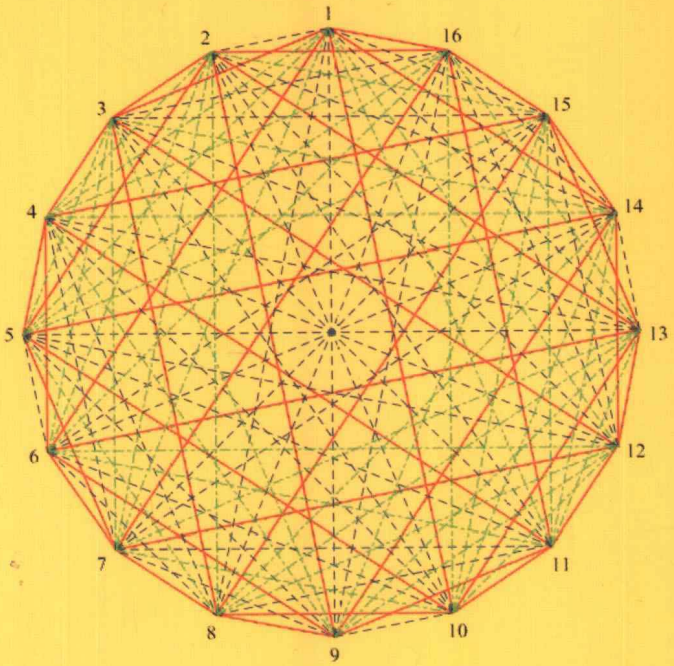
组合数学

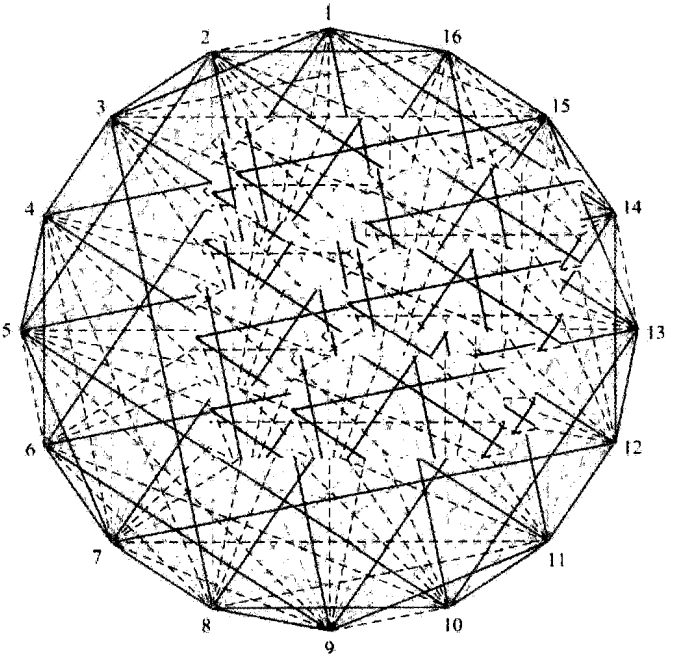
周 炜 著



清华大学出版社

组合数学

周 炜 著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者多年教学和研究成果的结晶，系统地研究了组合计数、组合设计以及相关数学理论。全书分为10章：集合与函数，排列组合与多项式定理，整除性理论，数论函数，不定方程，同余式，线性递归方程与母函数，鸽巢原理和Ramsey(拉姆齐)定理，Burnside(伯恩赛德)引理和Pólya(波利亚)定理，相异代表组和区组设计。

本书可以作为计算机科学与技术、数学、密码学和其他相关专业研究生和本科生的教材使用，也可作为广大师生和工程技术人员的自学用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/周炜著. —北京：清华大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-302-26126-1

Ⅰ. ①组…　Ⅱ. ①周…　Ⅲ. ①组合数学　Ⅳ. ①O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第134824号

责任编辑：陈　明
责任校对：王淑云
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：11.5　**字　数**：248千字
版　　次：2011年9月第1版　　**印　　次**：2011年9月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：21.00元

产品编号：039633-01

前言

FOREWORD

传说公元前23世纪大禹治水的时候，洛水中出现了一个神龟，龟背上有9组花点图案，排成了一个正方形。人们惊奇地发现，这9组花点图案正好代表了1～9这9个数字，纵、横各3行及两对角线上数字之和都为15。这便是现在人们熟悉的3×3幻方。幻方是组合数学中研究的有趣问题之一。1977年美国旅行者1号、2号宇宙飞船进入太空时就带上了幻方作为人类智慧的信号。

1666年，Leibniz(莱布尼茨)发表了一篇题为《论组合的艺术》的数理逻辑论文。这篇闪耀着创新智慧和数学天才的论文是他的第一篇数学论文，其主要思想是将理论的真理性论证归结为一种数学计算的结果。在论文中，Leibniz曾预言组合数学将会渗透到许多学科并得到很大发展。如今，计算机科学、计算数学、统计学、运筹学等学科尤其是计算机网络的迅速发展从根本上改变着人们的生活方式、生产方式和科学研究方法，同时也使组合数学的思想、方法和理论像Leibniz所预言的那样渗透到了人们的日常生活、社会经济、交通运输、金融分析、行政管理、信息对抗、军事指挥、科学研究和技术开发的各个角落。组合数学成为近若干年来最活跃的数学分支之一，也成为计算机科学不可分割的重要组成部分。随着各个行业的技术进步，组合数学方法推动着计算机科学日新月异地向前发展，也成为培养学生智慧和解决实际问题能力的有力工具。

我国最早的组合数学理论可追溯到宋代的“贾宪三角形”。贾宪三角形后来被杨辉引用，所以现在人们普遍称其为“杨辉三角形”。在西方，直到1654年才由Pascal(帕斯卡)提出了我们所说的杨辉三角形，比我国晚了400多年。

1962年我国数学家管梅谷教授提出了著名的“中国邮递员问题”。1976年6月，美国数学家Appel(阿佩尔)与Haken(哈肯)用了1200小时在3台不同的电子计算机上证明了四色定理。这些都是现代组合数学历史上的大事。我国数学家吴文俊教授从1976年开始研究几何定理的机器证明，并开创了吴方法。周咸青教授发展了吴方法，编制出计算机软件，证明了500多条几何定理，并在美国出版了几何定理机器证明方面的专著。

组合数学是计算机软件业的基础。广义的组合数学就是人们常说的离散数学。狭义的组合数学又叫组合学、组合论、组合分析。组合数学研究的对象是按照一定的规则来安排一

些离散事物的有关数学问题。这些数学问题包括存在性问题、计数问题、枚举问题(构造问题)和优化问题。换句话说,对离散对象的满足一定条件的安排方案是否存在?如果存在,这样的方案有多少?怎样构造出所需要的安排方案?怎样从所有的安排方案中找出最优方案?

本书主要研究存在性问题、计数问题、枚举问题和与之有互相支撑作用的数论和集合论知识。目前各种教科书所介绍的组合优化问题主要是线性规划、动态规划、网络流和图论问题,这些问题同时也是运筹学研究的主要问题,因此本书没有写入组合优化这部分内容。考虑到计算机专业的研究生和本科生可能涉足信息安全领域的研究、开发和教学工作,本书写入了与信息安全有关且与组合数学互相有一定支撑作用的数论和集合论知识。

本书内容具体安排分为 10 章:集合与函数,排列组合与多项式定理,整除性理论,数论函数,不定方程,同余式,线性递归方程与母函数,鸽巢原理和 Ramsey(拉姆齐)定理,Burnside(伯恩赛德)引理和 Pólya(波利亚)定理,相异代表组和区组设计。每章又分为若干节和小节。这些章节,有些内容比较浅显,便于掌握;有些内容理论性较强(比如 Pólya 基本定理的证明),工科学生阅读起来有一定的困难,可以暂时绕过。每章后面配有一定数量难度不一的习题,可供选做。

本书内容根据作者多年的教学经验和研究成果整理而成,对理论知识的表述和处理均以集合与函数为基础,与现有的组合数学著作和教科书有很大的不同。比如对置换的循环分解理论的处理、对排列组合问题的处理、对线性递归方程的处理、对鸽巢原理和 Ramsey 定理的处理、对无向完全图着色问题的处理、对 Burnside 引理和 Pólya 定理的处理、对群和有限域的处理、对正交 Latin(拉丁)方和 Hadamard(阿达马)矩阵的处理等。这些不同之处请读者自己细心体会。

本书可以作为计算机科学与技术、数学、密码学及相关专业研究生和本科生的教材,也可作为其他各专业、不同层次师生和工程技术人员的自学用书或参考书,标 * 号的内容供选学。若作为教材,学时安排建议为:研究生 40～50 学时,本科生 50～60 学时。

本书大部分内容已在空军工程大学导弹学院计算机科学与技术专业研究生中讲授多年。但由于作者水平有限,书中一定还有未发现的错误、缺点和纰漏,恳请广大读者批评指正,作者不胜感激!

作者

2010 年 10 月

目录

CONTENTS

第1章 集合与函数

集合是现代数学最基本的概念之一。人们很难给出它的精确定义，平常只对它进行描述。集合论的创始人是康托(Cantor，1845—1918)。函数和映射也是数学的最基本概念，本书对函数和映射的概念不加区别。

本章将详细介绍集合的基本概念和运算、函数和映射的一般性质、对合映射的不动点定理、置换的循环分解、集合上的偏序关系和等价关系等特殊二元关系，最后介绍容斥原理和Abel(阿贝尔)恒等式。

1.1 集合论基础

1.1.1 集合的基本概念

简单地说，集合是具有某种共同性质的一类事物(对象)的全体。集合 A 中的每一个对象 a 称为该集合的一个元素，记作 $a\in A$(读作“a 属于 A”或“a 在 A 中”或“A 含有 a”)。如果一个对象 x 不是集合 A 的元素，则记作 $x\notin A$(读作“x 不属于 A”或“x 不在 A 中”或“A 不含 x”)。

集合中的元素既无重复也无顺序。一个集合不能是它自己的元素。以集合为元素的集合称为类或族。今后，我们可能也将“集合”和“族”当作量词使用。

集合常常用大写的英文字母表示，集合的元素常常用小写的英文字母表示。如果一个集合中只有少数有限个元素，可将表示这些元素的符号全部罗列在一对花括号中，元素之间用逗号隔开，如 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1\}$。如果一个集合中有很多元素或无限多元素但通过少数元素可以毫无歧义地推知其他元素，则将这些少数元素罗列在一对花括号中，而多数元素用英文的省略号表示，如 $B=\{1,3,5,\cdots,2009\}$ 表示不超过 2009 的所有奇数，而所有奇平方数可用集合 $C=\{1^2,3^2,\cdots,(2n-1)^2,\cdots\}$ 表示等。如果一个集合中元素的共同特性是可以精确描述的，则该集合在花括号中的表示可分两部分，两部分之间用一条竖线隔开，竖线

前面是对该集合元素的一般形式的描述，竖线后面是对该集合所有元素共同特性的精确描述，如 $D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge \neg(0\leqslant x<1 \vee \sin x=0)\}$。这里 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 三个符号分别表示逻辑词“非”(否定)、“与”(并且、但是)、“或”(或者)，今后我们可能还会用到四个符号：$\rightarrow$(逻辑词“蕴涵”)，$\forall$(逻辑词“对于所有的”、“对于任意的”、“对于每一个”)，$\exists$(逻辑词“存在”、“至少有一个”)，$\Rightarrow$(逻辑词“永真蕴涵”、“经过正确的逻辑推理推得”)。

如果集合 A 的所有元素都在集合 B 中，则称集合 A 是集合 B 的一个子集合(子集)，记作 $A\subseteq B$(读作“A 含于 B”)或 $B\supseteq A$(读作“B 包含 A”)。反之，集合 A 不是集合 B 的子集当且仅当集合 A 中至少有一个元素不在集合 B 中。显然，任何一个集合 A 都是它自己的子集，即 $A\subseteq A$。

如果 $A\subseteq B$，而集合 B 至少有一个元素 b 不在集合 A 中，则称集合 A 是集合 B 的一个真子集，记作 $A\subset B$(读作“A 真含于 B”)或 $B\supset A$(读作“B 真包含 A”)。

如果 $A\subseteq B$ 和 $B\supseteq A$ 同时成立，则称这两个集合相等，记作 $A=B$。这也是今后常用的证明两个集合相等的方法。

下面引入空集的概念，空集中没有任何元素，记作 $\varnothing$。空集是一个特殊集合，对于任何集合或集合族 A，必须有 $\varnothing\subseteq A$。否则按照 $\subseteq$ 的定义，至少有一个 $x\in\varnothing$ 不在 A 中，与空集的定义矛盾。注意 $\{\varnothing\}$ 是由单个空集 $\varnothing$ 组成的集合族，而不是空集 $\varnothing$ 本身，因为它有一个元素 $\varnothing$。还应当注意不要将空集 $\varnothing$ 写为希腊字母 ϕ 或 Φ。

若集合 $A\neq\varnothing$，即集合 A 中至少有一个元素，则称集合 A 非空。

习惯上，将全体实数的集合记作 $\mathbb{R}$，全体有理数(能够表示为两个整数之商的实数称为有理数，即全体整数和分数)的集合记作 $\mathbb{Q}$，全体整数的集合记作 $\mathbb{Z}$，全体非负整数的集合记作 $\mathbb{N}$(注意 $0\in\mathbb{N}$)。鉴于有的教科书将 0 视为自然数，而有的教科书不然，本书不采用“自然数”这个概念以避免歧义。当我们给字母 $\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{Z}$ 加上 $+$ 或 $*$ 作为上标时，分别表示全体“正”的或者全体“非零”的实数、有理数、整数的集合。对于任意的 $m\in\mathbb{Z}^+$，我们还将使用记号 $Z_m=\{0,1,\cdots,m-1\}$。

1.1.2 集合的代数运算及性质

1. 集合的并、交运算

设 I 是一个指标集，一族集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的并、交运算分别定义如下：

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x \mid \exists\alpha(\alpha\in I\wedge x\in A_\alpha)\},\quad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x \mid \forall\alpha(\alpha\in I\rightarrow x\in A_\alpha)\}。$$

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族集合。如果对于任意的 $\alpha,\beta\in I$，当 $\alpha\neq\beta$ 时，都有 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$，则称这族集合是互不相交的或两两不相交的。

2. 集合的差运算与补运算

二集合的差运算定义为 $A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$。显然 $A-B=A-(A\cap B)$。

对于非空集合 U，定义它的子集 X 的补运算(余运算)为 $\overline{X}^{(U)}=U-X$。

3. 集合的异或运算

二集合的异或运算定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)。$$

集合的异或运算又称为对称差。

4. 集合的笛卡儿积

一个集合的笛卡儿乘积定义为这个集合本身。

$n(n \geqslant 2)$个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿积定义为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid \forall k(a_k \in A_k)\}。$$

5. 集合的幂集

集合 U 的所有子集构成的集合族 $2^U = \{A \mid A \subseteq U\}$ 称为 U 的幂集。当 U 是有限集合时，其子集个数为 $|2^U| = 2^{|U|}$，其中 $|U|$ 表示 U 的元素个数。

例 1.1 集合 $X = \{1, 2, 3\}$ 的幂集是 $2^X = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$。

1.1.3 集合的运算性质

设 U 是非空集合，A, B, C 都是 U 的子集，$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 U 的一族子集。集合的并、交、补运算具有下列性质：

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$。

分配律 $A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha), A \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$。

同一律 $A \cup \varnothing = A, A \cap U = A$。

补余律 $A \cup A^{(U)} = U$（**排中律**），$A \cap \bar{A}^{(U)} = \varnothing$（**矛盾律**）。

基元律 $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing$。

幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$。

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$。

交叠律 $A \cup (\bar{A}^{(U)} \cap B) = A \cup B, A \cap (\bar{A}^{(U)} \cup B) = A \cap B$。

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

对偶律 $\overline{(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)}^{(U)} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \overline{(A_\alpha)}^{(U)}, \overline{(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)}^{(U)} = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \overline{(A_\alpha)}^{(U)}$。

双重否定律 $\overline{(\bar{A}^{(U)})}^{(U)} = A$。

上述性质中，交换律、分配律、同一律、补余律是最根本的性质，其余的性质都可以由这4条性质推出。对偶律又叫德摩根(De Morgan)律。

1.2 函数、置换的循环分解

本节将介绍有关函数和映射的基本概念和一般性质，并讨论置换的循环分解。

1.2.1 函数的基本概念和一般性质

定义 1.1 设 X,Y 是两个非空集合。如果按照从 X 到 Y 的一个确定的对应法则 f，对于集合 X 中的每一个元素 x，在集合 Y 中总有唯一的元素 $f(x)$ 与之对应，则称此对应法则 f 为从集合 X 到集合 Y 的一个映射或函数，记作 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)$。X 称为此函数的定义域，$f(x)$ 称为元素 x 在函数 f 下的像或函数 f 在元素 x 处的值。对于每一个 $A\subseteq X$，Y 的子集 $f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$ 称为 A 在函数 f 下的像；特别地，$f(X)$ 称为此函数的值域。对于每一个 $B\subseteq Y$，称 X 的子集 $f^{-1}(B)=\{x\mid x\in X\wedge f(x)\in B\}$（即 $f^{-1}(B)=\bigcup\limits_{b\in B}f^{-1}(\{b\})$）为子集 B 在函数 f 下的原像。

今后，常将 $f^{-1}(\{y\})$ 简写作 $f^{-1}(y)$，并称其为元素 $y\in Y$ 在函数 f 下的原像。

例 1.2 定义非空集合 X 到其自身的函数 I_X 为：对于所有的 $x\in X$，$I_X(x)=x$。I_X 称为 X 上的恒等映射、恒同映射或单位映射。今后我们将多次用到这个函数。

例 1.3 定义 $\mathbb{R}$ 上的符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 为：对于任意的 $x\in\mathbb{R}$，当 $x>0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=1$；当 $x=0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=0$；当 $x<0$ 时，$\mathrm{sgn}(x)=-1$。

定义 1.2 设 $f: X\to Y$ 是一个函数。如果 $f(X)=Y$，则称 f 为一个满射，或称 f 为满射的。如果对于所有的 $x_1,x_2\in X$，当 $x_1\neq x_2$ 时必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，换句话说，当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时必有 $x_1=x_2$，则称 f 为一个单射，或称 f 为单射的。如果函数 f 既为满射又为单射，则称 f 为一个双射或一一对应，或称 f 为双射的。

定义 1.3 设 f 和 g 都是从 X 到 Y 的函数。如果对于所有的 $x\in X$，都有 $f(x)=g(x)$，则称函数 f 与函数 g 相等，记作 $f=g$。

定义 1.4 设 $f: X\to Y$ 是一个函数，$g: Y\to Z$ 也是一个函数。定义函数 $gf: X\to Z$ 为：对于每一个 $x\in X$，$gf(x)=g(f(x))$。函数 gf 称为函数 g 和函数 f 的复合或积。

函数的一般性质 任一函数 $f: X\to Y$ 具有如下性质（请读者自己证明）：

(1) $X=\bigcup\limits_{y\in Y}f^{-1}(y)$。并且当 $y_1\neq y_2$ 时，$f^{-1}(y_1)\cap f^{-1}(y_2)=\varnothing$；

(2) 若 $A_\alpha\subseteq X$，则 $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；

(3) 若 $A_\alpha\subseteq X$，则 $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；

(4) 若 $B_\alpha\subseteq Y$，则 $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(5) 若 $B_\alpha\subseteq Y$，则 $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(6) 若 $A\subseteq X$，则 $f^{-1}(f(A))\supseteq A$，等号成立当且仅当 f 是单射；

(7) 若 $B\subseteq Y$，则 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$，等号成立当且仅当 f 是满射；

(8) $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$，$A\subseteq Y$，$B\subseteq Y$。

定义 1.5 设 $f: X\to Y$ 是一个函数。如果存在函数 $g: Y\to X$ 使得 $gf=I_X$ 且 $fg=I_Y$，则称函数 f 为可逆的，并称函数 g 为函数 f 的反函数或逆函数。

容易证明可逆函数 $f: X\to Y$ 的反函数是唯一的，因此可将其记作 f^{-1}。对于每一个

$B\subseteq Y$，$f^{-1}(B)$一般表示子集 B 在函数 f 下的原像。而如果 f 可逆，则 $f^{-1}(B)$还表示子集 B 在函数 f^{-1}下的像，这时二者实际上是一致的。

定理 1.1 函数 $f: X\to Y$ 可逆当且仅当它是双射。

证明 必要性。设函数 $f: X\to Y$ 可逆且其逆函数为 $g: Y\to X$，则由定义 1.5 有 $gf=I_X$ 和 $fg=I_Y$。对于任意的 $y\in Y$，存在 $x=g(y)\in X$ 使

$$f(x)=f(g(y))=fg(y)=I_Y(y)=y。$$

所以 $f(X)=Y$，即 f 是满射。设 $x_1,x_2\in X$ 使 $f(x_1)=f(x_2)$，则

$$x_1=I_X(x_1)=gf(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=gf(x_2)=I_X(x_2)=x_2。$$

所以 f 是单射。

充分性。设函数 $f: X\to Y$ 是双射。对于任意的 $y\in Y$，因为 f 是满射，所以 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$。断言 $f^{-1}(y)$由唯一的一个元素组成，否则将有 $x_1,x_2\in f^{-1}(y)$，$x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=y=f(x_2)$，与 f 的单射性矛盾。设 $f^{-1}(y)$中那个唯一元素为 $g(y)$，则 $g: Y\to X$ 是函数且 $gf=I_X$，$fg=I_Y$。所以 f 可逆。 ■

定义 1.6 设 $f: X\to Y$ 是一个函数，$\varnothing\neq A\subset X$。定义从 A 到 Y 的函数 $f|A$ 为：对于任意的 $a\in A$，$(f|A)(x)=f(x)$。函数 $f|A$ 称为函数 f 在集合 A 上的限制。反过来，函数 f 称为函数 $f|A$ 向集合 X 的一个延拓或扩张。

函数 f 在集合 A 上的限制具有性质

$$(f|A)^{-1}(B)=A\cap f^{-1}(B),B\subseteq Y。$$

今后，在不产生混乱的情况下，我们有时说到从 A 到 Y 的函数 f，实际上是指函数 f 在集合 A 上的限制。下面定义中用到的有限集概念，具体可参考定义 1.12。

在后面的定义 1.12 中定义了有限集，这里不妨先做适当介绍。

定义 1.7 非空集合 X 到其自身的任一函数 f 称为该集合上的一个变换或一元运算。非空集合 X 到其自身的任一二元函数 $f: X\times X\to X$ 称为该集合上的一个二元运算。非空有限集合 X 上的任一可逆变换 f 称为该集合上的一个置换。

在具体论及二元运算时，常使用中缀表示法，即将二元函数 $f: X\times X\to X$ 的函数名 f 看成运算符，将函数值 $f(a,b)$写成 afb。例如 $a+b$，$a\times b$，$a\oplus b$，$a\otimes b$，$a\odot b$，$a\cdot b$，$a\circ b$，$a*b$，等。

定义 1.8 如果非空集合 X 上可逆变换 f 的逆变换就是 f 本身，则称 f 是对合的，或称 f 为该集合上的一个对合或对合映射。

定义 1.9 设 f 是集合 X 上的一个变换，$x\in X$。如果 $f(x)=x$，则称 x 为 f 的一个不动点；否则称 x 为 f 的一个非不动点。

X 中的每个元素都是 $f: X\to X$ 的不动点当且仅当 $f=I_X$。

1.2.2 置换的循环分解

定义 1.10 设 f 是非空有限集合 X 上的一个置换，F 是 f 的所有不动点的集合，$E=X-F$ 是 f 的所有非不动点的集合。如果 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_{|E|}\}\neq\varnothing$，且当 $1\leqslant i<|E|$ 时

$f(x_i)=x_{i+1}$，而 $f(x_{|E|})=x_1$，则称 f 是 X 上的一个 E-循环或 E-轮换，记作 $f=(x_1,x_2,\cdots,x_{|E|})$，并将 $|E|$ 称为这个 E-循环的阶，$\mathrm{sgn}(f)=(-1)^{|E|-1}$ 称为这个 E-循环的符号。当 $\mathrm{sgn}(f)=1$（即 $|E|$ 为奇数）时称 f 为偶循环；当 $\mathrm{sgn}(f)=-1$（即 $|E|$ 为偶数）时称 f 为奇循环。阶为 2 的 E-循环称为 E-对换。若 f_1 是 X 上的一个 E_1-循环，f_2 是 X 上的一个 E_2-循环，且 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则称 f_1 和 f_2 是不相交的循环。

引理 1.1 设 f 是有限集合 X 上的一个置换，E 是 f 的所有非不动点的集合。如果 $f\neq I_X$，则 $|E|\geqslant 2$，并且对于每一个 $x\in E$，都有 $f(x)\in E$ 和 $f^{-1}(x)\in E$。从而 E 中必有一个长度 m 不小于 2 且各项两两不同的有限序列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得

$$x_{k+1}=f(x_k),1\leqslant k<m,x_1=f(x_m)。$$

证明 反证法。如果对于某一个 $x\in E$，有 $f(x)\notin E$，则 $y=f(x)$ 是 f 的不动点，从而 $f(y)=y=f(x)$，而 $y\neq x$。这与 f 的单射性矛盾。所以对于每一个 $x\in E$，都有 $f(x)\in E$。因为 f^{-1} 与 f 具有相同的不动点和非不动点，所以对于每一个 $x\in E$，也都有 $f^{-1}(x)\in E$。如果 $|E|<2$，则因 $f\neq I_X$ 有 $|E|=1$，不妨设 $E=\{x\}$。已经证明 $f(x)\in E$，即 $f(x)=x$，与 E 的定义矛盾。所以必有 $|E|\geqslant 2$。

任取 $x_1\in E$，必有 $x_2=f(x_1)\in E,x_3=f(x_2)\in E,\cdots$ 如此进行下去，就得到 E 中的一个无限序列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$，满足 $x_{k+1}=f(x_k)\in E$。由于 E 有限，一定存在一个最小的 i_0 和最小的长度 $m\geqslant 2$，使 $x_{i_0}=x_{i_0+m}$，而 $x_i\neq x_j(i_0\leqslant i<j<i_0+m)$。断言 $i_0=1$，否则将由 $f(x_{i_0-1})=x_{i_0}=f(x_{i_0+m-1})$ 及 f 的单射性得到 $x_{i_0-1}=x_{i_0+m-1}$，与 i_0 的最小性矛盾。这样就有 E 中长度为 $m\geqslant 2$ 且各项两两不同的有限序列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，使 $x_{k+1}=f(x_k)(1\leqslant k<m)$，而 $x_1=f(x_m)$。 ■

引理 1.2 设 $f\neq I_X$ 是非空有限集合 X 上的一个置换，F 是 f 的所有不动点的集合，$E=X-F$ 是 f 的所有非不动点的集合，则存在 X 的非空子集 $D(|D|\geqslant 2)$ 和 X 上的一个 D-循环 g，使得对于任意的 $x\in X$，若 $x\in D$，则 $g(x)=f(x)$；否则 $g(x)=x$。

证明 因 $f\neq I_X$，故由引理 1.1，$|E|\geqslant 2$，且 E 中必有一个长度不小于 2 且各项两两不同的有限序列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，使 $x_{i+1}=f(x_i)(1\leqslant i<m)$，而 $x_1=f(x_m)$。记 $D=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，并定义函数 g：$X\to X$ 为：对任意的 $x\in X$，若 $x\in D$，则 $g(x)=f(x)$，否则 $g(x)=x$。显然 g 是 X 上的一个 D-循环。 ■

引理 1.3 非空有限集合 X 上任意两个不相交循环 f_1 和 f_2 都是可交换的。

证明 设 f_1 是 X 上的 E_1-循环，f_2 是 X 上的 E_2-循环，且 $E_1\cap E_2=\varnothing$。对于任意的 $x\in X$，若 $x\in E_1$，则由引理 1.1 知 $f_1(x)\in E_1$，从而 x 和 $f_1(x)$ 都是 f_2 的不动点，所以 $f_1f_2(x)=f_1(x)=f_2f_1(x)$；若 $x\in E_2$，则由引理 1.1 知 $f_2(x)\in E_2$，从而 x 和 $f_2(x)$ 都是 f_1 的不动点，所以 $f_1f_2(x)=f_2(x)=f_2f_1(x)$；若 $x\notin E_1\cup E_2$，则 x 同时是 f_1 和 f_2 的不动点，故 $f_1f_2(x)=x=f_2f_1(x)$。所以 $f_1f_2=f_2f_1$。 ■

定理 1.2 非空有限集合 X 上任意一个置换 f 都可以唯一地分解为有限个不相交循环的积。

证明 若 $f=I_X$，则 f 可以看成是 0 个不相交循环的积。以下设 $f\neq I_X$。

设 F 是 f 的所有不动点的集合，$E=X-F$ 是 f 的所有非不动点的集合。由引理 1.2 知，存在 E 的非空子集 $E_1(|E_1|\geqslant 2)$ 和 X 上的 E_1-循环 f_1，使得对于任意的 $x\in X$，若 $x\in E_1$，则 $f_1(x)=f(x)$；若 $x\notin E_1$，则 $f_1(x)=x$。当 $E_1=E$ 时，$f=f_1$，证明结束。若 $E_1\neq E$，令 $E'=E-E_1$，这时必有 $|E'|\geqslant 2$。否则如果 $|E'|<2$，即 $|E'|=1$，可设 $E'=\{x\}$。因 $x\in E$，由引理 1.1 知 $f(x)\in E$，故 $f(x)\neq x$，$f(x)\notin E'$，从而 $f(x)\in E_1$。因 f_1 是 E_1-循环，故有某个 $x'\in E_1$ 使 $f(x')=f_1(x')=f(x)$，而 $x'\neq x$，与 f 的单射性矛盾。所以 $|E'|\geqslant 2$。定义 f'：$X\to X$ 为：对于任意的 $x\in X$，若 $x\in E'$，则 $f'(x)=f(x)$，否则 $f'(x)=x$。这时，$F'=F\cup E_1$ 是 f'的所有不动点的集合，E'是 f'的所有非不动点的集合。f'显然是 X 上的置换。由引理 1.2 知，存在 E'的非空子集 E_2 和 X 上的 E_2-循环 f_2，使得对于任意的 $x\in X$，若 $x\in E_2$，则 $f_2(x)=f'(x)$；否则 $f_2(x)=x$。当 $E_2=E'$时，$f=f_1f_2$，证明结束。否则按照上面的方法继续进行。因 E 有限，这个过程必然在有限步之内结束。

由引理 1.3 知，在不考虑不相交循环顺序的情况下，分解式是唯一的。 ■

推论 1.1 非空有限集合 X 上任意一个对合 f 都可以唯一地分解为有限个不相交对换的积。

证明 由定理 1.2 知，非空有限集合 X 上任意一个置换 f 都可以唯一地分解为有限个不相交循环的积。更进一步，如果 f 还是对合的，则分解式中每一个循环都是对换。 ■

定义 1.11 非空有限集合 X 上任意一个置换 $f\neq I_X$ 的不相交循环分解式中各个不相交循环的符号之积称为 f 的符号，记作 $\operatorname{sgn}(f)$，并且当 $\operatorname{sgn}(f)=1$ 时称 f 为偶循环，而当 $\operatorname{sgn}(f)=-1$ 时称 f 为奇循环。对于 $f=I_X$，定义 $\operatorname{sgn}(f)=1$。

设有限集合 X 上的置换 $f\neq I_X$ 的不相交循环分解式为 $f=f_1f_2\cdots f_m$，其中 $f_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 是 E_k-循环，$E_i\cap E_j=\varnothing$，$1\leqslant i<j\leqslant m$。显然 $\operatorname{sgn}(f)=(-1)^{|E|-m}$，其中 $E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_m$ 是 f 的非不动点集合。

引理 1.4 若 f 和 g 是非空有限集合 X 上的两个置换，f 的非不动点集合为 E_1，g 的非不动点集合为 E_2，且 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则 $\operatorname{sgn}(fg)=\operatorname{sgn}(f)\operatorname{sgn}(g)$。

证明 若 $f=I_X$ 或 $g=I_X$，则结论显然成立。设 $f\neq I_X$，$g\neq I_X$，且 f 和 g 的不相交循环分解式分别为 $f=f_1f_2\cdots f_m$，$g=g_1g_2\cdots g_n$，则 fg 的非不动点集合为 $E_1\cup E_2$，不相交循环分解式为 $fg=f_1f_2\cdots f_mg_1g_2\cdots g_n$。因此

$$\operatorname{sgn}(fg)=(-1)^{|E_1\cup E_2|-(m+n)}=(-1)^{|E_1|-m}(-1)^{|E_2|-n}=\operatorname{sgn}(f)\operatorname{sgn}(g)。$$ ■

定理 1.3 非空有限集合 X 上任何一个对换作用在任何一个置换上将改变该置换的奇偶性。

证明 设 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，f 是 X 上的一个 E-循环。对于 X 上的任意一个对换 $(a\ b)$，考虑 $(a\ b)$与 f 的积，即证明 $\operatorname{sgn}((a\ b)f)=-\operatorname{sgn}(f)$，$\operatorname{sgn}(f(a\ b))=-\operatorname{sgn}(f)$。若 $a,b\notin E$，则 $(a\ b)f$ 和 $f(ab)$有不相交循环分解式 $(a\ b)f=f(a\ b)=(a\ b)(x_1\ x_2\ \cdots\ x_m)$，所以 $\operatorname{sgn}((a\ b)f)=\operatorname{sgn}(f(a\ b))=-\operatorname{sgn}(f)$。若 $a,b\in E$，不失一般性，可设 $a=x_1$，$b=x_i$，即 $f=$

$(a\ x_2\ \cdots\ x_{i-1}\ b\ x_{i+1}\cdots\ x_m)$。若 $i=2$，即 $f=(a\ b\ x_3\cdots\ x_m)$，则 a 是 $(a\ b)f$ 的不动点，b 是 $f(a\ b)$ 的不动点。这时，$(a\ b)f$ 有不相交循环分解式 $(a\ b)f=(b\ x_3\cdots\ x_m)$，$f(a\ b)$ 有不相交循环分解式 $f(a\ b)=(a\ x_3\cdots\ x_m)$，故 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=\mathrm{sgn}(f(a\ b))=-\mathrm{sgn}(f)$。若 $i=m>2$，即 $f=(a\ x_2\ \cdots\ x_{m-1}\ b)=(b\ a\ x_2\cdots\ x_{m-1})$，则 b 是 $(a\ b)f$ 的不动点，a 是 $f(a\ b)$ 的不动点。这时，$(a\ b)f$ 有不相交循环分解式 $(a\ b)f=(a\ x_2\cdots\ x_{m-1})$，$f(a\ b)$ 有不相交循环分解式 $f(a\ b)=(b\ x_2\ \cdots\ x_{m-1})$，故 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=\mathrm{sgn}(f(a\ b))=-\mathrm{sgn}(f)$。若 $2<i<m$，容易验证 $(a\ b)f$ 有不相交循环分解式 $(a\ b)f=(a\ x_2\cdots\ x_{i-1})(b\ x_{i+1}\cdots\ x_m)$，$f(a\ b)$ 有不相交循环分解式 $f(a\ b)=(b\ x_2\cdots\ x_{i-1})(a\ x_{i+1}\cdots\ x_m)$，故 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=\mathrm{sgn}(f(a\ b))=-\mathrm{sgn}(f)$。若 $a\in E$，而 $b\notin E$，不失一般性，可设 $a=x_m$，即 $f=(x_1\ x_2\cdots\ x_{m-1}\ a)$。这时，$(a\ b)f$ 有不相交循环分解式 $(a\ b)f=(x_1\ \cdots\ x_{m-1}\ b\ a)$，$f(a\ b)$ 有不相交循环分解式 $f(a\ b)=(x_1\cdots\ x_{m-1}\ a\ b)$，故 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=\mathrm{sgn}(f(a\ b))=-\mathrm{sgn}(f)$。

在一般情况下，设 f 的不相交循环分解式为 $f=f_1f_2\cdots f_n$，其中 f_i 是 X 上的 E_i-循环。这时候，f 的非不动点集合为 $E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$。下面来证明 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=-\mathrm{sgn}(f)$，$\mathrm{sgn}(f(a\ b))=-\mathrm{sgn}(f)$ 的证明类似。

对于 X 上的任意一个对换 $(a\ b)$，若 $a\in E$，而 $b\notin E$，可设 $a\in E_1$，上面已证 $\mathrm{sgn}((a\ b)f_1)=-\mathrm{sgn}(f_1)$，由引理 1.4 和定义 1.11 知 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=-\mathrm{sgn}(f)$。若 $a,b\notin E$，则 $(a\ b)f$ 有不相交循环分解式 $(a\ b)f=(a\ b)f_1f_2\cdots f_n$，因此 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=-\mathrm{sgn}(f)$。若 $a,b\in E$，分两种情况讨论：(1) a 与 b 同在某个 E_i 中，$(a\ b)f_i$ 的不相交循环分解式中每一个循环都与其他 $f_j(j\neq i)$ 不相交，上面已证明 $\mathrm{sgn}((a\ b)f_i)=-\mathrm{sgn}(f_i)$，由引理 1.3、引理 1.4 和定义 1.11 知 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=-\mathrm{sgn}(f)$；(2) a 与 b 分别在 E_i 和 E_j 中，而 $i\neq j$，不失一般性，设 $f_i=(a\ x_2\cdots\ x_s)$，$f_j=(b\ y_2\cdots\ y_t)$，这时有不相交循环分解式 $(a\ b)f_if_j=(a\ x_2\cdots\ x_s\ b\ y_2\cdots\ y_t)$，因此 $\mathrm{sgn}((a\ b)f_if_j)=(-1)^{s+t-1}=-\mathrm{sgn}(f_if_j)$，由引理 1.3、引理 1.4 和定义 1.11 知 $\mathrm{sgn}((a\ b)f)=-\mathrm{sgn}(f)$。■

定理 1.4 非空有限集合 X 上任意一个置换 $f\neq I_X$ 都可以分解为有限个对换之积，且分解式中对换个数的奇偶性与 f 的奇偶性相同。

证明 当 f 是一个循环时，由 $f=(x_1\ x_2\cdots\ x_m)$ 有 $f=(x_1\ x_m)\cdots(x_1\ x_3)(x_1\ x_2)$，且这个表示式中对换的个数为 $m-1$，与 f 有相同的奇偶性。设 f 还有另一种表示形式 $f=(x\ y)\cdots(u\ v)(s\ t)$，则 $f^{-1}=(s\ t)(u\ v)\cdots(x\ y)$，因此 $I_X=(s\ t)(u\ v)\cdots(x\ y)f$。由于 $\mathrm{sgn}(I_X)=1$，由定理 1.2、引理 1.4 和定理 1.3 知，对换 $(s\ t)$，$(u\ v)$，$\cdots$，$(x\ y)$ 的个数与 f 有相同的奇偶性。有限个不相交循环分别分解成有限个对换之积后，各分解式中没有相同的对换。所以当 f 不是单个循环时，结论也成立。■

1.3 集合的基数、对合映射不动点定理

定义 1.12 如果存在正整数 n，并且存在从集合 S 到集合 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的一个一一对应，则称集合 S 的基数为 n，记作 $|S|=n$。规定空集 $\varnothing$ 的基数为 0。基数为非负整数