

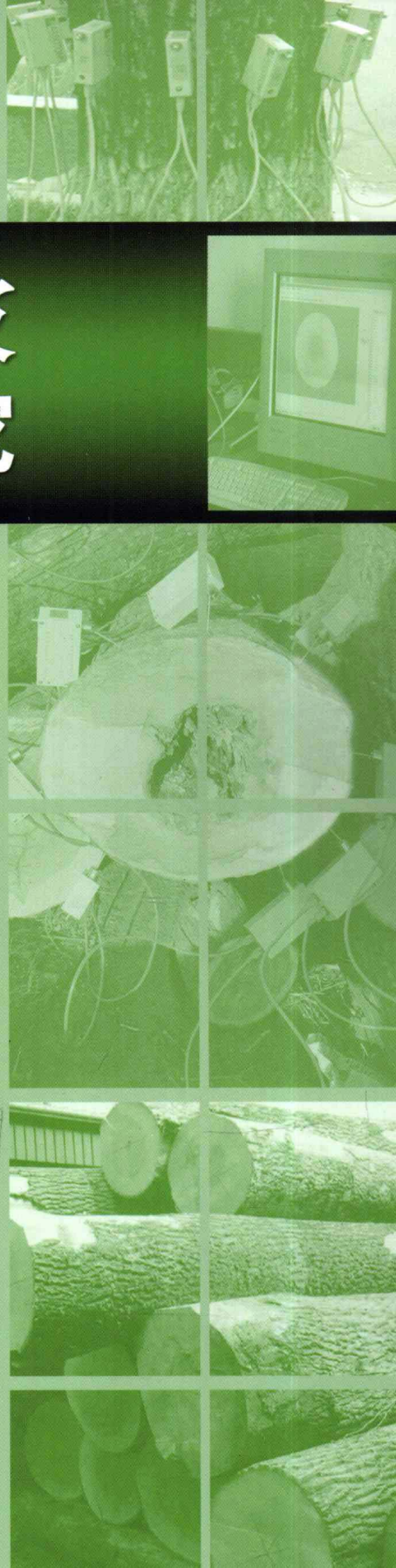
Wood Non-destructive Testing
Based on Stress Wave

木材应力波 无损检测研究

杨学春 王立海 著



科学出版社



木材应力波无损检测研究

杨学春 王立海 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书比较系统地阐述了应力波在原木中的传播理论、应力波传播参数的影响因素分析、应力波二维成像及三维重构技术、应力波成像系统研发、结构用原木力学性质估计、冻结木与非冻结木应力波传播比较、行道树应力波无损检测等方面内容。

本书可作为从事木材科学与技术、森林工程、无损检测工作的科技人员和高等学校相关专业师生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

木材应力波无损检测研究/杨学春,王立海著. —北京:科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-032428-3

I. ①木… II. ①杨… ②王… III. ①木材-应力波-无损检验-研究
IV. ①S781

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 196142 号

责任编辑:张会格 雷 旸 童安齐/责任校对:陈玉凤

责任印制:钱玉芬/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 10 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2011 年 10 月第一次印刷 印张: 12 1/2

印数: 1—1 000 字数: 244 000

定价: 60.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

木材应力波无损检测技术是近 20 年来发展最为迅速的木材无损检测技术之一，它因操作简单、携带方便、成像比较准确等优势被广泛应用于立木、原木、板材的物理力学性质评估和缺陷检测及木质构造物质量无损评价等方面。

本书是作者针对 10 多年来获得的木材应力波无损检测的科研成果和发表的学术论文，认真总结、归纳，形成的一本学术专著。本书比较系统地阐述了应力波在原木中的传播理论及运行轨迹、应力波传播参数的影响因素、应力波二维成像机理及三维重构技术、应力波木材无损检测信号采集系统以及木材应力波成像系统、应力波在冻结木和非冻结木传播比较分析、结构用原木力学性质估计以及行道树无损评价等内容。期望本书可供从事相关工作的企业工程技术人员和高校相关专业的师生学习参考。

本书共分八章，第一章、第二章、第三章、第四章第四节、第七章、第八章第一节由杨学春编写；第四章第一、二、三、五、六节以及第五章、第八章第二节由王立海编写；第六章由徐华东编写。

限于作者的理论和专业水平，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请读者指正。

作 者

2011 年 6 月

目 录

前言

第一章 绪论	1
第一节 木材无损检测概述	1
第二节 应力波在木材性质检测中的研究现状	3
第二章 应力波在原木中传播理论	7
第一节 原木轴向的应力波传播理论	7
第二节 原木径向和弦向应力波传播理论	17
第三章 应力波在原木中传播轨迹仿真模拟	22
第一节 原木轴向应力波传播轨迹的近似模拟	22
第二节 原木径向和弦向应力波传播轨迹近似模拟	36
第四章 应力波在木材传播的影响因素分析	40
第一节 摆锤冲击力对应应力波传播的影响	40
第二节 不同季节对应应力波传播的影响	45
第三节 传感器数量和空间布局对应应力波传播的影响	54
第四节 木材结构性质对应应力波传播的影响	63
第五节 含水率对应应力波在木材传播的影响	73
第六节 原木断面弦向角对应应力波传播速度的影响	86
第五章 木材应力波成像机理与成像系统的研究	90
第一节 木材应力波二维成像的研究	90
第二节 木材应力波图像三维重构的初步研究	99
第三节 应力波木材无损检测信号采集系统	105
第四节 原木应力波成像系统的研究	108
第六章 冻结木与非冻结木应力波传播的研究	114
第一节 冻结与常温状态下活立木应力波传播参数比较	114
第二节 冻结与非冻结状态下木材试件应力波传播研究	118
第三节 冻结与非冻结板材径切面应力波传播规律试验研究	125
第四节 冻结与非冻结原木横截面应力波传播规律研究	142
第七章 结构用原木力学性质与应力波传播参数的研究	154
第一节 结构用原木应力波传播速度的研究	154

第二节	原木力学特性与应力波动弹性模量的研究·····	168
第八章	黑龙江省主要树种腐朽应力波断面 2D 图像分析及应用 ·····	180
第一节	黑龙江省主要树种应力波 2D 图像分析 ·····	180
第二节	柳树行道树 2D 应力波检测与安全评估 ·····	184
参考文献	·····	191
致谢	·····	194

第一章 绪 论

第一节 木材无损检测概述

一、无损检测技术的简述

无损检测技术是指以不损及其将来使用和使用可靠性的方式，对材料或制件或两者进行宏观缺陷检测，几何特征测量，化学成分、组织结构和力学性能变化的评定，并进而就材料或制件对特定应用的适用性进行评价的一种技术方法（李家伟等，2002）。无损检测技术与传统的破坏性检测技术相比，其经济效益十分显著，因此从第二次世界大战以后，发展非常迅速。

由于无损检测的可靠性与被检工件的材质、组成、形状、表面状态、所采用的物理量的性质以及被检工件异常部位的状态、形状、大小、方向性和检测装置的特性等关系很大，而且还受人为因素、标定误差、精度要求、数据处理和环境条件的影响。对于不同构件、不同材料、不同缺陷，不同的无损检测方法检测结果的准确程度是不一样的。

目前，无损检测技术应用的领域很广，基本涉及所有的材料领域，如金属材料（铁、钢、合金、非钢铁金属等）、聚合物、陶瓷、玻璃、水泥、混凝土、木材、复合材料等。

二、木材及人造板无损检测技术的研究现状

木材无损检测技术是 20 世纪 50 年代后逐步兴起的对木材的生长特性（如木材生长轮微密度、立木年轮）、木材及木材构件的物理性质（如木材密度和含水率）、木材及木材构件的力学性质（如木材的弹性模量）、木材及木材构件的缺陷（如腐朽、节子、裂纹等）进行的一种非破坏性检测的技术。1998 年，美国 Robert J. Ross 等在 *Nondestructive Evaluation of Wood* 一文中指出：木材无损评价应基于木材无损检测技术。该文介绍了无损检测技术在木材中应用的范围包括可视特征评价、物理检测、化学检测及力学检测四个方面，并介绍激光扫描、机械应力分等、射线、超声波与应力波法在木材及木材构造物性质检测上的应用（Ross et al. , 1998）。

由于木材本身的结构比较复杂，对于不同树种、不同材种，甚至对于同一树种的不同部位或者不同生长环境，其性质（如物理性质、力学性质及缺陷的属性）都会有所不同。这些因素都会对检测的精度产生不利的影响。为寻求一种适

合木材性质、检测准确率较高的无损检测的方法,各国林业研究人员对多种无损检测方法进行了试验研究,且将超声波、射线、微波、应力波等无损检测技术应用到木材性质检测方面,并已经取得了较好的成果。随着电子、光学和计算机技术的不断发展,目前应用到木材性质检测的无损检测技术已达十几种,如射线检测、超声波检测、核磁共振检测、微波检测、应力波检测及声学法等。

(一) 木材生长特性、木材及人造板物理力学性质的无损检测技术

经过几十年的发展,林业发达国家的研究人员已经用射线法、微波法、红外线法、电子计算机 X 射线断层扫描技术(CT)等方法对木材生长特性和物理性质、人造板的物理性质的检测进行了尝试性的研究,并研制出一些设备和仪器。我国的林业研究人员在 20 世纪 80 年代曾用 X 射线对木材的微密度和立木年轮进行检测,并开发了木材微密度软 X 射线测量仪和 X 射线立木年轮检测仪等(李坚,1991)。

在对木材力学性质无损检测方面,林业发达国家,如美国、日本、芬兰等的林业研究人员相继对超声波、射线、机械应力无损检测、振动法、微波、应力波等方法和技术进行研究。我国的林业研究人员自 20 世纪 80 年代开始应用超声波法、应力波法和振动法对木材及人造板的力学性质进行应用研究,并开发了 FFT(Fast Fourier Transform)分析无损检测系统,取得了较好的成果(赵学增等,1988)。

(二) 木材及人造板缺陷的无损检测技术

木材及人造板的缺陷有很多种,包括节子、腐朽、变色、虫眼、裂纹等,这些缺陷对木材的物理力学性质有很大的影响。而且木材和人造板的等级划分、木质结构的维修都与这些缺陷有关。国外林业发达国家对此非常重视,在木材缺陷无损检测研究方面取得许多研究成果,出现多种检测方法,如超声波法、微波检测法、声学法、射线法、核磁共振法、光学法、红外法、地质雷达法等。

我国林业研究人员早在 20 世纪 70 年代就用射线对木材缺陷进行检测研究。1979 年,许文台用 X 射线观察原木,原木直径分别为 12cm、20cm、28cm、30cm 与 40cm,结果得出,利用 X 射线获得的图片可以分辨腐朽、空洞、节疤等,但由于硬件技术的匮乏,没能将其技术应用到贮木场的木材生产中(许文台,1979)。王志同(1991)在“无损测试技术在木材工业中的应用”一文中指出,我国在木材加工利用、木材分等、人造板质量、古建筑的维修及木材复合材料等方面均需要无损检测技术。随后,我国相继出现利用微波、超声波、CT 成像、应力波等方法探测木材内部缺陷的存在及部位。

综上所述,经过近半个世纪的研究,木材无损检测技术大多数是针对木材物

理力学性质、木材生长特性及木材缺陷的检测。木材不同性质采用的无损检测技术如表 1-1 所示。

表 1-1 木材不同性质采用的无损检测技术

	木材物理力学性质	木材生长特性	木材缺陷
射线法	✓	✓	✓
微波法	✓	✓	✓
红外线法	✓	✓	✓
超声波法	✓	✓	✓
机械应力法	✓		✓
振动法	✓		✓
应力波法	✓		✓
声发射法	✓		✓
核磁共振法		✓	✓
光学法			✓
地质雷达法			✓

第二节 应力波在木材性质检测中的研究现状

虽然各国林业研究人员将超声波、射线、微波、核磁共振、声发射、应力波等无损检测技术应用到木材物理性质、生长特性、力学性质及木材缺陷等检测方面已经取得一定的成绩，研究出多种无损检测手段，并通过实验取得了可喜的成绩。但应力波无损检测技术与其他无损检测技术如工业 CT、X 射线等相比，具有成本低、携带方便等优势，并且应力波测试方法不受被测木材形状和尺寸的限制和影响，不损坏被测木材，在传感器和被测木材之间不用任何耦合剂，所以应力波检测技术发展迅速，并且在木材工业领域（如木材缺陷的判断、木材力学性质的检测等方面）得到了较好的应用，取得较好的成果。

一、应力波基本原理与方法

应力法的基本原理是利用脉冲锤撞击木材，使其内部产生应力波的传播，通过测量应力波的传播时间和传播速度的变化来确定木质材料的性质（如弹性模量和缺陷等）。图 1-1 是应力波计时器的工作原理。通过用一个脉冲锤敲击被测木材样本，在其内部产

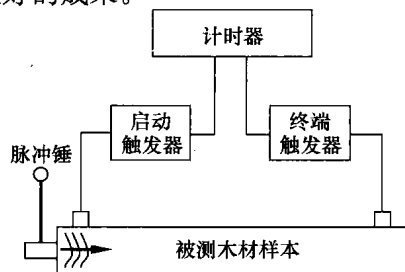


图 1-1 应力波技术检测木材性质的原理图

生一个应力波，用两个触发器感应该波的变化，并在计时器上显示时间差，根据应力波在被测木材中通过的时间来判定木材的性质（如弹性模量和缺陷等）。

二、应力波无损检测的特点

与其他无损检测技术相比，应力波检测技术具有其自身特有的优势：

（1）设备制造以及野外检测成本较低。工业 CT、X 射线等检测方法虽然具有良好的检测效果，但测试仪器成本比较昂贵，不利于普及推广使用。与之相比，应力波检测仪器的成本则要相对低廉，易于在林区进行推广使用，更具有实际操作价值。

（2）仪器携带方便，有利野外作业。目前应用于活立木检测领域的应力波检测仪器均为便携式，测试仪器适应能力比较强，能够对不同地理条件、不同外形尺寸的立木进行检测。

（3）对人体无害，且不损坏被测木材。与工业 CT、X 射线等检测技术相比，应力波检测属于一种机械波检测技术，不会对人体造成任何伤害。

（4）仪器易操作，不需要耦合剂。采用超声波成像检测技术对立木内部腐朽进行检测时，为了防止传感器与立木之间的空气缝隙影响超声波的传播，超声波探头与立木之间必须添加耦合剂，这造成了野外测试的极大不便。而利用应力波进行检测时，则不需要添加耦合剂，有利于野外测试并节省了检测时间。

三、应力波检测木材性质的研究现状

经过半个多世纪的研究，综合国内外参考文献，应力波技术用于木材性质检测主要包括以下几个方面。

（1）研究应力波在木材中的传播规律，包括径向、弦向及纵向的一维、三维传播理论，应力波传播参数沿着传播方向的等值线分布，以及应力波二维成像理论及三维重构等。

（2）研究应力波传播参数（传播时间和传播速度）与被检对象物理性质（含水率、密度、纹理角、尺寸等）、木材力学特性表征指标（MOE 和 MOR 等）之间相关关系，进而为被检对象快速检测、等级划分及质量评定等提供科学依据。被检对象包括板材、锯材、原木、活立木（含古树）以及木制构造物 [枕木、厂房、桥梁、足球馆、学校体育馆、古建筑（庙宇）等]。

（3）应用应力波技术对被检对象的缺陷（腐朽、裂纹、空洞、节子等）进行定性、定位及定量的识别。先用应力波传播时间或传播速度的变化，来判别被检对象是否存在缺陷，继而用应力波成像技术来确定缺陷的位置及大小。被检对象基本上包括原木、活立木（古树）及木制构造物（桥梁、电杆、古建筑等）。

（4）应用应力波技术进行行道树、森林林分质量评价。利用应力波传播参数

与立木物理力学性质的相关关系，对城市行道树、森林林分质量进行无损评价。

健康材应力波的传播速度是进行无损检测判断分析木材是否腐朽以及纵向传播速度的重要依据和参考，部分树种的应力波传播速度如表 1-2 所示（段新芳等，2002）。

表 1-2 应力波在不同树种健康材中的传播速度

树 种	密度/(g/cm ³)	纵向速度/(m/s)	径向速度/(m/s)
鱼鳞云杉 (<i>Picea jezoensis</i>)	0.406	5080	1210
早谷鱼鳞云杉 (<i>P. jezoensis</i> var. <i>hondonensis</i>)	0.391	5490	1360
库页冷杉 (<i>Abies sachalinensis</i>)	0.367	5320	1450
日本柳杉 (<i>Cryptomeria japonica</i>)	0.345	4330	1470
日本扁柏 (<i>Chamaecyparis obtusa</i>)	0.424	5120	1490
赤松 (<i>Pinus densiflora</i>)	0.465	4480	1470
圆齿水青冈 (<i>Fagus crenata</i>)	0.645	4010	1670
落叶松 (<i>Larix leptolepis</i>)	0.539	4070	1490
光叶榉 (<i>Zelkova serrata</i>)	0.589	3910	1140
冷杉 (<i>Abies pectinata</i>)			1360
日本七叶树 (<i>Aesculus turbinata</i>)	0.509	4040	
王桦 (<i>Betula maximowicziana</i>)	0.711	4830	
槭木 (<i>Acer</i> spp.)	0.590	4240	1690

四、应力波仪器的研制

应力波检测技术因具有方便、快捷的特点，已经在木材性质检测上进行应用，且随着计算机技术及传感器技术的飞速发展，应力波检测仪器也随之产生。应力波测定仪品牌很多，如德国 RINNTECH 公司生产的 Arbotom 和 Argus Electronic GmbH 公司生产的 PiCUS Sonic Tomograph，美国 IML 公司生产的 Electronic Hammer、Metriguard 公司生产 Metriguard Model 239A Stress Wave Timer、James Instruments 公司生产的 James “V” Meter，匈牙利 Fakopp 公司生产的 Fakopp 3D Acoustic Tomograph 和 Fakopp Microsecond Timer，新西兰 fibre-gen 公司生产的 Hitman 系列等产品。这些产品基本都是以测定应力波传播时间为原理的仪器。Electronic Hammer 和 Fakopp Microsecond Timer 可用于木材和树木的检测；而德国产的 PiCUS Sonic Tomograph 和 Arbotom 是具有多通道的应力波测定仪（如前者具有 13 个通道）。其中，PiCUS Sonic Tomograph 是一种用来评价树木腐朽的非入侵式检测工具。它的工作原理是：声波在带有腐朽

的木材中传播比在健康木材传播时间要长，通过围绕在树干上的一系列检测点发射信号到相应的点接受信号，计算出声波的相对速度，产生树木横截面的二维图像，可以通过图像的颜色判别树木内部是否存在腐朽。

Arbotom 是一种新的脉冲断层扫描，通过脉冲测量对树木或原木内部状态进行可视化，可以获得树木横切面内部的二维或三维图像，从图像中很容易发现木材内部健康与腐朽情况以及腐朽的程度大小，因而在古树名木的健康监测中应用广泛。

我国南京林业大学研制的应力波时间测定仪（胡勤龙，1996）对板材缺陷及定向纤维板的取向进行检测，发现应力波在腐朽材中的传播时间要远远大于健康材（孟瑞华等，2000）；东北林业大学研发的木材内部腐朽应力波无损检测仪，可以探测原木、立木的内部腐朽，并通过二维图像显示。

第二章 应力波在原木中传播理论

第一节 原木轴向的应力波传播理论

一、应力波概述

通过对国内外林业研究人员对应力波技术在木材性质检测的研究分析,应力波在原木中的传播理论还没有系统的研究,且也没有明确的说法。由于原木的性质比较复杂,而且又属于非均匀介质。同一原木的不同部位、不同方向的物理性质也不相同,应力波传播机理也不尽相同。用于活立木检测的应力波从属于弹性波的范畴,其传播规律满足波动方程。应力波是指当材料物质受撞击之后,一开始只有那些受到撞击作用的端面部分的介质质点离开了初始平衡位置。这部分质点与相邻的介质质点之间发生了相对运动(变形),将受到相邻介质质点的反作用力。相邻介质质点也离开了初始平衡位置而运动。由于介质质点具有惯性,相邻介质质点的运动将滞后于表面介质质点的运动。依此类推,外力作用所引起的扰动就这样在介质中逐渐由近及远传播出去而形成应力波。扰动区域与未扰动区域的界面称为波阵面,其传播速度称为波速。

本章介绍应力波在原木中的传播理论,将分为三个部分,即沿原木轴向、径向和弦向的应力波传播理论。对三个部分所对应的原木的三个方向的应力波理论推导过程中,都假设原木整体处于静止状态,不考虑其受到外界的阻力影响,只考虑在应力波传播路径上的微小单元的运动及其力学分析。

二、原木轴向的应力波传播理论

应力波在原木轴向传播过程中,假设:①原木轴向密度分布均匀,密度为常量;②微小单元运动过程中,木材中每个横截面始终保持平面,即截面上应力分布均匀,且在截面上的每一个点都朝 x 方向运动;③微小单元的变形属弹性变形,即应力与应变完全符合胡克定律;④微小单元沿横向变形忽略不计,即微小单元沿轴向收缩或伸长。设原木长为 L ,应力波在原木中的传播时间为 t ,沿轴向的各截面的应力、应变、位移和速度均是时间 t 和坐标 x 的函数,并且不同截面的应力、应变、位移和速度各不相同。如果将原木试件水平放置,则微小单元的力学分析如图 2-1 所示。

图 2-1 中, P_A 为 A 截面的受力,即 $P_A = \sigma S$; P_B 为 B 截面的受力,即 $P_B = (\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx) S$; f 为粘滞阻力,即 $f = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx$

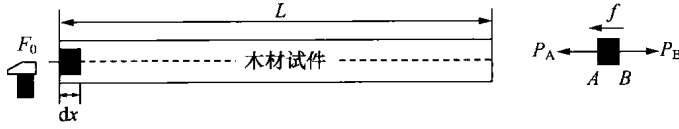


图 2-1 水平方向微小单元的力学分析

根据牛顿第二定律, 有

$$ma = P_B - P_A - f$$

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot S - \sigma \cdot S - \mu \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dx$$

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \cdot S - \mu \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dx$$

又 $\frac{\partial u}{\partial t} = v$

根据胡克定律, $\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\therefore \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx \cdot S - \mu \cdot v \cdot dx \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\mu \cdot v}{\rho \cdot S}$$

式中, ρ 为微小单元密度; S 为微小单元截面面积; E 为微小单元弹性模量; u 为微小单元位移; μ 为粘滞阻力系数; v 为微小单元运动速度。

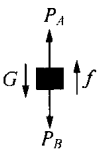


图 2-2 垂直方向微小单元的力学分析

令 $c^2 = \frac{E}{\rho}$, $b = \frac{\mu}{\rho S}$ 。则 $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 为应力波波速。波速只与木材的本身属性有关。

如果将原木试件垂直放置, 且垂直敲击, 则微小单元还受到其自身重力 G 的作用, 如图 2-2 所示。 $G = \rho \cdot S \cdot g \cdot dx$ 。

式 (2-1) 就变为

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx \cdot S + \rho \cdot S \cdot g \cdot dx - \mu \cdot v \cdot dx$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g - b \cdot v$$

由于原木试件在开始受到小锤的敲击, 设敲击力为 F_0 , 则微小单元运动的初始条件一为: $\sigma(x, 0) = F_0/S$ 。

在根据动量守恒定律, $mv(x, 0) = F_0 T_0$, 得微小单元运动的初始条件

二为

$$v(x, 0) = \frac{F_0 \cdot T_0}{m} = \frac{F_0 \cdot T_0}{\rho \cdot S} \quad (2-2)$$

式中, $v(x, 0)$ 为初始速度; T_0 为小锤与原木试件作用时间。从式 (2-2) 中可以看出 $v(x, 0)$ 为时间 T_0 的函数。

又由于原木试件的两端为自由端, 在原木两端的应变为 0, 则微小单元运动的边界条件为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

应力波在原木轴向的传播理论归结为求解下列问题的解。

(1) 水平方向:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \\ \sigma(x, 0) = \frac{F_0}{S}, v(x, 0) = \frac{F_0 \cdot T_0}{\rho \cdot S} \end{cases}$$

(2) 垂直方向:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g - b \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \\ \sigma(x, 0) = \frac{F_0}{S}, v(x, 0) = \frac{F_0 \cdot T_0}{\rho \cdot S} \end{cases}$$

(一) 垂直方向应力波传播理论

将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g - b \frac{\partial u}{\partial t}$ 两边都除以 c^2 , 得

$$\frac{\partial^2 u}{c^2 \cdot \partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} g - \frac{b}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2-3)$$

从式 (2-3) 中可以看出, g 比 c^2 小得多, 因此该项可以忽略不计。从而垂直方向的应力波传播理论问题的解与水平方向的应力波传播理论一致。

(二) 水平方向应力波传播理论

1. 简单情况

如果不考虑粘滞阻力的情况, 则水平方向应力波传播理论的求解问题变成

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \\ \sigma(x, 0) = \frac{F_0}{S}, v(x, 0) = \frac{F_0 \cdot T_0}{\rho \cdot S} \end{cases} \quad (2-4)$$

根据式 (2-4), 可令其变量分离形式为

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (2-5)$$

式 (2-5) 中, $X(x)$ 仅为 x 的函数, $T(t)$ 仅为 t 的函数。

因此, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

这样, 方程 (2-4) 可变为

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

即

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} \quad (2-6)$$

由于式 (2-6) 的左边是仅与 x 有关的函数, 右边是仅与 t 有关的函数。只有当它们等于一常数时, 式 (2-6) 左边和右边才能相等。令其待定常数为 $-\lambda^2$ 。则式 (2-6) 可得到两个微分方程, 即

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0 \end{aligned}$$

对于微分方程 $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$, 其通解为

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (2-7)$$

对式 (2-5) 两边求偏导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

根据边界条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$, 得 $X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0$

由于变量分离的公式, $T(t) \neq 0$, 如果 $T(t) = 0$, 则 $u(x, t) = 0$, 不符合原问题的解。所以有: $X'(0) = X'(L) = 0$ 。

对式 (2-7) 两边求偏导, 得 $X'(x) = -A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x$ 。

根据 $X'(0) = 0$, 则可得 $B\lambda = 0$ 。 λ 恒不为 0。若 $\lambda = 0$, 则微分方程 $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ 的通解是: $X(x) = Ax + B$ 。根据边界条件, 则可得 $A = B = 0$, 即 $X(x) = 0$, 不符合原问题的解。因此 λ 恒不为 0, 所以 $B = 0$ 。

根据 $X'(L) = 0$, 得 $-A\lambda \sin \lambda L = 0$ 。其中 $A \neq 0$, 如果 $A = 0$, 则 $X(x) = 0$, 不符合原问题的解。所以, 有

$$\sin \lambda L = 0 \quad \therefore \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

这样, 可得到一系列 λ 值和相应的 $X(x)$ (其中, $n=1, 2, 3, \dots$ 。以下同), 即

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

又 $T_n''(t) + \lambda_n^2 c^2 T_n(t) = 0$, 即 $T_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c^2 T_n(t) = 0$, 其通解为

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t + D_n \sin \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t$$

$$\therefore u_n(x, t) = \left(C_n \cos \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t + D_n \sin \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t \right) \cdot A_n \cos \frac{n \cdot \pi}{L} x$$

令 $A_n C_n = C_n$, $A_n D_n = D_n$ 。则

$$u_n(x, t) = \left(C_n \cos \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t + D_n \sin \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t \right) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi}{L} x$$

根据叠加原理, 得微小单元的位移方程, 即

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t + D_n \sin \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t \right) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi}{L} x$$

因为 $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, 所以得速度方程, 即

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} \cos \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t - C_n \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} \sin \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t \right) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi}{L} x$$

因为 $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$, 所以得应变方程, 即

$$\epsilon(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t + D_n \sin \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t \right) \cdot \left(-\frac{n \cdot \pi}{L} \sin \frac{n \cdot \pi}{L} x \right)$$

又 $\sigma = E \cdot \epsilon$, 得应力方程为

$$\sigma(x, t) = E \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t + D_n \sin \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} t \right) \cdot \left(-\frac{n \cdot \pi}{L} \sin \frac{n \cdot \pi}{L} x \right)$$

将初始条件— $\sigma(x, 0) = \frac{F_0}{S}$ 代入应力方程中, 得

$$E \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \left(-\frac{n \cdot \pi}{L} \sin \frac{n \cdot \pi}{L} x \right) = \frac{F_0}{S}$$

进一步推导得

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \left(-\frac{n \cdot \pi}{L} \sin \frac{n \cdot \pi}{L} x \right) = \frac{F_0}{S \cdot E}$$

根据傅里叶级数原理, 可得

$$C_n \cdot \left(-\frac{n \cdot \pi}{L} \right) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{F_0}{S \cdot E} \sin \frac{n \cdot \pi}{L} x dx$$