

大学生数学竞赛试题 解析选编

李心灿 季文铎 孙洪祥 编
邵鸿飞 吴纪桃 张后扬



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



大学生数学竞赛试题 解析选编

李心灿 季文铎 孙洪祥 编
邵鸿飞 吴纪桃 张后扬



机械工业出版社

编写此书,是希望为我国的大学生和数学爱好者提供一本提高数学素质(特别是分析问题和解题能力)的有益读物,同时也为高校数学教育提供一本很有特色的教学参考书。

本书共有三篇:第一篇,汇集了北京市大学生数学竞赛第一届至第二十一届的全部试题,并给出了解题思路及较详细的参考解答;第二篇,选编了我国部分省市和高校的大学生竞赛的试题,对其中大部分给出了较详细的参考解答、答案或提示,有的给出了解题思路;第三篇,编入了第一、第二届全国大学生数学竞赛及国外一些大学生数学竞赛的试题,并给出了解题思路及较详细的参考解答。

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛试题解析选编/李心灿等编. —北京:机械工业出版社, 2011.3 (2011.7重印)

ISBN 978-7-111-33068-4

I. ①大… II. ①李… III. ①高等数学—高等学校—解题
IV. ①O13—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第006188号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑:郑 玫 责任编辑:郑 玫 版式设计:张世琴
责任校对:李秋荣 封面设计:张 静 责任印制:乔 宇
北京机工印刷厂印刷(北京振兴源印务有限公司装订)

2011年7月第1版第2次印刷

169mm×239mm·35.75印张·2插页·691千字

标准书号:ISBN 978-7-111-33068-4

定价:58.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

希望有更多青年
热爱数学认真学好数
学认真用好数学

己卯冬 王元





前排自右向左（从第二人开始）：季文铎教授，殷尉萍教授，王万良教授，刘春生处长，李忠教授，王元院士，李心灿教授，郭柏灵院士，卢才辉教授，刘来福教授。



主席台上自右向左：刘来福教授，郭柏灵院士，刘春生处长，李心灿教授，王元院士，李忠教授，王万良教授，卢才辉教授，季文铎教授，孙洪祥教授。



林群院士和北京有关高校的教授给数学竞赛获奖的学生颁奖时的合影
 第一排是获奖的部分学生；第二排自右向左：陈一宏教授，邱宏教授，王长平教授，林群院士，张欣欣教授，冯克勤教授，李心灿教授，孙洪祥教授，高宗升教授，孙华飞教授。



姜伯驹院士和北京有关高校的教授及北京市教委、北京市科协有关领导与数学竞赛获奖的部分学生的合影。第一排自右向左：邹建成教授，郭锡伯教授，高宗升教授，孙洪祥教授，许晓革教授，李心灿教授，姜伯驹院士，罗学科教授，王长平教授，田洪滨处长（北京市教委高教处副处长），徐新（北京市科协学会副部长），冯荣权教授，程曹宗教授，王建稳教授。

序

姜伯驹 叶其孝

数学科学（简称数学）是研究现实世界中空间形式和数量关系的一门科学，它也是关于模式和秩序的科学。数学为人们提供了科学的语言。数学的思考方式具有根本的重要性，因为数学为组织和构造知识提供方法，以至当用于技术时就能使科学家和工程师产生系统的、能复制并且是可以传播的知识，从而有可能转化成生产力，创造巨大的经济和社会效益，因此，数学始终是科学、技术、工程、经济、管理和决策科学的基础。半个世纪以来，科学技术特别是计算机及相应软件技术的发展，促进了数学科学的突飞猛进、充满生机的发展。60年前，数学虽然也直接为工程提供一些工具，但基本方式是间接的：先促进其他科学的发展，再由这些科学提供工程原理和设计基础。现在不同了。数学和工程、技术、经济、管理之间，在更广阔的范围内和更深刻的程度上，直接地相互作用着。数学科学进一步渗透到一切领域，特别是，数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具，这些领域中的科技进展与数学的结合和融合，产生了大量的专业应用软件，形成了一种强有力的数学技术，在这样的意义下确实可以说：“高技术本质上是一种数学技术”。因而，数学教育不仅是培养现代科技人才的最重要的素质教育之一，也是人才培养竞争的关键之一。高等数学、线性代数、概率统计一直是高等学校最重要的基础课。在学好这些课程的基础上怎样进一步提高学生，特别是提高优秀学生的数学技能和素质，是一项十分迫切、亟待解决的任务。开展数学竞赛就是一种行之有效的方法。

自1988年以来，北京数学会大学委员会和北京高校数学研究会连续组织了21届大学生数学竞赛并取得极大的成绩，就是上述说法的一个明证。竞赛的组织者和广大教师不仅积累了丰富的经验，为培养优秀人才作出了重要贡献，也为大学数学教育改革作出了贡献。总结并传播他们的经验是一项很有意义的工作。本书不仅总结了北京历届的赛题和参考解答，也包括了一些外省市的赛题和参考解答，还编入了第一、第二届全国大学生数学竞赛试题及参考解答，并选编了国外的大学生数学竞赛的有关赛题并给出了参考解答，内容相当丰富，是一本很有特色的教学参考书。

我们相信本书一定会受到广大教师和学生的欢迎。

编者的话

本书共有三篇：第一篇，汇集了北京市大学生数学竞赛第一届至第二十一届的全部试题，并给出了解题思路及较详细的参考解答；第二篇，选编了我国部分省市及高校的大学生数学竞赛的试题，对其中大部分给出了较详细的参考解答、答案或提示，有的给出了解题思路。只有上海市、同济大学、重庆大学、西安交通大学的四份试题未给出解答，我们特意留给读者去试作；第三篇，编入了第一、第二届全国大学生数学竞赛试题及参考解答并选编了国外一些大学生数学竞赛的试题，并给出了解题思路及较详细的参考解答。其中有不少试题是很有品味的好试题。

当代数学大师陈省身教授曾说：“我的功夫得力于中学时学霍尔(Hall)的代数时做难题的底子。”

被誉为“线性规划之父”的美国著名数学家丹齐格(G. B. Dantzig)说：“解题是脑力的锻炼。”他还说：“在高中时，我的父亲（是一数学家）就给我出了几千道几何题，…是父亲送给我最珍贵的礼物。解这几千道题对于发展我的分析能力胜过其他一切。”

著名数学家、教育家波利亚(Polya)认为：“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋。因此，解题可以认为是人的最富有特征性的活动。解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样，你只能够靠模仿和实践才能学到它。假如你要想从解题中得到最大的收获，你就应当在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他的问题时，能起到指引作用。一种解题的方法，它若是经过你自己的努力得到的，或者是从别人那里学来或听来的，只要经过了你自己的体验，那么它对你来讲就可以成为一种楷模，当你在碰见别的类似的问题时，它就是可供你仿照的模型。”

我们编写此书，是希望为我国的大学生和数学爱好者提供一本提高数学素质（特别是分析问题和解题能力）的有益读物，同时也为高校数学教育提供一本很有特色的教学参考书，其中有些好的试题可以

在教学过程中，特别是在上习题课时鼓励学生去做，有些好的试题还可以编入教材。

我们在编写过程中，得到了许多高校数学教师及有关方面的热忱关心和支持，他们是：北京理工大学杨德保教授，清华大学胡金德教授，北京航空航天大学徐兵教授，北京科技大学高瑞教授、郑连存教授和陈北斗教授，北京交通大学[⊙]龚曼奇教授，北京化工大学黄金坤教授，北京邮电大学杨源淑教授、王玉孝教授，北京工业大学王中良教授，北京建筑工程学院王崇寿教授、马龙友教授，北京工商大学[⊙]章栋恩教授，北方工业大学邹建成教授、张杰教授、唐旭辉教授，北京信息工程学院吴昌恂教授、苏农教授，北京防化学院[⊙]孙建建教授，中国矿业大学张晓宁教授，中央财经大学陈文灯教授、刘丽敏老师，中央民族大学罗小伟教授、邢富冲教授，浙江大学蔡燧林教授、金蒙伟教授，哈尔滨工业大学富景隆教授，西安交通大学龚冬保教授、梅长林教授，上海交通大学景继良教授，同济大学郭镜明教授，东南大学陈建龙教授，天津大学边馥萍教授，四川大学王宝富教授、刘莹老师，电子科技大学傅英定教授，西南交通大学叶建军教授、高隆昌教授，汕头大学钱昌本教授，重庆大学赵中时教授等热情地寄来了他们学校或他们所在省市数学竞赛的试题和有关资料；特别是全国大学生数学竞赛委员会，同意我们将第一、第二届全国大学生数学竞赛的试题及参考解答编入此书；机械工业出版社为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动。在此，我们一并致以诚挚的谢意。

我们感谢中国数学会前理事长、中国科学院数学研究所前所长王元院士挥毫为本书题词，感谢北京数学会前理事长姜伯驹院士、前副理事长叶其孝教授为本书作序，他们的题词和作序表达了数学家对青年人学好数学的殷切期望。

由于我们的水平所限，在编写中如果有不当或错误之处，恳请读者批评指正。

⊙ 原北方交通大学。

⊙ 原北京轻工业学院。

⊙ 原解放军防化学院。

目 录

序

编者的话

第一篇 北京市大学生第一届至第二十一届数学竞赛试题及解析 ... 1

第一届北京市大学生 (非理科) 数学竞赛试题及解析	3
第二届北京市大学生 (非理科) 数学竞赛试题及解析	11
第三届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛试题及解析	27
第四届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛试题及解析	37
第五届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	46
第五届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛大专组试题及解析	56
第六届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	64
第六届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛大专组试题及解析	70
第七届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	78
第七届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛大专组试题及解析	88
第八届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	95
第八届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛大专组试题及解析	109
第九届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	118
第九届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛大专组试题及解析	128
第十届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	135
第十届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛大专组试题及解析	143
第十一届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	149
第十一届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛大专组试题及解析	156
第十二届北京市大学生 (非数学专业) 数学竞赛本科甲、乙组试题及	

解析	161
第十二届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛大专组试题及解析	171
第十三届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	176
第十三届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛本科丙组试题及解析	183
第十三届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛大专组试题及解析	188
第十四届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	195
第十四届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛本科丙组试题及解析	204
第十四届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛大专组试题及解析	209
第十五届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛本科甲、乙组试题及 解析	215
第十五届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛本科丙组试题及解析	222
第十六届北京市大学生数学竞赛本科甲、乙组试题及解析	227
第十六届北京市大学生数学竞赛本科丙组试题及解析	234
第十七届北京市大学生数学竞赛本科甲、乙组试题及解析	240
第十七届北京市大学生数学竞赛本科丙组试题及解析	246
第十八届北京市大学生数学竞赛本科甲、乙组试题及解析	252
第十八届北京市大学生数学竞赛本科丙组试题及解析	260
第十九届北京市大学生数学竞赛本科甲、乙组试题及解析	265
第十九届北京市大学生数学竞赛本科丙组试题及解析	273
第二十届北京市大学生数学竞赛本科丙组试题及解析	278
第二十一届北京市大学生数学竞赛本科丙组试题及参考解答	283
第二篇 我国部分省市和高校的大学生数学竞赛试题及部分 试题解析	289
广东省 1991 年大学生高等数学竞赛试题及解析	291
上海市 1991 年大学生高等数学竞赛本科组试题	298
上海市 1991 年大学生高等数学竞赛专科组试题	300
陕西省 1999 年大学生高等数学竞赛试题及参考解答	302
陕西省 2009 年大学生高等数学竞赛初赛试题及参考解答	310
天津市 2003 年大学生数学竞赛试题及参考解答	316
天津市 2008 年大学生数学竞赛试题及参考解答	324
江苏省 2004 年高等数学(本科一级)竞赛试题及参考解答	332
江苏省 2004 年高等数学(专科)竞赛试题及参考解答	338

Ⅷ 大学生数学竞赛试题解析选编

江苏省 2008 年高等数学 (本科一级) 竞赛试题及参考解答	342
浙江省 2005 年大学生 (数学类专业) 高等数学 (微积分) 竞赛试题及 参考解答	347
浙江省 2005 年大学生 (工科类专业) 高等数学竞赛试题及参考解答	351
浙江省 2005 年大学生 (经管类专业) 高等数学竞赛试题及参考解答	354
浙江省 2005 年大学生 (文科类专业与专科类) 高等数学竞赛试题及 参考解答	357
浙江省 2007 年大学生 (数学类专业) 高等数学 (微积分) 竞赛试题及 参考解答	359
浙江省 2007 年大学生 (工科类专业) 高等数学竞赛试题及参考解答	363
浙江省 2007 年大学生 (经管类专业) 高等数学竞赛试题及参考解答	365
浙江省 2007 年大学生 (文科类专业与专科类) 高等数学竞赛试题及 参考解答	367
四川省 2010 年大学生 (数学类专业) 数学竞赛试题及参考解答	370
四川省 2010 年大学生 (非数学专业) 数学竞赛试题及参考解答	376
浙江大学 1982 年数学竞赛试题及参考答案或提示	382
清华大学 1985 年数学竞赛试题及参考解答	385
哈尔滨工业大学第二届高等数学竞赛试题及参考解答	391
华东工学院 1988 级高等数学竞赛试题及提示与答案	397
北京建筑工程学院 1988 年数学竞赛试题及参考解答	400
重庆大学 1989 级高等数学竞赛试题	408
西安交通大学 1989 年高等数学竞赛试题	410
北京理工大学 1990 级高等数学竞赛试题及提示与解答	412
上海交通大学 1991 年高等数学竞赛试题及参考解答	415
北京化工大学 1991 年数学竞赛试题及参考解答	422
北京轻工业学院 1992 年高等数学竞赛试题及参考解答	427
解放军防化学院 1992 年高等数学竞赛试题及参考解答	431
北京工业大学 1994 年数学竞赛试题及参考解答	437
北方交通大学 1994 年高等数学竞赛试题及答案或提示	443
天津大学 1995 级高等数学竞赛试题及参考解答	446
同济大学 1996 年高等数学竞赛试题	453
北京邮电大学 1996 年高等数学竞赛试题及参考解答	454
北京科技大学 1997 年高等数学竞赛试题及参考解答	459
北京信息工程学院 1998 年高等数学竞赛试题及参考解答	462
北京航空航天大学 1999 年高等数学竞赛试题及参考解答	467

中央民族大学 2008 年高等数学竞赛甲、乙组试题及参考解答	471
北方工业大学 2009 年高等数学竞赛试题及参考解答	476
中国矿业大学 (北京) 2009 年高等数学竞赛试题及参考解答	480
中央财经大学 2010 年数学竞赛 (经济类专业) 试题及参考解答	487
西南交通大学 2010 年数学竞赛 (工科类专业) 试题及参考解答	490
第三篇 第一、第二届全国大学生数学竞赛及国外一些 大学生数学竞赛的试题解析	495
第一届全国大学生 (非数学类专业) 数学竞赛赛区赛 (初赛) 试题 及参考解答 (2009 年)	497
第一届全国大学生 (数学类专业) 数学竞赛赛区赛 (初赛) 试题及 参考解答 (2009 年)	501
第一届全国大学生 (非数学类专业) 数学竞赛决赛试题及参考解答 (2010 年)	505
第一届全国大学生 (数学类专业) 数学竞赛决赛试题及参考解答 (2010 年)	511
第二届全国大学生 (非数学类专业) 数学竞赛预赛试题及参考解答 (2010 年)	517
第二届全国大学生 (数学类专业) 数学竞赛预赛试题及参考解答 (2010 年)	523
1975 年全苏 (前苏联) 数学竞赛试题及解析	529
前苏联部分其他年份试题及解析	537
部分美国高等数学竞赛试题及解析	550

**第一篇 北京市大学生
第一届至第二十一届数学竞赛
试题及解析**

第一届北京市大学生(非理科) 数学竞赛试题及解析

(1988年9月18日上午9:00~11:30)

一、求由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的体积 V 和表面积 S 。

分析 先确定此两曲面围成的空间几何体形状, 然后可考虑该几何体的边界曲面在 xOy 平面上的投影域, 分别化为二重积分计算。

$$\text{解 } \begin{cases} z=x^2+y^2 & \Rightarrow z=2-\sqrt{z} \\ z=2-\sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow z^2-5z+4=0 \end{cases}$$

解得 $z_1=1, z_2=4$ (舍去), 所以投影区域为 $D: x^2+y^2 \leq 1$ 。

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [2 - \sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-r-r^2)r dr \\ &= \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

因为 $S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$, 所以

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy + \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D [\sqrt{1+4(x^2+y^2)} + \sqrt{2}] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{1+4r^2} + \sqrt{2})r dr \\ &= \left[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1) + \sqrt{2} \right] \pi. \end{aligned}$$

二、解微分方程 $y(y+1)dx + [x(y+1) + x^2y^2]dy = 0$ 。

分析 此非全微分方程, 适当分项组合, 选择合适的积分因子再凑微分可得通解。

解 方程变为 $y(y+1)dx + x(y+1)dy + x^2y^2dy = 0$, 两边除以 $(y+1)x^2y^2$ 得 $\frac{ydx + xdy}{x^2y^2} + \frac{dy}{y+1} = 0$, 即

$$d\left(-\frac{1}{xy}\right) + d \ln|y+1| = 0,$$

解出
$$-\frac{1}{xy} + \ln |y+1| = C_1,$$

$$\ln |y+1| = C_1 + \frac{1}{xy}.$$

即
$$|y+1| = e^{C_1} e^{\frac{1}{xy}}.$$

可得微分方程通解: $y+1 = Ce^{\frac{1}{xy}}$ (任意常数 $C = e^{C_1} > 0$).

三、设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, \dots$.

求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

分析 因为数列 x_n 不具单调性, 所以 x_n 极限的存在性可考虑用定义证, 同时以先求值后证 x_n 极限的存在性为简便.

解 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ (存在).

对于 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, 两边令 $n \rightarrow \infty$, 取极限.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 2 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n},$$

即有
$$A = 2 + \frac{1}{A} \Rightarrow A^2 - 2A - 1 = 0.$$

解得
$$A = 1 \pm \sqrt{2},$$

因为 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} > 2$, 所以取 $A = 1 + \sqrt{2}$.

以下证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

对任意 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |x_n - A| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{A}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{A} \right| \\ &= \frac{|A - x_{n-1}|}{x_{n-1}A} = \frac{|x_{n-1} - A|}{x_{n-1}A} < \frac{|x_{n-1} - A|}{4} \\ &\quad \left(\text{因为 } x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2, \text{ 所以 } A = 2 + \frac{1}{A} > 2. \right) \\ &< \frac{|x_{n-2} - A|}{4} = \frac{|x_{n-2} - A|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - A|}{4^2} \\ &= \frac{|x_{n-3} - A|}{4^3} < \dots < \frac{|x_1 - A|}{4^{n-1}} \\ &= \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} \\ &< \epsilon \text{ (当 } n \text{ 足够大时)}. \end{aligned}$$