



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

机械系统 计算动力学 与建模

洪嘉振 刘锦阳 编著





普通高等教育“十一五”国家级规划教材

机械系统 计算动力学 与建模

JIXIE XITONG JISUAN DONGLIXUE YU JIANMO

洪嘉振 刘锦阳 编著



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。全书共分5章,系统地介绍了利用多体系统动力学处理复杂机械系统运动学、动力学与控制性态计算机分析的原理与方法,以及借助ADAMS软件实现上述分析的全过程。本书重视培养读者三方面的能力:对复杂机械系统进行模型简化,建立适用于运动学和动力学分析的力学模型的能力;利用多体系统的基本概念判断力学模型的合理性和计算结果的正确性的能力;在建立力学模型的基础上应用ADAMS软件快速准确地对复杂机械系统进行运动学和动力学分析的能力。

本书可作为机械、航空航天、力学类专业的学生或从事机械系统计算机辅助分析与优化的工程技术人员知识更新的入门教材,也可供对ADAMS软件使用有需求的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械系统计算动力学与建模/洪嘉振,刘锦阳编著. —北京:高等教育出版社,2011.6

ISBN 978-7-04-031521-9

I. ①机… II. ①洪…②刘… III. ①机械动力学-系统建模-高等学校-教材 IV. ①TH113

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第046522号

策划编辑 水 渊 责任编辑 黄 强 封面设计 于 涛 版式设计 张 杰
责任校对 姜国萍 责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	三河市杨庄长鸣印刷装订厂	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787×960 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	18.75	版 次	2011年6月第1版
字 数	350 000	印 次	2011年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	29.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 31521-00

前 言

20 世纪 60 年代以来,利用计算技术进行复杂工程的设计与优化已经成为常识,它可以提高工程设计的效率,以达到加快产品的更新、改善产品的性能与减小投资风险的目的。目前大家熟知的工程对象虚拟设计的思想是达到上述目标的探索。实现工程对象虚拟设计的方法是多样的。对工程对象复杂运动学、动力学与控制性态的分析及优化是虚拟设计的基础,是对力学工作者提出的任务。要实现这项任务,必须对复杂工程对象建立具有通用性与程式化特点的静力学、运动学、动力学与控制的数学模型,这些模型必须具有良好的数值计算的性态,必须便于计算机软件的实现。这种方法与传统方法的主要区别是它可以充分发挥计算技术的潜能,将工程对象的性态分析与优化的工作效率显著提高。

如果说计算固体力学的发展对大型工程结构的计算机辅助分析与优化起到了举足轻重的作用的话,那么计算多体系统动力学在复杂机械系统的运动学、动力学与控制性态的计算机辅助分析与优化方面扮演了相同的角色。虽然计算多体系统动力学的起步比计算固体力学的发展晚十来年,处理的对象更复杂些,但是四十多年来已取得了长足进展。机械系统通用的力学模型已从多刚体系统发展到刚-柔混合的力学模型。为了达到上述目的,国内外许多学者做出了巨大的努力。

1999 年洪嘉振教授出版了专著《计算多体系统动力学》(高等教育出版社),在筛选国内外计算多刚体系统动力学成果的基础上,以著者的观点从本质上对它们进行了分类,介绍了各类成果在建模理论、计算方法与软件工程方面共性的内容。此外,该书收录了洪嘉振教授及其研究群体自 1982 年以来在该领域的主要研究成果,详细介绍了他们在柔性多体系统动力学方面的主要研究成果——单向递推组集的建模方法。经国务院学位委员会力学学科评议组审议通过,该书列入首批教育部研究生工作办公室推荐的“研究生教学用书”。至今该著作仍是一本受读者欢迎的教材与参考书。

以刚体系力学模型解决复杂机械系统静力学、运动学与动力学的计算机辅助分析是国内外迅速发展的现代计算机辅助设计(CAD)的基础,它已经改变了传统的机械系统运动学、动力学的分析方法,以此原理开发的国际著名的软件系统如 ADAMS 软件等已经在机械、车辆、航天、机器人等领域得到了广泛的应用。是否掌握解决复杂机械系统静力学、运动学与动力学的计算机辅助分

析的原理与软件使用, 已经是考查力学、机械、航空航天类工科本科生能力的一种标志。面对这部分学生与大量工程一线设计人员知识更新的需求, 专著《计算多体系统动力学》的内容对于他们的研读有些困难。对他们来说需要的是面对工程分析对象如何合理地建立多刚体或刚-柔耦合力学模型, 如何合理选择计算方法及计算参数, 如何通过工程软件进行全过程仿真计算。为此, 洪嘉振教授于 1998 年在国内首先面对上海交通大学本科生开设了“复杂机械系统运动学与动力学的计算机辅助分析”课程, 同年完成了同名的教材。这门课程对学生的能力培养与学生毕业后适应社会的需求起到了重要的作用。

在本科教学实践中, 为了强化学生能力的培养, 不仅要求学生掌握建立机械系统力学模型与计算机辅助分析的原理和方法, 还要求学生能直接利用软件完成工程分析的全过程。我们选用了国际上使用较为广泛的 ADAMS 软件作为工具。通过多年的教学实践, 特别是刚-柔耦合多体系统动力学分析的要求, 需要对原教材进行修订。为了与国际接轨, 教材改名为《机械系统计算动力学与建模》。虽然教材中比较详细地介绍利用 ADAMS 软件处理系统运动学与动力学问题的过程与方法, 但是书名却没有出现 ADAMS。这是基于这样的考虑: 本教材不是 ADAMS 软件的使用手册, 重点是介绍建模理论与计算机辅助分析的原理与方法。同一个工程对象, 可以建立不同的力学模型。掌握了这种原理与方法, 不仅在使用软件时可以防止出错, 而且可以提高软件分析的效率与计算精度。由于这种原理与方法具有普遍性, 因此对于不同的软件均适用。

本书由北京航空航天大学王琪教授详细审阅并提出宝贵的修改意见, 在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限, 书中错误和疏漏之处在所难免, 恳望读者指教。

作 者

2010 年 6 月于上海交通大学

主要符号表说明

1. 本书中的数学与物理量涉及标量、矢量、标量矩阵和矢量矩阵 4 种。本书规定：标量用白斜体字母表示，例如 a, A 等；矢量用上加“ \rightarrow ”的白斜体字母表示，例如 \vec{a} 等；标量矩阵用粗斜体字母表示，例如 \mathbf{a}, \mathbf{A} 等；矢量矩阵用上加“ \rightarrow ”的粗斜体字母表示，例如 $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{A}}$ 等。

2. 一矢量与其在某一坐标系下的坐标阵在本书中经常出现，为了便于理解与表达，约定该矢量与其对应的坐标阵用同一斜体字母表示，前者为上加“ \rightarrow ”的白斜体字母，后者为粗斜体字母，例如矢量 \vec{a} 的坐标阵为 \mathbf{a} 。

主要符号表

a_i	柔性体 B_i 的模态坐标阵
A^i	连体基 \bar{e}^i 关于公共基 \bar{e} 的方向余弦阵
b	螺距
B_i	物体 i
c	线弹簧（或卷簧）的阻尼系数
d	矢量 \bar{h} 在滑移轴上的投影长度
d_0	线弹簧的原长
\bar{d}_i	物体 B_i 上与移动轴平行的连体矢量
\bar{d}_ρ^\perp	矢量 \bar{d}_ρ 逆时针转过 90° 得到的垂直矢量
d_i'	连体矢量 \bar{d}_i 在 B_i 连体基 \bar{e}^i 上的坐标阵
\bar{e}	公共参考基
\bar{e}^i	B_i 连体基
\bar{F}_i	作用于物体 B_i 的主动力的主矢
F_i	\bar{F}_i 在公共参考基上的坐标阵
F_i'	\bar{F}_i 在连体基 \bar{e}^i 上的坐标阵
F_i^a	物体 B_i 的广义主动力阵
\bar{F}_i^k	作用于物体 B_i 的点 P_k 上的主动力
F_i^k	\bar{F}_i^k 在公共参考基上的坐标阵
$F_i'^k$	\bar{F}_i^k 在连体基 \bar{e}^i 上的坐标阵
F^a	作用器的作用力
g	重力加速度矢量 \bar{g} 在公共基上的坐标阵
h	矢量 \bar{h} 在公共基 $\bar{x}\bar{y}$ 上的坐标阵
\bar{h}	点 P 相对点 Q 的矢径
J_i'	刚体 B_i 关于质心连体基的转动惯量张量在质心连体基上的坐标阵
k	线弹簧（或卷簧）的刚度
\bar{M}_i^k	作用于刚体 B_i 的点 P_k 上的主动力偶
M_i^k	\bar{M}_i^k 在公共参考基上的坐标阵
$M_i'^k$	\bar{M}_i^k 在连体基 \bar{e}^i 上的坐标阵

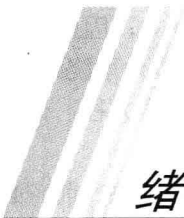
\vec{M}_i	作用于物体 B_i 的主动力关于质心 C_i 的主矩
M^a	马达驱动力偶矩
\mathbf{M}	多体系统的广义质量阵
N	多体系统物体的个数
\mathbf{q}	多体系统位形坐标列阵
$\dot{\mathbf{q}}$	多体系统位形速度列阵
\mathbf{q}_i	物体 B_i 的位形坐标阵
\mathbf{Q}	多体系统的广义力阵
R_i	齿轮 B_i 的半径
\vec{r}_i	连体基 (或浮动基) 的基点 C_i 相对公共参考基 \vec{e} 的基点 O 的矢径
\mathbf{r}_i	矢量 \vec{r}_i 在基 \vec{e} 上的坐标阵
\vec{r}_i^P	物体 B_i 上的任意一点 P 相对公共基基点 O 的矢径
\mathbf{r}_i^P	矢量 \vec{r}_i^P 在公共参考基 \vec{e} 上的坐标阵
s	约束方程的个数
\vec{s}_i	销子相对曲线滑槽极坐标原点的矢径
\mathbf{u}	非独立变量阵
\vec{u}_i	单位矢量
v	速度约束方程的右项
v_r	线弹簧相对速度在公共基上的坐标阵
\mathbf{w}	独立变量阵
\mathbf{Z}_i	物体 B_i 的广义质量阵
α_i	销子相对曲线滑槽极坐标原点的矢径与连体基 \vec{e}^i 的基矢量 \vec{x}^i 的夹角
δ	系统的自由度
Φ	系统的位形约束方程
Φ^K	系统的运动学约束方程
Φ^D	系统的驱动约束方程
Φ_q	约束方程的雅可比矩阵
Φ_u	约束方程对非独立坐标的导数阵
Φ_w	约束方程对独立坐标的导数阵
Φ_i^k	平移模态矩阵
γ	加速度约束方程的右项
γ_i	齿轮啮合点与轮心的连线与连体基 \vec{e}^i 的基矢量 \vec{x}^i 的夹角
λ	拉格朗日乘子坐标阵
Λ	欧拉四元素坐标阵

π_i	物体连体基（或浮动基） \bar{e}^i 相对于公共参考基 \bar{e} 的姿态坐标阵
θ	齿轮轮心的连线与公共基 \bar{x} 的夹角
θ_i	平面刚体 B_i 连体基 \bar{e}^i 的姿态角
θ_{i0}	平面刚体 B_i 连体基 \bar{e}^i 的初始姿态角
$\Delta\theta_0$	卷簧无力矩时的相对转角
$\bar{\rho}_i^P$	物体 B_i 上的任意一点 P 相对连体基 \bar{e}^i 基点 C_i 的矢径
$\rho_i'^P$	矢量 $\bar{\rho}_i^P$ 在连体基 \bar{e}^i 上的坐标阵
$\bar{\tau}_i$	凸轮接触点的切线矢量
τ_i'	矢量 $\bar{\tau}_i$ 在连体基 \bar{e}^i 上的坐标阵
$\omega_{\beta\alpha}$	卷簧相对角速度
$\bar{\omega}_i$	物体 B_i 连体基 \bar{e}^i 的角速度矢量
ω_i'	$\bar{\omega}_i$ 在刚体 B_i 连体基 \bar{e}^i 上的坐标阵
$\Psi_i'^k$	转动模态矩阵

目 录

绪论	1
第 1 章 平面运动多刚体系统运动学仿真	4
1.1 平面运动多刚体系统位形的描述	4
1.2 系统的运动学和驱动约束方程	5
1.3 常见平面铰的运动学约束方程	7
1.4 平面驱动约束方程	20
1.5 平面运动学方程的求解算法和多刚体模型的定义	23
1.6 平面速回机构的运动学仿真	27
1.7 凸轮-气门机构的运动学仿真	44
1.8 齿轮机构的运动学仿真	56
1.9 平面运动机械手的运动学仿真	68
第 2 章 空间运动多刚体系统运动学仿真	78
2.1 空间运动多刚体系统位形的描述	78
2.2 系统的运动学和驱动约束方程	81
2.3 常见空间铰的运动学约束方程	82
2.4 空间驱动约束方程	97
2.5 空间机械系统多刚体模型的定义	100
2.6 空间曲柄-滑块机构的运动学仿真	101
2.7 挖掘机运动机构的运动学仿真	118
2.8 空间并联机械臂的运动学仿真	131
第 3 章 平面运动多刚体系统动力学仿真	150
3.1 平面运动多刚体系统的动力学方程	150
3.2 系统的外力和力元	152
3.3 动力学逆问题与静力学问题	155
3.4 理想约束力(矩)与拉格朗日乘子的关系	156
3.5 动力学模型的定义和数值计算方法	158
3.6 平面速回机构的动力学仿真	166
3.7 滑杆-滑块机构的动力学仿真和静平衡分析	183
3.8 齿轮-齿条机构的动力学仿真	200

第 4 章 空间运动多刚体系统动力学仿真	210
4.1 空间运动多刚体系统的运动学描述	210
4.2 系统的外力和力元	214
4.3 空间多刚体系统的动力学方程	216
4.4 空间并联机械臂的动力学仿真	218
第 5 章 柔性多体系统动力学仿真	226
5.1 柔性多体系统的运动学描述	226
5.2 系统的外力和力元	228
5.3 柔性多体系统的动力学方程	230
5.4 刚-柔耦合多体系统的动力学仿真	233
附录 A ADAMS/View 界面及基本功能	245
A.1 启动 ADAMS/View	245
A.2 ADAMS/View 程序屏幕	246
A.3 ADAMS/View 命令的基本操作	247
A.4 ADAMS/View 的文件操作	249
A.5 定义建模环境	251
A.6 视图窗口设置	254
附录 B ADAMS/View 实体建模与仿真	257
B.1 几何建模的预备知识	257
B.2 几何建模	257
B.3 约束建模	263
B.4 施加外力	271
B.5 ADAMS/Flex 柔性体模块	278
中英文名词对照表	281
参考文献	285
作者简介	286



绪论

工程中的对象是由大量零部件构成的系统，在对它们进行优化设计与性能分析时可分为两类。一类称为结构，它们的特征是构件之间没有相对运动，如房屋结构，桥梁结构等，人们关心的是这些结构在受到载荷时的强度、刚度与稳定性，这是固体力学和结构力学研究的内容。另一类称为机构，其特征是系统在运行过程中这些部件之间存在相对运动，如航空航天器、机车与道路车辆、机械臂、机器人等复杂机械系统。上述复杂机械系统的力学模型由多个物体通过运动副连接，称为多体系统。

对于低速运动的实际工程对象，其零部件的弹性变形对其大范围运动性能的影响可以不考虑。在这种情况下，系统内的物体都可作刚体假设，这样的多体系统称为多刚体系统。对于多刚体系统人们关心的问题有两类。一是在不考虑系统运动起因的情况下研究各部件的位置与姿态，以及它们的速度和加速度，称为系统的运动学分析。由于系统各部件之间通过运动副与驱动装置连接在一起，上述关系可归结为各部件位置与姿态坐标的非线性代数方程，以及速度与加速度的线性代数方程。二是讨论系统的载荷与系统运动的关系，即动力学问题。已知外力求系统运动的问题称为动力学的正问题，通过求解非线性代数-微分混合方程，对微分方程进行积分得到加速度、速度和位移的时变规律。其间还可得到拉格朗日乘子的时变规律，通过拉格朗日乘子计算约束力。已知运动求驱动力（力偶）的问题称为动力学逆问题，现代的机械系统离不开控制技术，因此工程设计中经常遇到这类问题。对于动力学逆问题，不需要对微分方程进行积分，而是求解各部件位置与姿态坐标的非线性代数方程，以及速度与加速度的线性代数方程，再代入动力学方程计算与运动学约束和驱动约束相关的拉格朗日乘子，得到约束力和驱动力（力偶）的时变规律。当系统受到静载荷时，确定在运动副制约下系统的平衡位置以及运动副静反力，这类问题称为系统的静力学分析，是动力学分析的一种特殊情况。上述关系可归结为各部件位置与姿态坐标的约束方程和静平衡方程，通过求解非线性代数方程计算平衡时各部件的位置与姿态坐标，通过拉格朗日乘子计算约束力。

目前，工程中复杂机械系统的部分构件已采用轻质柔性材料，系统的动力学性能越来越复杂，系统的运行速度加快，对运行精度的要求越来越高，部件

作刚体假设的多刚体系统动力学已无法解释系统复杂的动力学性态，因此必须同时考虑部件大范围运动和构件本身的变形，这类系统称为柔性多体系统或刚-柔耦合系统。柔性多体系统动力学归结为求解非线性代数-微分混合方程，计算刚体运动变量和弹性变形坐标的时变规律。

图 0-1 给出了工程预研阶段的流程。在正式出工程图纸与加工生产前，必须对产品的构型与参数进行分析与优化，考察所定方案是否能达到设计前所提任务的要求，这个过程称为虚拟设计。虚拟设计的第一步是根据要求对产品的构型提出方案，建立相应的力学模型。然后，根据力学基本原理建立数学模型，如系统的运动学方程与动力学方程。通过数值分析得到运动学与动力学的性态，有的还必须进行运动学与动力学的仿真。如果经分析，性态没有达到任务的要求，则需进行系统参数的修正，或对系统力学模型作修改。前者仍可以使用先前的数学模型，后者则需重新推导。为了加快产品的更新，提高市场的竞争力，将投资风险降到最低，虚拟设计在现代工程中的地位愈来愈重要。

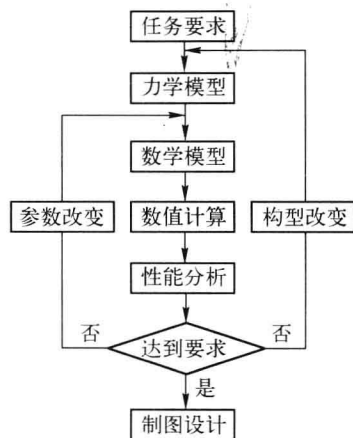


图 0-1 虚拟设计

显然，在分析一个复杂系统的性态时，上述流程中的力学模型的输入、数学模型的构成、数值计算的进行和计算结果的输出等环节需要一个功能齐全的软件系统来支撑。20 世纪 60 年代以来，针对不同的力学模型，国内外开发了大量的多体系统动力学分析软件，有效地应用于机械系统性态的计算机辅助分析，其中 ADAMS 软件是世界上应用广泛的机械系统动力学仿真分析软件。

所有机械系统动力学仿真分析软件面向用户的是力学模型的输入、计算方法的选取和计算结果的输出。通常仿真计算在后台进行。显然，工程对象的力学模型对于仿真结果的正确性是至关重要的。因此本书重点介绍面对工程对象需要解决的任务，如何建立正确、有效的力学模型。面对机械系统构型的复杂性，如何建立计算规模较小的力学模型是实现复杂系统运动学和动力学分析的前提。由于运动学问题和动力学问题的研究目的不同，因此力学模型简化方案也不同。本书通过列举大量的工程实例，对运动学模型和动力学模型简化方案进行详细介绍。

全书分为 5 章。

第 1 章与第 2 章分别介绍平面运动与空间运动多刚体系统的各类运动学约束方程与驱动约束方程、运动学数值计算方法和应用 ADAMS 软件对多刚体系

统运动学仿真的技术。

第 3 章与第 4 章分别介绍平面运动与空间运动多刚体系统动力学方程的建立、动力学数值计算方法和应用 ADAMS 软件对多刚体系统动力学仿真的技术。

上述 4 章中安排有大量实例介绍对一个工程对象建立多种力学模型的原理与方法。通过用 ADAMS 软件进行分析,比较不同力学模型的仿真效果。

第 5 章介绍柔性多体系统动力学方程的建立、动力学数值计算方法和应用 ADAMS 软件对柔性多体系统动力学仿真的技术。通过仿真实例说明工程对象简化为柔性多体系统力学模型还是多刚体力学模型的条件。

第 1 章

平面运动多刚体系统运动学仿真

工程中的复杂机械系统是由多个具有相对运动的构件组成的, 通过运动副相互连接。对于低速运动的实际工程对象, 其零部件的弹性变形并不影响其大范围运动的运动性态, 在此种情形下, 系统中的物体可作刚体假设, 这样的多体系统称为多刚体系统。当多体系统的各运动构件作平面运动时, 多体系统称为平面运动多刚体系统。

本章介绍平面运动多刚体系统运动学计算机辅助分析的过程, 包括建立力学模型、建立数学模型、数值计算和结果输出。同时选取一些典型的工程实例, 对同一工程对象, 建立了多种力学模型。并用 ADAMS/View 进行数值仿真, 根据运动副的类型计算约束方程的个数和平面多刚体系统的自由度, 在保证相同自由度的前提下, 通过应用组合铰减少系统的约束方程的个数, 并用平面多刚体系统运动学仿真实例验证了简化模型的正确性和有效性。

1.1 平面运动多刚体系统位形的描述

如图 1-1 所示, 对于由 N 个作平面运动刚体组成的多刚体系统, 首先在系统的运动平面上定义一公共参考基, 记为 $\bar{e} = (\bar{x} \ \bar{y})^T$, 基点记为 O 。取刚体 $B_i (i=1, \dots, N)$ 上某一点 C_i 为基点建立一连体基, 记为 $\bar{e}^i = (\bar{x}^i \ \bar{y}^i)^T$, 连体基的基点 C_i 相对 \bar{e} 的基点 O 的矢径记为 \bar{r}_i , 该矢量在基 \bar{e} 的坐标阵为 $\mathbf{r}_i = (x_i \ y_i)^T$ 。连体基 \bar{e}^i 的基矢量 \bar{x}^i 正向与公共参考基 \bar{e} 的基矢量 \bar{x} 正向的夹角, 为刚体 B_i 的姿态角 θ_i , 该刚体的位形由坐标阵 \mathbf{r}_i 与姿态角 θ_i 确定, 它们共同构成了刚体 B_i 的位形坐标阵, 记为

$$\mathbf{q}_i = (\mathbf{r}_i^T \ \theta_i)^T = (x_i \ y_i \ \theta_i)^T \quad (i=1, \dots, N) \quad (1.1-1)$$

组集这 N 个坐标列阵, 构成了描述多刚体系统位形的坐标列阵

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T \ \dots \ \mathbf{q}_N^T)^T \quad (1.1-2)$$

多刚体系统位形坐标阵的特点是各坐标阵 $\mathbf{q}_i (i=1, \dots, N)$ 都相对公共基而

言, 称 \mathbf{q} 为刚体系的笛卡儿 (R.Descartes) 位形坐标列阵, 该坐标列阵坐标的个数为 $n = 3N$ 。

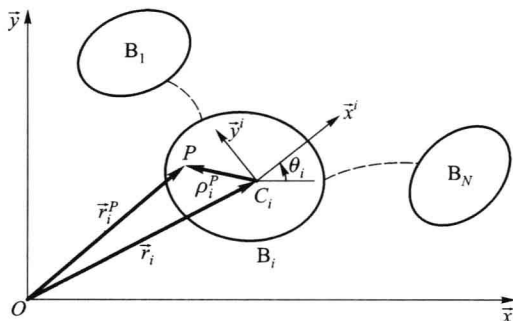


图 1-1 笛卡儿坐标描述的刚体系位形

设 P 为固结在刚体 B_i 上的任意一点, \vec{r}_i^P 为点 P 相对于公共基基点 O 的矢径, $\vec{\rho}_i^P$ 为点 P 相对于连体基 \vec{e}^i 基点 C_i 的矢径, \vec{r}_i^P 可表示为

$$\vec{r}_i^P = \vec{r}_i + \vec{\rho}_i^P \quad (1.1-3)$$

亦可表示为

$$\mathbf{r}_i^P = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}^i \boldsymbol{\rho}_i^P \quad (1.1-4)$$

其中, \mathbf{r}_i^P 为矢量 \vec{r}_i^P 在公共基 \vec{e} 上的坐标阵, $\boldsymbol{\rho}_i^P$ 为矢量 $\vec{\rho}_i^P$ 在连体基 \vec{e}^i 上的坐标阵, \mathbf{A}^i 为连体基 \vec{e}^i 关于公共基 \vec{e} 的方向余弦阵, 可表示为

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad (1.1-5)$$

1.2 系统的运动学和驱动约束方程

1.2.1 运动学约束方程

对于刚体系统, 一般情况下刚体之间存在约束, 一个刚体的运动限制另一刚体的运动, 将这种限制邻接刚体运动的约束称为铰 (或运动副)。由于约束的存在, 描述刚体系的位形坐标不完全独立, 在运动过程中, 它们存在着约束关系, 这些约束关系的解析表达式构成了运动学约束方程。

局部法是目前复杂机械系统建模的普遍方法, 它是从每个铰所关联的刚体偶对局部出发, 根据铰的几何特性建立邻接刚体的坐标间的约束方程。对于同一类铰, 约束方程在形式上存在共性, 系统的约束方程是各铰的约束方程的组集。

系统的运动学约束方程一般可表达为

$$\Phi^K(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0} \quad (1.2-1)$$

其中

$$\Phi^K = (\Phi_1^K \quad \dots \quad \Phi_s^K)^T \quad (1.2-2)$$

s 为约束方程的个数。由于运动学约束方程不显含时间和速度坐标，为完整定常约束，系统的自由度等于系统的坐标数减去系统独立的约束方程的个数。

对于完整约束，描述系统位形的独立坐标数为系统的自由度，记为 δ 。如果上述 s 个完整约束的约束方程相互独立，系统的自由度为

$$\delta = n - s = 3N - s \quad (1.2-3)$$

1.2.2 驱动约束方程

对于有 n 个坐标， s 个独立约束方程的系统，为了确定各位形坐标随时间的变化规律，一般采用附加驱动约束的方法，需要附加与系统的自由度 δ 相同的驱动约束，驱动约束方程为

$$\Phi^D(\boldsymbol{q}, t) = \mathbf{0} \quad (1.2-4)$$

其中

$$\Phi^D = (\Phi_1^D \quad \dots \quad \Phi_\delta^D)^T \quad (1.2-5)$$

将系统的附加驱动约束方程与运动学约束方程组合，即构成刚体系的一组新的位形约束方程

$$\Phi(\boldsymbol{q}, t) = \begin{pmatrix} \Phi^K(\boldsymbol{q}) \\ \Phi^D(\boldsymbol{q}, t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.2-6)$$

可以看出，式 (1.2-6) 是含有 n 个位形坐标的非线性代数方程组。该方程组的方程个数为 n ，参变量为时间 t ，由此方程组可解得系统位形坐标 \boldsymbol{q} 的时间历程。

1.2.3 速度和加速度约束方程

将式 (1.2-6) 对时间 t 求导

$$\dot{\Phi} = \Phi_q \dot{\boldsymbol{q}} + \Phi_t = \mathbf{0} \quad (1.2-7)$$

或改写为

$$\Phi_q \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} = -\Phi_t \quad (1.2-8)$$

其中 Φ_q 为约束方程的雅可比 (C.G. J. Jacobi) 矩阵