3.4 向量空间	67
1. 向量空间的概念	67
2. 向量空间的基与维数	69
3. 向量在基下的坐标	70
习题三	72
第四章 矩阵的运算与秩	76
§ 4.1 矩阵的运算	76
1. 矩阵的线性运算	76
2. 矩阵的乘法运算	77
3. 矩阵的转置	82
4. 几种特殊的矩阵	83
§ 4.2 分块矩阵	84
1. 分块矩阵的概念	84
2. 分块矩阵的运算	85
3. 准对角矩阵	89
§ 4.3 矩阵的秩	90
§ 4.4 初等矩阵与逆矩阵	93
1. 初等矩阵	93
2. 逆矩阵	95

§ 4.5 矩阵的应用	104
习题四	109
第五章 线性方程组	114
§ 5.1 线性方程组的几种表达形式	114
§ 5.2 齐次线性方程组	115
1. 齐次线性方程组的基本概念	115
2. 齐次线性方程组解的性质	115
3. 齐次线性方程组的基础解系及其求法	116
§ 5.3 非齐次线性方程组	121
1. 非齐次线性方程组的基本概念	121
2. 非齐次线性方程组解的性质	122
3. 非齐次线性方程组的解法	122
§ 5.4 线性方程组的应用	129
1. 一个实例	129
2. 在几何上的应用	130
3. 在经济上的应用——投入产出模型	131
习题五	133
第六章 特征值与特征向量	136
§ 6.1 方阵的特征值与特征向量	136
1. 特征值与特征向量的概念	136
2. 矩阵特征值与特征向量的求法	136
3. 特征值与特征向量的性质	140
§ 6.2 矩阵的相似对角化	143
1. 相似矩阵的概念	143
2. 相似矩阵的性质	143
3. 矩阵相似对角化的条件	143
4. 矩阵相似对角化的方法	145
§ 6.3 向量组的正交性与正交矩阵	149
1. 向量的内积	149
2. 向量的长度	149
3. 正交向量组的概念及求法	150
4. 求规范正交基的方法	151

5. 正交矩阵与正交变换	153
§ 6.4 实对称矩阵的相似对角化	155
1. 对称矩阵的特征值与特征向量的性质	155
2. 对称矩阵的正交对角化	156
* § 6.5 矩阵的特征值和特征向量的应用	160
1. 经济发展与环境污染的增长模型	160
2. 斐波那契 (Fibonacci) 数列的通项	162
习题六	163
第七章 二次型	166
§ 7.1 二次型及其矩阵	166
1. 二次型的概念	166
2. 二次型经可逆变换后的矩阵	167
§ 7.2 化二次型为标准形的方法	168
1. 正交变换法化二次型为标准形	168
2. 配方法化二次型为标准形	171
* 3. 初等变换法化二次型为标准形	172
§ 7.3 正定二次型	174
1. 惯性定理	174
2. 正定二次型及其判别法	176
习题七	179
习题参考答案	181
复习题	190
参考文献	200

第一章 矩阵的初等变换与方程组的消元法

矩阵是线性代数研究的主要对象和工具，它在数学的其他分支以及自然科学、现代经济学、管理学和工程技术领域等方面具有广泛的应用．矩阵的初等变换是线性代数的基础，在以后各章的学习中有重要作用．它是求解行列式、研究变量的线性变换、研究向量组的线性相关性、线性方程组求解等问题的有力且不可替代的工具．

在本章中，首先引进矩阵的概念和定义；然后重点介绍矩阵的初等变换，通过初等变换把矩阵变成行阶梯形、行最简形以及标准形；最后说明用消元法解线性方程组等同于其增广矩阵的初等行变换．

§ 1.1 矩阵的概念

1. 引例

在现实生活中，我们经常会遇到表示各种问题的数表，如：

例 1 表 1-1 是某校四个学生的数学，物理，化学三门课程的成绩表：

表 1-1

姓名	数学	物理	化学
张三	65	61	72
李四	77	77	76
王五	67	63	49
赵六	80	69	75

表 1-1 中数据有四行，分别代表四位同学，第 1 行代表张三，第 2 行代表李四，等等；有三列，分别代表数学、物理、化学三门课程；表格中的每个数据分别表示它所在行所在列的成绩，如位于第 2 行第 3 列的数据 76 表示第二位同学（李四），第三门课程（化学）的成绩，这样既能清楚地看到每位同

学的每一门课程的成绩，又能对不同同学（行）的成绩或不同课程（列）的成绩进行对比。

除去这个表格的实际意义，只看它的数据部分，可用以下的数表来表示：

$$\begin{pmatrix} 65 & 61 & 72 \\ 77 & 77 & 76 \\ 67 & 63 & 49 \\ 80 & 69 & 75 \end{pmatrix}.$$

该数表作为一个整体，描述了四位同学三门课程的成绩，不同行代表了不同同学，不同列代表了不同课程。

例 2 为了比较甲，乙，丙三种不同土壤条件下苗圃的育苗情况，分别在三个苗圃中培育苗木。一定时间后，从甲，乙，丙三苗圃中各随机抽取若干株苗木，观察苗木合格情况。

在甲苗圃中抽取了 255 株，其中 225 株合格，30 株不合格；

在乙苗圃中抽取了 195 株，其中 188 株合格，7 株不合格；

在丙苗圃中抽取了 380 株，其中 365 株合格，15 株不合格。

为了更清楚地表示三个苗圃合格苗木的分布情况，我们建立如表 1-2 所示的数表，表中有三行，第 1 行表示甲苗圃，第 2 行表示乙苗圃，第 3 行表示丙苗圃；有两列，分别代表合格株数，不合格株数；表格中的每个数据分别表示它所在行所在列的特征，如位于第 1 行第 1 列的数据 225 表示甲苗圃的合格株数为 225，这样既能清楚地看到不同苗圃合格与不合格的株数，又能对不同行（列）代表的数据进行比较。

表 1-2

苗圃	合格株数	不合格株数
甲	225	30
乙	188	7
丙	365	15

除去这个表格的实际意义，只看它的数据部分，可用以下的数表来表示：

$$\begin{pmatrix} 225 & 30 \\ 188 & 7 \\ 365 & 15 \end{pmatrix}.$$

数表的不同行代表了不同的苗圃，不同列代表了苗木合格与不合格的株数，显

然表中的数据表示了它所在行所在列的数字特征.

例 3 某航空公司在 A, B, C, D 四个城市之间的航线如图 1-1 所示.

也可用表 1-3 来表示:

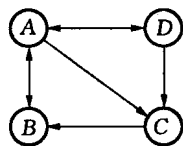


图 1-1

表 1-3

城市	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	0
C	0	1	0	0
D	1	0	1	0

表 1-3 中, “1” 表示有航班, “0” 表示没有航班. 即得如下数表:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

该数表的行代表出发城市, 列代表到达城市, 表中的数据反映了 A, B, C, D 四个城市之间的交通连接情况.

通过以上例子可以看到, 我们经常用这样的数表来表示一些实际问题. 对于每个问题对应的数表有不同的实际意义, 除去每个数表的实际背景, 它们有共同的特征, 即每个数表看作一个整体, 由若干行若干列组成, 其中不同行代表一个变量的不同取值, 列代表另一个变量的不同取值, 表中的数据表示了它所在行所在列的数字特征.

这样的数表在现实生活中随处可见. 例如, 企业上经常用到的年报表, 月报表; 林业上用到的小班调查表; 人事部门的员工信息表, 员工工资表; 等等. 因此研究表格及其关系具有实际意义.

这些数表就是我们要介绍的矩阵.

2. 矩阵的定义

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排成的 m

行 n 列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 通常用大写字母 $A, B, \dots$ 表示矩阵, a_{ij} 称为矩阵 A 的元素, 简称为元, 元素 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列, 称为矩阵 A 的 (i, j) 元. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示元素所在的行, 称为行标, 第二个下标 j 表示元素所在的列, 称为列标. 以数 a_{ij} 为 (i, j) 元的矩阵可简记为 (a_{ij}) . 有时为了表明一个矩阵的行数和列数, 用 $A_{m \times n}$ 或 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 表示一个 m 行 n 列矩阵.

元素是实数的矩阵称为实数矩阵, 简称实矩阵, 元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵.

只有一行的矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为行矩阵; 只有一列的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵.

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵, n 阶矩阵 A 也记作 A_n .

在 n 阶方阵中, 行标与列标相等的元素 $a_{ii} (i=1, 2, \dots, n)$, 称为 (主) 对角线元素 (有时也称 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ 为次对角线元素). 主对角线之外的全为零的方阵称为对角矩阵, 简称对角阵. 如:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

也记为 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

两个矩阵的行数相等, 列数也相等, 就称它们是同型矩阵. 如果 A 和 B 是同型矩阵, 并且对应的元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n),$$

那么称矩阵 A 和 B 相等, 记作 $A=B$.

例 4 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 2-z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} z+1 & 2 \\ y & 2-y \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

已知 $A=B$, 求 x, y, z .

解 因为

$$2 = z+1, x=2,$$

$$2-z=2-y,$$

所以, $x=2$, $y=1$, $z=1$.

我们看到, 上一节的例 1~例 3 中的数表都是矩阵. 如, 例 1 中学生成绩表可表示为矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 61 & 72 \\ 77 & 77 & 76 \\ 67 & 63 & 49 \\ 80 & 69 & 75 \end{pmatrix},$$

这是一个 4×3 的矩阵, 矩阵 A 中每一个元素表示每一名同学的数学、物理、化学课程的成绩.

例 3 中四城市之间的航线可用矩阵表示为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

这是一个 4 阶方阵, 矩阵 B 中的元素反映了 A, B, C, D 四个城市两两之间有无航班的交通情况.

3. 常用的矩阵

(1) 零矩阵

$m \times n$ 个元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, 记作 O .

注意: 不同型的零矩阵是不同的.

(2) 单位矩阵

主对角线上的所有元素全为 1 的对角阵, 称为**单位阵**, 记作 E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 数量矩阵

主对角线上的所有元素全为 λ 的对角阵, 称为**数量阵**, 记作 λE .

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

(4) 三角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为上三角形矩阵.

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为下三角形矩阵.

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为三角形矩阵, 简称三角阵.

§ 1.2 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵的一种十分重要的运算, 它在整个矩阵理论中有重要作用.

1. 矩阵的初等变换

定义 2 矩阵的下列三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 交换矩阵的两行 (交换 i, j 两行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$);

例 5

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

互换一, 三两行, 得

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 以一个非零实数 k 乘矩阵的某一行 (第 i 行乘以数 k , 记为 $r_i \times k$ 或 kr_i);

例 6 对例 5 中的矩阵 A , 以 $\frac{1}{3}$ 乘矩阵的第一行, 得

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$