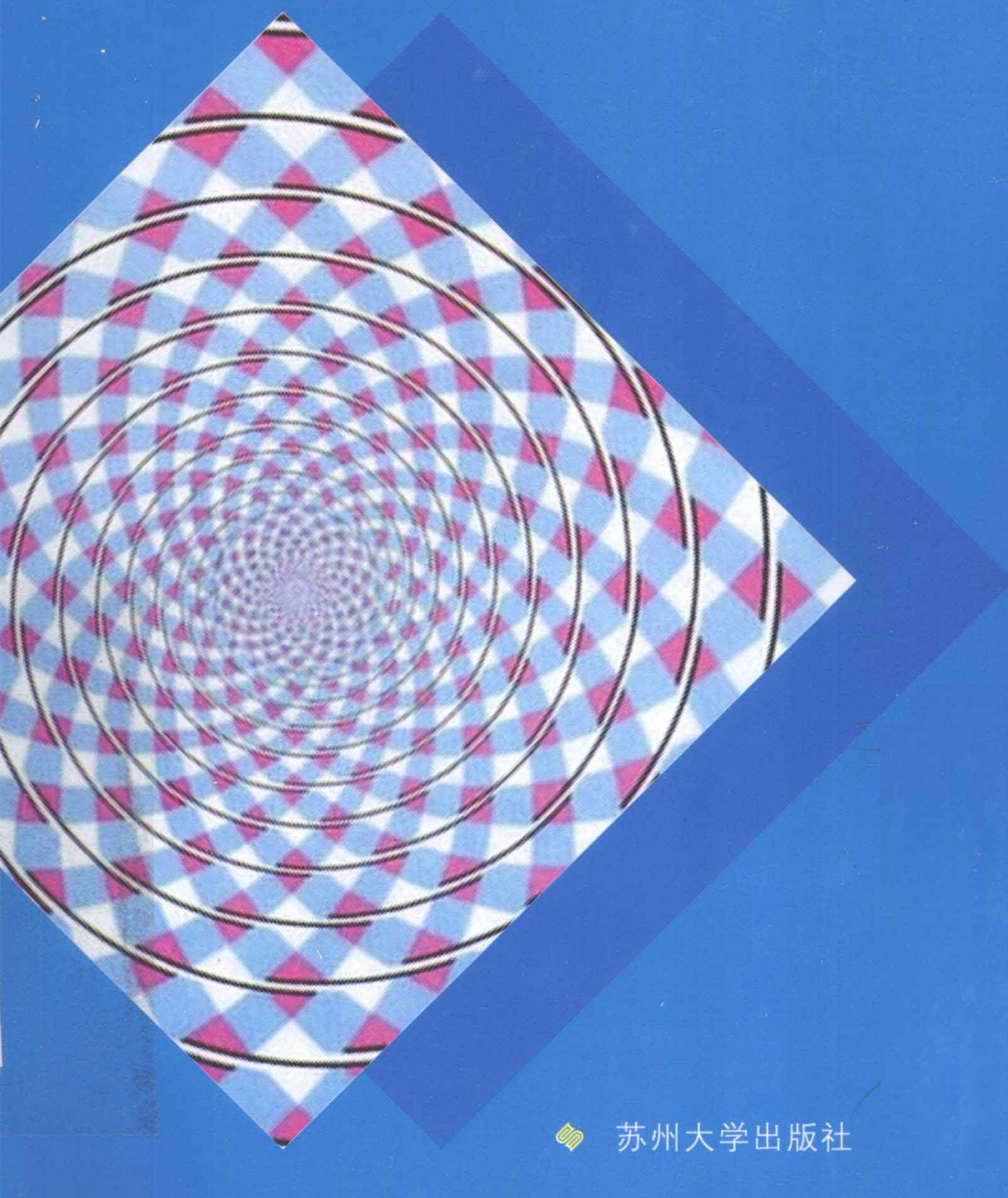
应用数学

下

主编 毛珍玲 屈寅春
主审 顾惠明



苏州大学出版社

应用数学(下)

主　编　毛珍玲　屈寅春
主　审　顾惠明

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学. 下/毛珍玲,屈寅春主编. —苏州:苏州大学出版社,2010.2
ISBN 978-7-81137-435-3

Ⅰ.①应… Ⅱ.①毛…②屈… Ⅲ.①应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 021657 号

应用数学(下)
毛珍玲 屈寅春 主编
责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张28.50 字数704千
2010年2月第1版 2010年2月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-435-3 定价:49.30元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

本套教材是在“系统改革高职课程体系”的大背景下，应高职教育基础课的改革要求而编写的.在编写中努力体现以下特点：

(1) 按照“进一步优化课程体系、降低理论要求、扩大知识容量、增加工程氛围、加强实际应用”的原则，结合各专业需求选取教学内容，尽可能地让数学基础知识与工程实际应用相结合，使数学教学与数学软件、数学建模有机地结合起来.

(2) 内容选编中，注重理论联系实际，由浅入深、由易到难，注意培养学生的数学素质和应用意识，激发学生的学习兴趣.

(3) 通过数学建模的教学，更好地培养学生的创新意识和应用数学知识、数学方法解决实际问题的能力.

本套教材分上、下两册，本书为下册，可根据各专业需要选学不同的章节.本书由无锡职业技术学院毛珍玲、屈寅春主编，顾惠明主审，其中第一、二章由田星、程东亚编写，第三、四章由刘宗宝编写，第五章由吴吟吟编写，第六章由屈寅春编写，第七、八章由王先婷编写，第九、第十三章由傅小波编写，第十章由毛珍玲编写，第十一、十二章由杨先伟编写，第十四章由朱永强、黄飞编写.

由于时间仓促，编者水平有限，书中错误不当之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2010 年 1 月

目 录

第一章　常微分方程

微分方程是数学理论(特别是微积分)联系实际的重要渠道之一. 它是研究许多自然科学、工程技术以及生物技术、农业、经济学等诸多问题的有力工具,因而微分方程具有重要的应用价值. 本章主要介绍常微分方程的一些基本概念,以及求解几种常用的微分方程的一些最基本的解法.

§1-1　微分方程的基本概念

下面我们通过两个具体例题来说明微分方程的基本概念.

例 1　一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$,求这条曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$,则根据导数的几何意义可知,未知函数 $y=y(x)$ 应满足下面的关系:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x, \tag{1}$$

且当 $x=1$ 时,$y=2$. 即

$$y(1)=2. \tag{2}$$

对(1)式两端积分,得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C. \tag{3}$$

其中 C 是任意常数. 将 $y(1)=2$ 代入,得 $C=1$. 代入(3)式,即得所求曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{4}$$

例 2　一质量为 m 的质点,从高 h 处,只受重力作用从静止状态自由下落,试求其运动方程.

解　在中学阶段就已经知道,从高度为 h 处下落的自由落体,离地面高度 s 的变化规律为 $s=h-\frac{1}{2}gt^2$,其中 g 为重力加速度. 这个规律是怎么得到的呢? 下面我们给出推导过程.

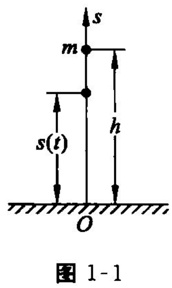


图 1-1

取质点下落的铅垂线为 s 轴,它与地面的交点为原点,并规定正向朝上. 设质点在时刻 t 的位置在 $s(t)$(如图 1-1 所示). 因为质点只受方向向下的重力的作用(空气阻力忽略不计),由牛顿第二定律 $F=ma$,得

$$m\frac{d^2s(t)}{dt^2}=-mg,$$

即
$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}=-g. \tag{5}$$

根据质点由静止状态自由下落的假设,初始速度为0,所以 $s=s(t)$ 还应满足下列条件

$$s|_{t=0}=h,\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0. \tag{6}$$

对(6)式两边积分,得

$$\frac{ds(t)}{dt}=-g\int dt=-gt+C_1, \tag{7}$$

两边再积分,得

$$s(t)=\int(-gt+C_1)dt=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{8}$$

其中 C_1,C_2 均为任意常数.

将条件(6)代入(7)、(8)式,得 $C_1=0$, $C_2=h$. 于是所求的运动方程为

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h. \tag{9}$$

上述两个例子中的关系式(1)和(5)中,都含有未知函数的导数,自变量也都只有一个,且方程都附加有一定的条件.

定义 凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程,叫做**微分方程**. 未知函数是一元函数的方程称为**常微分方程**,简称**微分方程**.

例 1 的方程(1)、例 2 的方程(5)都是常微分方程.

微分方程中未知函数的导数的最高阶数,称为**微分方程的阶**. 例如,例 1 的方程(1)是一阶微分方程,例 2 的方程(5)是二阶微分方程.

再如,$\frac{dy}{dx}=f(x)$ 是一阶微分方程,$y''-3y'+y=3x+1$ 是二阶微分方程,$y^{(4)}+x^3y'''-x^2y''+xy'-y=\cos x$ 是四阶微分方程.

一般地,n 阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{10}$$

其中 F 是 $n+2$ 个变量的函数. 这里必须指出,在方程(10)中,$y^{(n)}$ 是必须出现的,而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现. 例如,n 阶微分方程 $y^{(n)}+1=0$ 中除 $y^{(n)}$ 外其他变量都没有出现.

二阶及其以上阶的微分方程统称为**高阶微分方程**.

未知函数及其各阶导数都以一次形式出现的微分方程称为**线性微分方程**;否则称为**非线性微分方程**.

由前面的例子我们看到,在研究某些实际问题时,首先建立微分方程,然后找出满足微分方程的函数(解微分方程),即找出这样的函数,把这个函数代入微分方程能使方程成为自变量的恒等式,则称这个函数为微分方程的解.

即设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数,如果在区间 I 上,使得

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0,$$

那么函数 $y=\varphi(x)$ 就叫做微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解.

例如，例 1 中 $y=x^2+C$（C 为任意常数），$y=x^2+1$ 都是微分方程 $y'=2x$ 的解.

如果微分方程的解中含有相互独立的任意常数，且个数与方程的阶数相同，则称为**微分方程的通解**.

例如，$y=x^2+C$ 是微分方程 $y'=2x$ 的通解.

由于通解中含有任意常数，所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性，要完全确定地反映某一客观事物的规律性，必须确定这一常数的值. 为此，要根据问题的实际情况，提出确定这些常数的条件. 例如，在例 1 中的条件(2)、例 2 中的条件(6)，就是这样的条件.

通常，如果微分方程是一阶的，用来确定任意常数的条件是：$x=x_0$ 时，$y=y_0$，或写成 $y|_{x=x_0}=y_0$.

如果微分方程是二阶的，用来确定任意常数的条件是：当 $x=x_0$ 时，$y=y_0$，$y'=y'_0$ 或写成 $y|_{x=x_0}=y_0$，$y'|_{x=x_0}=y'_0$，其中 y_0，y'_0 都是给定的值.

上述这种条件叫做**初始条件**. 例如，在例 1、例 2 中的(2)、(6)，就是微分方程(1)、(5)的初始条件.

在微分方程的通解中，由初始条件确定任意常数而得到的解称为**微分方程的特解**.

例如，例 1 中的 $y=x^2+1$ 是微分方程 $y'=2x$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解.

求微分方程满足初始条件的特解的问题，称为**初值问题**.

微分方程解的图象是一条曲线，叫做微分方程的**积分曲线**. 通解的图象是一族曲线，称为**积分曲线族**.

特解的图象是积分曲线族中一条特定的积分曲线.

例 3　验证函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$（C_1，C_2 为任意常数）是方程 $y''-4y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解　$y'=2C_1e^{2x}-2C_2e^{-2x}$，$y''=4C_1e^{2x}+4C_2e^{-2x}$.

将 y，y'' 代入微分方程，得

$$y''-4y=4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})-4(C_1e^{2x}+C_2e^{-2x})\equiv 0,$$

所以函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ 是所给微分方程的解. 又因为 $\dfrac{e^{2x}}{e^{-2x}}=e^{4x}\neq$ 常数，所以解中含有两个独立的任意常数 C_1 和 C_2，而微分方程是二阶的，即任意常数的个数与方程的阶数相同，所以它是该方程的通解.

将初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 分别代入 y 及 y' 中，得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ 2C_1-2C_2=1, \end{cases}$$

解得 $C_1=\dfrac{1}{4}$，$C_2=-\dfrac{1}{4}$. 于是所求特解为 $y=\dfrac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})$.

练　习 1-1

1. 指出下列方程中哪些是微分方程，并说明它们的阶数：

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=2x$；　　　　(2) $y^2-3y+x=0$；

(3) $x(y')^2+y=1$；　　　　(4) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$.

2. 判断下列方程右边所给函数是否为该方程的解，如果是解，是通解还是特解：

(1) $xy'=2y$，$y=5x^2$；

(2) $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2\mathrm{e}^x$；

(4) $(x+y)\mathrm{d}x=-x\mathrm{d}y$，$y=\dfrac{(C-x^2)}{2x}$($C$ 为任意常数).

习　题 1-1

1. 在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解：

(1) $y=C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)$，$y''+4y=0$($C_1$，$C_2$ 为任意常数)；

(2) $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$，$y''-4y=0$($C_1$，$C_2$ 为任意常数)；

(3) $x^2-xy+y^2=C$，$(x-2y)y'=2x-y$(C 为任意常数).

2. 在下列各题中，确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给定的初始条件：

(1) $x^2-y^2=C$，$y|_{x=0}=5$；

(2) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$.

3. 写出由下列条件所确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线在点(x,y)处的切线斜率等于该点的坐标之和；

(2) 曲线上点 $P(x,y)$处的法线与 X 轴的焦点为 Q，且线段 PQ 被 Y 轴平分.

4. 用微分方程表示一物理命题：某种气体的气压 p 对于温度 T 的变化率与气压成正比，与温度成反比.

§1-2　一阶微分方程

本节我们讨论一阶微分方程

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

或 $F(x,y,y')=0$ 的一些解法.

一阶微分方程有时也写成如下的对称形式

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{2}$$

在方程(2)中，变量 x，y 对称，它既可看做是以 x 为自变量，y 为未知函数的方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$(这时 $Q(x,y)\neq 0$)，也可看做是以 y 为自变量，x 为未知函数的方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$(这时 $P(x,y)\neq 0$).

一、可分离变量的一阶微分方程

一般地，如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

的形式，即能把微分方程写成一端只含有 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，另一端只含有 x 的函数和 $\mathrm{d}x$，则称其为**可分离变量的微分方程**.

其特点是：方程的两边仅含一个变量，这一形式可以看成是微分形式 $\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 的推广.

其解法是：

对(3)式两边同时求不定积分，即

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

依次记 $G(y)$、$F(x)$ 为 $g(y)$、$f(x)$ 的一个原函数，于是有

$$G(y)=F(x)+C,$$

即为方程(3)的通解.

例 1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 这是一个可分离变量的方程，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x,$$

即

$$\ln|y|=x^2+C_1 \quad 或 \quad y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}\cdot e^{x^2}.$$

因为 C_1 为任意常数，所以 $\pm e^{C_1}$ 也是任意非零常数，又 $y=0$ 也是方程的解，把它记作 C，代入后得方程的通解

$$y=Ce^{x^2}.$$

例 2 求微分方程 $y(1+x^2)\mathrm{d}y+x(1+y^2)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解 这是一个可分离变量的方程，分离变量得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

两边积分，得

$$\int\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

即

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C.$$

故方程的通解为

$$(1+x^2)(1+y^2)=C.$$

将 $y|_{x=1}=1$ 代入通解表达式，得 $C=4$.

因此，所求方程的特解为 $(1+x^2)(1+y^2)=4$.

例 3 求微分方程 $(1+e^x)yy'=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

解 这是一个可分离变量方程. 分离变量，得

$$y\mathrm{d}y=\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $\int y\mathrm{d}y=\int\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$，即

$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C_1,$$

即方程通解为　　　$y^2=2\ln(1+e^x)+C$(其中 $C=2C_1$).
由初始条件 $y(0)=0$ 得 $C=-2\ln 2$.

因此方程满足初始条件的特解为 $y^2=2\ln(1+e^x)-2\ln 2$.

二、齐次方程

若一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

的形式,则称此方程为**齐次方程**.

例如,方程 $x^2dy=y^2dx-xydy$ 就是齐次方程.因为它可化成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2+xy},$$

等号右边是一个二次齐次式,在分式的分子分母同除以 x^2,即化方程为形式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}.$$

在齐次方程$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$中,只要作一个变量代换,就一定能将方程转化为新变量的可分离变量的一阶微分方程,从而求得通解.其具体步骤如下:

第一步　化原方程为形式(4).

第二步　在(4)式中作代换 $u=\frac{y}{x}$,则

$$y=ux,\ \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入(4)式后得 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$.这是一个关于 u 的可分离变量的一阶方程.

分离变量得

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}. \tag{5}$$

第三步　两边积分得到方程(5)的通解

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

第四步　求出不定积分后以 $u=\frac{y}{x}$ 回代,即得原齐次微分方程的通解.

例 4　求微分方程 $x\frac{dy}{dx}-y=2\sqrt{xy}$的通解.

解　原方程可化为　　　$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{xy}+y}{x},$$

即　　　$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x},$$

作变换 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入上式,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{u}+u,$$

分离变量，得
$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分，得
$$\sqrt{u}=\ln x+C,$$
$$x(\sqrt{u}-1)=C.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 回代，得原方程的通解 $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln x+C.$

例 5 解方程 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

这是齐次方程. 令 $\frac{y}{x}=u$，则

$$y=ux,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是原方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1},\ \text{即}\ x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1},$$

分离变量，得
$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分，得 $u-\ln|u|+C=\ln|x|$，或写为
$$\ln|xu|=u+C.$$

以 $\frac{y}{x}$ 代入上式中的 u，便得所给方程的通解为

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C.$$

三、一阶线性微分方程

如果一阶微分方程可化为
$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{6}$$
的形式，即方程关于未知函数及其导数是线性的，而 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是已知连续函数，则称此方程为**一阶线性微分方程**. 当不含未知函数的项 $Q(x)\neq 0$ 时，称方程(6)为关于未知函数 y,y' 的**一阶非齐次线性微分方程**；反之，当 $Q(x)\equiv 0$ 时即变为
$$y'+P(x)y=0, \tag{7}$$
称其为方程(6)所对应的**一阶齐次线性微分方程**.

把方程(7)分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+C,$$

式中$\int P(x)\mathrm{d}x$表示$P(x)$的一个原函数,于是一阶齐次线性微分方程(7)的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{8}$$

其中C为任意常数.

比较方程(6)、方程(7),发现差别仅在方程(6)的等式右端是一个函数,根据函数的求导特点,试设(6)方程的解为

$$y=C(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{9}$$

即把齐次方程通解中的任意常数C改变为x的待定函数$C(x)$,然后求出$C(x)$使之满足非齐次线性方程(6).

对(9)式求导得

$$y'=C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{10}$$

将(9)、(10)式代入(6)式,经整理后得

$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

积分后得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C. \tag{11}$$

将(11)式代入(9)式,即得一阶非齐次线性方程(6)的通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\text{(}C\text{为任意常数)}. \tag{12}$$

上述通过把对应的齐次线性方程通解中的任意常数C改变为待定函数$C(x)$,然后求出非齐次线性方程通解的方法,称为**常数变易法**.

将(12)式改写成下面的形式:

$$y=C\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

上式右端第一项恰是对应的齐次线性方程(7)的通解,第二项可由非齐次线性方程(6)的通解(12)中取$C=0$得到,所以是(6)的一个特解.

由此可知,**一阶非齐次线性方程的通解的结构**是:对应齐次方程的通解与它的一个特解之和.

例 6 求方程$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$的通解.

解 原方程可化为 $$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2,$$

所以原方程是线性非齐次的,且

$$P(x)=-\frac{2x}{1+x^2},Q(x)=1+x^2.$$

方法 1(常数变易法):

(1) 对应齐次方程 $$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=0,$$

分离变量，得 $\frac{dy}{y}=\frac{2x}{1+x^2}dx$，

两边积分，得 $\ln y=\ln(1+x^2)+\ln C$，

所以齐次方程通解为 $y=C(1+x^2)$.

(2) 设 $y=C(x)(1+x^2)$，代入原方程，得

$$C'(x)(1+x^2)+2xC(x)-\frac{2x}{1+x^2}C(x)(1+x^2)=1+x^2,$$

$$C'(x)(1+x^2)=(1+x^2),$$

$$C'(x)=1,$$

$$C(x)=x+C.$$

由此得到原方程的通解为 $y=(x+C)(1+x^2)$.

方法 2(公式法)：

原方程的通解 $$y=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int(1+x^2)e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\ln(1+x^2)}\left[\int\frac{(1+x^2)}{(1+x^2)}dx+C\right]=(1+x^2)(x+C).$$

有时方程不是关于未知函数 y,y' 的一阶线性方程，若把 x 看成 y 的未知函数 $x=x(y)$，方程成为关于未知函数 $x(y)$，$x'(y)$的一阶线性方程

$$\frac{dx}{dy}+P_1(y)x=Q_1(y).$$

这时也可以利用上述方法求解，得到解的形式是 $x=x(y,C)$. 对原来的未知函数 y 而言，得到的是由方程 $x=x(y,C)$所确定的隐函数.

例 7　求微分方程 $y'+\frac{2y}{x}=x$ 的通解.

解　方程是一阶线性微分方程. 这里 $P(x)=\frac{2}{x}$，$Q(x)=x$. 由通解公式(12)知方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int xe^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=e^{-2\ln x}\left(\int xe^{2\ln x}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\int x^3dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4}+C\right)=\frac{C}{x^2}+\frac{x^2}{4}.$$

例 8　求方程$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解.

解　这是一个非齐次线性方程. 先求对应的齐次方程的通解.

对齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0$，

分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}$，

$$\ln y=2\ln(x+1)+\ln C,$$

$$y=C(x+1)^2.$$

用常数变易法. 把 C 换成 u，即令

$$y=u(x+1)^2, \qquad (*)$$

那么 $$\frac{dy}{dx}=u'(x+1)^2+2u(x+1),$$

代入所给非齐次方程，得

$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

再把上式代入(∗)式，即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right].$$

例 9 求方程 $xy'-y=x^2e^x$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

解 在方程两边同时除以 x，将方程化为标准形式

$$y'-\frac{1}{x}y=xe^x,$$

这里 $P(x)=-\frac{1}{x}$，$Q(x)=xe^x$. 由通解公式知方程的通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^xe^{-\int\frac{1}{x}dx}\,dx+C\right)=e^{\ln x}\left(\int xe^xe^{-\ln x}dx+C\right)=x(e^x+C).$$

将初始条件 $y(1)=1$ 代入得 $C=1-e$. 故方程的特解为 $y=x(e^x-e+1)$.

例 10 质量为 2kg 的物体，在重力和与速度成正比的阻力作用下，从高为 500m 处自由下落. 设阻力系数 $k=1.0$，求下落距离和下落速度的变化规律，并求物体落地时间及落地时的速度.

解 如图 1-2 所示，向下为正. 设下落距离 $s=s(t)$，则下落速度、加速度为

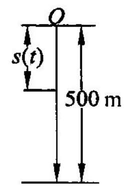


图 1-2

$$v(t)=s'(t),a(t)=s''(t).$$

物体下落过程受力情况如下：

$$重力\ F_1=mg=2g(g\ 为重力加速度),$$
$$阻力\ F_2=-kv(t)=-s'(t).$$

据牛顿第二定律 $F=ma$，得 $s(t)$满足方程

$$2s''(t)=2g-s'(t). \tag{13}$$

因为是自由落体，所以 $s(t)$还应满足初始条件

$$s(0)=0,\ s'(0)=0. \tag{14}$$

改写(13)式为 $2s''(t)+s'(t)=2g$，即

$$[2s'(t)+s(t)]'=2g,$$

所以 $$2s'(t)+s(t)=2gt+C_1.$$

以初始条件(14)代入，得 $C_1=0$，所以 $s(t)$满足方程 $2s'(t)+s(t)=2gt$，即

$$s'(t)+0.5s(t)=gt. \tag{15}$$

这是关于 $s(t)$，$s'(t)$的一阶线性非齐次方程. 应用公式(12)，得

$$\begin{aligned}s(t)&=e^{-\int0.5dt}\left(\int gte^{\int0.5dt}\,dt+C\right)=e^{-0.5t}\left(g\cdot\int te^{0.5t}dt+C\right)\\&=e^{-0.5t}\left[2g\left(te^{0.5t}-\int e^{0.5t}dt\right)+C\right]=e^{-0.5t}[2g(t-2)\ e^{0.5t}+C]\\&=2g(t-2)+Ce^{-0.5t}.\end{aligned}$$