数学名著译丛

线性算子理论

〔波兰〕S. Banach 著

金成桴 译

科学出版社

数学名著译丛

线性算子理论

〔波兰〕S. Banach　著

金成桴　译

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是著名波兰数学家 S. Banach 的经典著作 *Théorie des Opérations Linéaires* 的中译本，并包括 A. Pełczyński 和 Cz. Bessaga 的综合报告：Banach 空间现代理论的某些方面. 主要介绍 Banach 空间中的线性算子理论及相关问题，它是泛函分析的重要组成部分. 全书共分 12 章，包括引言、附录和附注以及综合报告. 主要内容有：距离空间、一般向量空间、Banach 空间和 F 空间、线性算子、线性泛函与线性泛函方程、双正交序列与弱收敛序列、等距与同构理论、线性维数，以及 Banach 空间现代理论中的 Banach 空间局部性质、逼近性质与基、Banach 空间类中的 Hilbert 空间表征等.

本书可作为数学专业泛函分析方向研究生、教师的参考书，也可供相关领域的科研工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性算子理论/〔波兰〕S. Banach 著；金成桴译. —北京：科学出版社，2011
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-030596-1

I. ①线… II. ①S.… ②金… III. ①线性算子理论 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 044938 号

责任编辑：赵彦超 杨欣河/责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷
排版制作：科学出版社编务公司
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 4 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2011 年 4 月第一次印刷 印张：18 1/4
印数：1—2 500 字数：352 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

译 者 序

泛函分析创始人之一、著名波兰数学家 Stefan Banach 的经典名著 *Théorie des Opérations Linéaires* 出版于 20 世纪 30 年代. 也许由于第二次世界大战的影响, 该书的法文版直到 1955 年才由美国的 Chelsea 出版公司出版, 1978 年出版了第二版, 1987 年出版了由 F. Jellett 翻译的英文版(荷兰 North-Holland 出版公司出版). 中译本主要根据原版并参考英译本翻译而成.

鉴于 Banach 时代的数学符号、术语与现代用法不尽相同, 中译本尽量采用现代术语, 例如全连续算子(opérations totalement continues et associées) 就译为紧算子. 另外, 由于泛函分析是一门涉及分析、拓扑与代数等的综合性学科, 因此原书有些数学符号按现代数学习惯也作了更改. 还有, Banach 在序言中明确说明书中定理一般不给出来源, 但事实上书中许多定理, 特别是不属于 Banach 本人的大部分定理都在脚注和书后面的附注中给出来历, 这是考虑到尊重原著, 同时也深深感到一个数学理论的创立不易, 因此, 尽管英文版删掉了原书法文版中的许多脚注, 中译本仍按原著把它们加上. 当然,其中所引的许多古典文献很可能在国内不易找到, 尤其是除了英文以外的许多其他语种的文献. 这也是那个年代和这之前数学在欧洲很发达, 比其他地区有着明显优势的真实反映.

本书主要介绍 Banach 空间中的线性算子理论. 它的一个特点是富有启发性, 通过本书的阅读, 读者从中可初步领略到一个数学理论的建立过程: 从总结前人的工作到提出新问题、新方法再到给出新理论, 并不断提出一定质量的问题, 进行及时总结和提高. 但由于作者的叙述比较简练, 本书对初学者可能会有些困难. 好在现在已经有不少泛函分析的优秀教材, 读者可结合阅读. 本书附录主要介绍 Banach 空间中的弱收敛性. 附注是对前面各章内容的说明, 给出定理的来龙去脉, 并提出许多富有启发性的问题, 有些至今还没有完全解决, 最后的表格清楚说明了同构、等距和等价这三个不变量在不同空间中的存在性. 由于其中一些在本书出版之前还未解决的问题现在已经解决了, 因此我们按英译本作了改动. 最后一部分是 A. Pelczyński 和 Cz. Bessaga 写的综合报告 "Banach 空间现代理论的某些方面", 主要介绍有关理论在本书出版以后的最新进展, 把它放入本书是为了让读者对 Banach 空间算子理论从建立到发展有个比较全面的了解. 书后 330 多篇文献和 70 多篇附加文献可供研究生和有关学者参考.

很高兴得知科学出版社准备出版一系列优秀的数学经典名著, 这对我国数学

的发展无疑有很大帮助. 能够为此尽一份微薄之力, 我深感荣幸. 但限于水平, 书中错误和不妥之处在所难免, 敬请读者批评指正.

最后, 感谢科学出版社责任编辑对本书翻译出版整个过程的大力支持和帮助, 也感谢我妻子何燕俐对我工作的支持与关心.

金成桴

2010 年 4 月于 Amstelveen

前　　言

由 V. Volterra 创立的算子理论，是将定义在无穷维空间中的函数作为研究对象. 本质上，这个理论已经渗透到几个非常重要的数学领域：只需回忆积分方程理论和变分学作为一般算子理论主要领域的特殊情形就够了. 在这个理论中，经典的数学方法与近代方法看来非常有效和十分和谐地结合在一起. 通常它也可使得集合论或拓扑学的一些定理有不易预料的全面解释. 例如，由 Birkhoff 和 Kellogg 所证明的算子理论，有关不动点的拓扑定理可翻译为微分方程解的存在性的古典定理. 若不借助算子理论的帮助，数学中的有些重要部分就不能得到深入的理解. 当代例子有：实变函数理论、积分方程以及变分学等.

因此，这个理论应该得到赞赏. 在它的讨论范围内(即使不考虑它的许多应用)因其漂亮的价值引起越来越多的数学家的兴趣. J. Hadamard 认为，作为近代数学研究最有效方法之一，算子理论的出现并不奇怪.

本书的内容包括算子代数的基础，即专注于所谓线性算子的研究，它对应于线性形式 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的代数研究.

线性算子的概念可定义如下：设 E 和 E_1 是两个抽象空间，每个都赋予相应的加法运算和零元素. 设 $y=U(x)$ 是一个函数(算子，变换)，在它的作用下，E 中的每个元素 x 对应于 E_1 的元素 y (在特殊情形，E_1 是实数空间，这个函数也就是熟知的泛函). 若对 E 的任何 x_1 和 x_2 有 $U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$，则 U 称为加性算子. 此外，如果 E 和 E_1 是距离空间，就说对空间每对元素之间的距离已被定义，那么就可考虑连续算子 U. 具有加性的连续算子称为线性的.

本书主要考虑定义在某类称为 B 空间(即 Banach 空间——译者注)的一般空间中的线性算子的结果. 例如，连续函数空间、p 次方可和函数空间以及 Hilbert 空间等.

同时也给出一般定理在不同数学领域中的解释，即给出它在群论、微分方程、积分方程、无穷多个未知数的方程组、实变函数、求和方法、正交级数等中的说明. 我们将看到某些定理在这些不同领域内给出的结果. 譬如，关于同时在一般测度问题、矩问题和无穷多个未知数的线性方程组解的存在性问题中的加性泛函的扩张定理.

在本书的前面，将给出这个理论在一般集合论的主要方法和代数工具中的几个新应用. 另外，在本书其他章里还可找到一些新的一般定理. 特别，在最后两章

和附录中包括了以前没有发表过的一些结果，它们组成 Banach 空间关于线性变换不变性研究的概要. 同时，第 12 章包括线性维数性质的定义和分析，它在这些空间中的作用类似于通常维数在 Euclid 空间中的作用.

正文中没有考虑的空间的结果和问题，在本书末尾的附注中作了简短的介绍，有些进一步的文献也在那里给出. 一般，除了在引言或者附注中，本书并不指出定理的来源，因为我认为它们太简单或是第一次在这里给出证明.

对于某些最近出现和继续出现在期刊 *Studia Mathematica* 中的有关工作，主要介绍泛函分析领域及其应用的研究.

我还想写第二本书作为本书的结束，是关于广泛应用拓扑方法的其他类型的泛函算子理论.

最后，我诚挚地感谢所有在工作中帮助我的朋友们，他们把我的波兰文手稿翻译成法文，并在我的工作中给了我有价值的建议. 特别要感谢 H. Auerbach 帮我写了引言以及 S.Mazur 给了我多方面的帮助并帮我起草了最后的附注.

Stefan Banach

1932 年 7 月, Lwów

目　录

Banach 空间现代理论的某些方面

引言 A　Lebesgue-Stieltjes 积分

假定读者已经熟悉测度论和 Lebesgue 积分[①].

A.1　Lebesgue 积分理论中的某些定理[②]

如果可测函数 $x_n(t)$ 有界，且序列 $\{x_n(t)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于函数 $x(t)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt=\int_a^b x(t)dt. \tag{1}$$

更一般地，如果存在可和函数 $\varphi(t)\geqslant 0$，使得 $|x_n(t)|\leqslant\varphi(t)$，对 $n=1,2,\cdots$，则极限函数也可和且满足等式(1).

如果函数 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上可和，并组成收敛于函数 $x(t)$ 的非减序列，则只要函数 $x(t)$ 可和，等式(1)就成立，否则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt=+\infty.$$

如果 p $(p\geqslant 1)$ 次方可和函数序列 $\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛于函数 $x(t)$，且如果

$$\int_a^b |x_n(t)|^p dt<K,\quad 对\ n=1,2,\cdots,$$

则函数 $x(t)$ 也 p 幂可和[③].

A.2　p 次方可和函数的某些不等式[④]

在 $[a,b]$ 上 $p(p>1)$次方可和函数类将记为 L^p. 对于数 p 存在满足方程

---

① 例如，参看 C. dela Vallée Poussin. Intégraies de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Clasees de Baire. Paris: Gauthier-Villars, 1928. On H.Lebesgue. Leçons sur l'integration. 2-me edition. Paris: Gauthier-Viliare, 1928.

② 例如，参看 C. dela Vallee Poussin. 同上, 49.

③ 参看 E.W. Hobson. The Theory of Functions of a real variable …. 2nd Editions. Cambridge, 1921, 26(I): 300.

④ 参看 E.W. Hobson. 同上. vol. 1, 586.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$对应的数$q$，称为$p$的共轭指数. 对$p=2$，有等式$q=2$.

如果函数$x(t)\in L^p$，以及$y(t)\in L^p$，则函数$x(t)y(t)$可和，且它的积分满足不等式

$$\left|\int_a^b xydt\right| \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别，对$p=2$，有

$$\left|\int_a^b xydt\right| \leqslant \left(\int_a^b x^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b y^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果函数$x(t)$和$y(t)$属于L^p，则$x(t)+y(t)$也属于L^p，且有

$$\left(\int_a^b |x+y|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这些不等式类似于下面对应的算术不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

对$p=2$，从第一个不等式得著名的 Schwarz 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任何p ($p\geqslant 1$)次方可和函数以及任何$\varepsilon>0$，存在连续函数$\varphi(t)$满足[①]

$$\int_a^b |x-\varphi|^p < \varepsilon.$$

① 例如，参看 E. W. Hobson. 同前. vol. II, 250.

A.3 渐近收敛性

定义在某个集合上的可测函数序列 $\{x_n(t)\}$ 称为渐近收敛(或测度收敛)于定义在相同集合上的函数 $x(t)$，如果对每个 $\varepsilon>0$，有[①]

$$\lim_{n\to\infty} m \mathop{E}_{t}(|x_n(t)-x(t)|>\varepsilon)=0,$$

其中 $m(A)$ 是集合 A 的 Lebesgue 测度.

渐近收敛于函数 $x(t)$ 的序列 $\{x_n(t)\}$ 总有几乎处处收敛于(在通常逐点意义下)这个函数的子序列.

序列 $\{x_n(t)\}$ 渐近收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon>0$，总有[②]

$$\lim_{i,k\to\infty} m(\{t:|x_i(t)-x_k(t)|>\varepsilon\})=0.$$

A.4 平均收敛性

在 $[a,b]$ 上 p $(p\geqslant 1)$ 次方可和函数序列 $\{x_n(t)\}$ 称为 p 次方平均收敛于 p 次方可和函数 $x(t)$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p dt=0.$$

这样的函数 $x(t)$ 存在的充分必要条件是

$$\lim_{i,k\to\infty}\int_a^b |x_i(t)-x_k(t)|^p\, dt=0.$$

于是，函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上除了零测度集是唯一确定的.

平均收敛于函数 $x(t)$ 的函数序列也渐近收敛于这个函数[③]，因此(见 A.3 节)，它有几乎处处逐点收敛于这同一函数的子序列.

---

① mE 表示集合 E 的测度；符号 $\mathop{E}_{t}(\ )$ 表示对所有 t 值具有性质 ( ) 的集合.

② 例如，参看 E. W. Hobson. 同前. vol. II, 242-244.

③ 例如，参看 E. W. Hobson. 同前. vol.II, 245.

A.5 Stieltjes 积分[①]

设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$a(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 用数

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

将区间 $[a,b]$ 划分成子区间，并在每个子区间任取数 θ_i，类似于 Riemann 积分的定义，作和

$$S = \sum_{i=1}^{n} x(\theta_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})], \qquad \text{其中 } t_i \geqslant \theta_i \geqslant t_{i-1}.$$

我们指出，若对每一个细分序列，当最大子区间长度趋于零时和式 S 有极限，这个极限记为

$$\int_a^b x(t) d\alpha(t),$$

称它为 Stieltjes 积分.

这个积分有下面性质：

$$\int_a^b x(t) d\alpha(t) = -\int_b^a x(t) d\alpha(t),$$

$$\int_a^b x(t) d\alpha(t) + \int_b^c x(t) d\alpha(t) = \int_a^c x(t) d\alpha(t),$$

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)] d\alpha(t) = \int_a^b x_1(t) d\alpha(t) + \int_a^b x_2(t) d\alpha(t).$$

第一中值定理在这里取不等式

$$\left| \int_a^b x(t) d\alpha(t) \right| \leqslant MV,$$

其中 M 是绝对值 $|x(t)|$ 的上确界，V 是函数 $\alpha(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差.

如果函数 $\alpha(t)$ 绝对连续，Stieltjes 积分可以表示为下面的 Lebesgue 积分：

① 例如，参看 H. Lebesgue. 同前，第 11 章.

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t) = \int_a^b x(t)\alpha'(t)dt.$$

如果 $\alpha(t)$ 是递增函数(即当 $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$ 时 $\alpha(t') < \alpha(t'')$), 且若对区间 $[\alpha(a),\alpha(b)]$ 中的所有数 s, 令

$$\beta(s) = \sup(\{t : s \geqslant \alpha(t)\}),$$

则得到

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]ds. \text{①} \tag{2}$$

证明　由 $\beta(s)$ 的定义, 有

$$\beta[\alpha(t)] = t, \quad 对\ a \leqslant t \leqslant b. \tag{3}$$

由于假设 $\beta(s)$ 递增, 且由(3)它在区间 $[a,b]$ 取所有值, $a = \beta[\alpha(a)]$ 和 $b = \beta[\alpha(b)]$, 因此它是连续函数. 由此函数 $x[\beta(s)]$ 连续.

考虑 $[a,b]$ 的分划 δ: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 并取 $\alpha(t_i) = \theta_i$, 对 $i = 1,2,\cdots,n$, 有

$$I_i = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} x[\beta(s)]ds = (\theta_i - \theta_{i-1})\chi(\theta_i'),$$

其中 $\theta_i' = \beta(s_i')$ 和 $\theta_{i-1} \leqslant \theta_i' \leqslant \theta_i$. 显然 $\beta(\theta_{i-1}) \leqslant \beta(s_i') = \theta_i' \leqslant \beta(\theta_i)$. 由(3)有 $\beta(\theta_{i-1}) = \beta[\alpha(t_{i-1})] = t_{i-1}$, 类似地, $\beta(\theta_i) = t_i$. 因此

$$t_{i-1} \leqslant \theta_i' \leqslant t_i,$$

所以

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]ds = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n x(\theta_i')[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})]. \tag{4}$$

现在, 当分划 δ 最大子区间的长度趋于零时, 这个和式趋于 $\int_a^b x(t)d\alpha(t)$, 从而由(4)得(2), 证毕.

因此, 现在允许 $\alpha(t)$ 为任一有界变差函数. 这样的函数 $\alpha(t)$ 总可以写为两个递增函数 $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$ 之差 $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$, 如前, 用 $\beta_1(s)$ 和 $\beta_2(s)$ 表示对应的函数, 得到

① 参看 H. Lebesgue. 同前, 258-260.

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t) = \int_a^b x(t)\, d\alpha_1(t) - \int_a^b x(t)\, d\alpha_2(t)$$
$$= \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\alpha_1(s)]\, ds - \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\alpha_2(s)]\, ds.$$

如果函数 $x_n(t)$ 连续且一致有界，且如果序列 $\{x_n(t)\}$ 处处(逐点)收敛于函数 $x(t)$，则对每个有界变差函数 $\alpha(t)$，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)d\alpha(t) = \int_a^b x(t)d\alpha(t),$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x_n[\beta_1(s)]ds = \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]ds$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]ds = \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]ds.$$

A.6 Lebesgue 定 理

注意下面的 Lebesgue 定理[①].

对每个在 $[0,1]$ 上的有界可测函数 $\alpha(t)$，可和函数序列 $\{x_n(t)\}$ 满足等式

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \alpha(t)x_n(t)dt = 0$$

的充分必要条件是下面三个条件同时满足：

(1) 序列 $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\, dt\right\}$ 有界；

(2) 对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，使得对 $[0,1]$ 中每个测度小于 η 的子集 H，不等式 $\left|\int_H x_n(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$，对 $n = 1, 2, \cdots$ 成立；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^u x_n(t)dt = 0$, 对每个 $0 \leqslant u \leqslant 1$.

本书后面将得到这个类型的其他定理.

① H. Lebesgue. Annales de Toulouse, 1909.