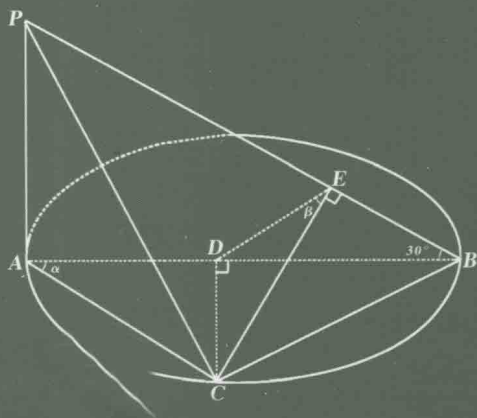




数学求异思维

程新民 著



新华出版社

数学求异思维

程新民 著

新华出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学求异思维/程新民著.

北京: 新华出版社, 2010. 5

ISBN 978-7-5011-9207-6

I. ①数… II. ①程… III. ①数学—思维方法—研究 IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 060523 号

数学求异思维

责任编辑: 原兴伟

装帧设计: 韩 唐

出版发行: 新华出版社

地 址: 北京石景山区京原路 8 号

网 址: <http://www.xinhupub.com>

邮 编: 100040

经 销: 新华书店

印 刷: 山东华鑫天成印刷有限公司

开 本: 170 毫米×230 毫米 1/16

印 张: 21.5

字 数: 330 千字

版 次: 2010 年 5 月第 1 版

印 次: 2010 年 5 月山东第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5011-9207-6

定 价: 49.00 元

序

思维是人脑对客观事物的本质属性和内部规律性的间接和概括的反映。

数学思维是人类的最高思维形式之一，学生数学思维发展的关键期和成熟期为七年级和高中一年级。因此中学阶段对学生思维力的培养最为重要。

本书着力“思维”，立意“求异”，对中学数学思维进行了大胆的梳理和剖析，对中学数学问题解决进行了有益的探讨和归纳。特点有三：

一、原创性、系统性强：本书不是支离破碎地介绍一些求异思维方法，而是全方位地对各种求异思维方法进行了系统的探讨，将整个中学数学的思维方式进行全面梳理，数学思维的层次性、递进性、全面性强，整个脉络清晰系统，覆盖面大，构成了一张全方位辐射的思维网。同时本书将中学范围内的求异思维划分为同学科求异和跨学科求异，分法新颖，层次分明，使思维过程的空间、跨度更清晰，更明确，具有一定的原创性，目前在中学数学思维教学中尚属首见。

二、视角独特、实用有效：本书在展示数学思维过程中，始终围绕一个“异”字，既对问题不是按照常规思路去解答，而是力图寻求更便捷、更灵巧的解答思路。书中所有题目都给出了不同常规的独特解决方案，充满技巧，缩短路径，充分展示了数学的抽象美、技巧美。另外难能可贵的是，这些思维方式和解题途径具有很高的实用价值，对中学数学各类竞赛、对中高考的考前复习和临战应考有明显的帮助借鉴和参考作用。

三、注重升华、价值认同：数学素养的生成在于个体对数学价值的认同。数学价值认同的内在动力在于数学思维的训练与养成；数学价值认同的技术保障在于数学方法的学用结合；数学价值认同的基本要领在于数学思想的提炼；数学价值认同的重要标志在于数学精神的形成与超越。本书编织的“思维网”、“思维链”、“思维块”，构成了形成数学素养的重要基础，且作者在书中较全面地论述了数学求异思维与数学素养的关系，将数学思维训练提高到了与数学方法、数学思想、数学人文精神相结合的层次，确属升华。

正是由于具备了上述特点，本书的价值也就不言而喻。从教学角度看，在中学各学科中，进行思维训练，数学课潜力最大，优化学生思维品质，数学课条件最佳。因此在教学中，教师要千方百计地借助数学知识学习，全面揭示数学思维过程，并将知识发生、发展过程与学生学习知识的心理活动统一起来，在对学生不断的“思维体操”训练中，引导学生逐渐形成符合科学规律的思维习惯，掌握正确的科学思维方法，从而形成整体优化的思维品质。本书为广大中学数学教师提供了重要参考。从学习角度看，本书是学生较为难得的工具书、引路书、实战书，更是引领学生形成数学价值认同、提高数学素养乃至终身数学意识、数学能力的启迪书、指南书。

程新民校长是一位勤于钻研的学者型校长，是一位善于总结的思想型校长。“齐鲁名校长”这一称号的荣获，是对他勤奋工作和深邃思想的肯定，也是他迈向教育家校长的一种鞭策。我有理由相信，在未来的探索之路上，他会有更多的对教育对教学对数学的理解和建树！

时间仓促，未及细论，仅略序之。

李师正

二〇一〇年元月廿七日

目 录

CONTENTS

序	1
第一章 数学求异思维	
第一节 数学思维漫谈	1
第二节 数学思维基本方法	9
第三节 数学求异思维	13
第四节 求异思维与数学素养	17
第二章 同学科求异	
第一节 正向求异	25
第二节 反向求异	63
第三节 介入求异	81
第四节 构造求异	109
第五节 整体求异	131
第六节 分类求异	147
第七节 类比求异	171
第三章 跨学科求异	
第一节 数形求异	193
第二节 渗透求异	219
第三节 参与求异	250
第四节 综合求异	281
后 记	331

第一章 数学求异思维

著名数学家、教育家 G·波利亚曾经说过：“什么是数学的技能？数学的技能就是解题的能力——不仅能解决一般的问题，而且能解决需要某种程度的独立思考、判断力、独创性和想象力的问题。”这里所说的解题能力，包括单学科与多学科的深入与综合性的问题。

求异思维既是独立思考、判断力、独创性和想象力的集中体现，又是这些要素的全面链接和全面展开。

第一节 数学思维漫谈

数学世界是一个思维的世界。数学中认识概念，学习公理、定理、法则，探求解题方案等，一刻也离不开思维。思维是人类大脑的一种高级而复杂的运动，是大脑对外界事物的反映与信息加工。心理学上，思维指在解决问题的过程中，人脑里限于意向、符号以及用符号表示的命题的没有外现的内部操作活动，说得通俗一点，思维指运用智能寻求问题的答案或寻求达到实际目的的手段。

现代教育思想认为：充分暴露思维过程是课堂教学的精髓。当今时代是知识激增、信息高度发达的时代，现代社会对人才的要求主要表现为智能要求，这就引起了数学教学性质和任务的根本变革。从目的观上看，现代教学论认为，数学教育的任务是“形成和发展学生的具有思维特点的智力活动结构”，也就是说，现代数学教学不仅要向学生传授知识，而且要培养数学能力，特别是发展学生的思维能力。因此现代教学论已经把数学教学目的提到了“知识——能力——思维”的高度。从结构观上看，苏联著名数学教育家 A·A·Comlrp 在《数学教育学》一书中指出：“数学教学是数学活动（思维活动）的教学”，而不能是数学知识即数学结果的教学。这种数学教学的结构观明确指出了揭示数学思维过程才是数学教学中最重要、最有意义的成份。

事实上，数学中存在着两条主线，一条是数学的知识系统，反

映着知识间的纵向联系；另一条是数学的思维和方法系统，反映了知识间的横向联系。现代数学教学论认为后者是形成能力的重要因素，因此数学教学应特别强调展现数学思维过程和加强数学思想方法的训练。

由此可见，善于揭示数学思维过程、提炼数学的思想方法，培养学生分析问题、解决问题的思路和能力，既是现代教学思想的要求，也是数学教学的艺术。而深刻理解和正确分析数学思维过程，善于把握数学的思想方法和证解题思路，则是数学教师的基本功和中学生学习掌握数学的努力方向。

然而在实际数学教学中，由于受传统教学方法和观念的影响，往往存在着忽视思维过程或思维过程展示不足的倾向，特别在数学证解题教学中，往往还存在着就题论题、单刀直入、急于展示结果的现象，而没有抓住训练思维这一中心，渗透数学思想，突出解题方法，培养数学能力。其结果是学生在独立思考和独立证解问题时，往往思维受阻，难以形成畅通而清晰的解题思路。

当然，很多学生证解数学问题时无从下手、中途辍解、思维受阻的原因是多方面的，除上述教学上的原因外，还有学生学习上的原因和问题本身难易度等缘故。

从心理学的角度看，造成学生证解题思维受阻的原因可视为思维过程中某个环节上出了障碍，搞清这些思维障碍的具体表现和存在形式，对提高证解题能力是十分必要的。

1. 首因效应的影响

首因效应即第一印象导致的先入为主的心理倾向。这种倾向往往

使学生拿到数学题目时只从一个角度片面地、静止地、孤立地解答问题，思维只局限在与题目相关的定义、定理和公式上，解题方法只沿袭课堂上教师传授的方法和教科书上的方法，而不能多角度、多层次地理解和审视问题。首因效应的影响，往往使学生集中式思维有余，发散式思维不足。

证解题时克服首因效应的影响，很重要的一点是从固定的思维模式中解脱出来，数学中从小学的四则运算法则到微积分的求导求积法则，都有一套固定的思维模式，如现代数式的四则运算，解方程和方程组的消元、降次法，因式分解中的提取公因式法、公式法和分组分解法，几何作图中的三角形奠基法、位似相似法，数列求和中的裂项法，证明不等式的比较法，基本不等式法、判别式法，三角中的有理置换法、恒等变形法，立体几何中的降维法，解析几何中的解析证法，求轨迹方程的参数法等等。这类固定的思维模式一般通过模仿不难掌握。中学生在证解题时一方面要将其转化为熟练的基本技能，做到应用得正确、迅速、合理，另一方面又必须善于摆脱固定思维模式的束缚，因为许多题目监测的不是简单套用这类固定思维模式的能力，而是触类旁通、灵活选择解题方法、综合运用数学知识的能力。如求直线 $x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1t_2 = 0$ 与抛物线 $x^2 = 2qy$ 相切的条件，一般是通过方程组（直线方程与抛物线方程联立）有两组相同的实数解来求得，但如何求实数解却直接体现着解题的灵巧程度。通常是从直线方程（一次方程）中解出 x 或 y 的表达式，然后代入抛物线方程（二次方程），最后得出具体的解。这种解法运算量大且显得拙笨。若从抛物线方程

解出 $y = \frac{x^2}{2q}$ ，代入直线方程得： $x - (t_1 + t_2) \cdot \frac{x^2}{2q} + 2pt_1t_2 = 0$ 即，

$(t_1 + t_2)x^2 - 2qx - 4pt_1t_2 = 0$ 由此得相切条件为：

$$\Delta = 4q^2 + 16pqt_1t_2(t_1 + t_2) = 0, \text{ 即 } q + 4pt_1t_2(t_1 + t_2) = 0.$$

可见即使对于这类有固定思维模式的问题，仍然存在一个灵活运用问题，千万不可墨守成规，一成不变。掌握这种呆板与灵活的辩证方法，是提高数学素养、学好数学的关键。

2. 心理平移调整思维的能力较差

证解题的过程首先是审题后作出决策的过程。由于问题的复杂性，决策难免一定正确，即使决策正确在实施过程中也可能受阻。因为心理学研究表明，根据既定原则和事实，遵循着一定法则去思考 and 推究下去，条件限制越来越多，思路越来越窄，其结果可能会陷入困境或钻进牛角尖。这就必须从尝试的反馈中迅速作出判断，及时调整思维，平移到新的角度去考虑问题，作出新的决策，寻找替换方案。有时一道数学题目是需要经过多次决策、调整和尝试才能找到正确的解题方案的，中学生往往不善于这样的心理平移而造成思维受阻，如求函数

$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(x-5)^2 + 9}$ 的最小值，由于这道题目是求函数的最值问题，学生拿到手后都是从通常的求二次函数的极值方法着手考虑，结果思维受阻，无法进行下去，若引导一下调整思维转换方案，把问题看成解几问题（求在 x 轴上的动点 $P(x,0)$ 到两定点 $A(0,4)$ ， $B(5,-3)$ 的距离之和的最小值）或看成复数问题（求 $f(x) = |z_1| + |z_2|$ 的最小值，其中 $z_1 = x + 4i, z_2 = (5-x) + 3i$ ，只要分别用解几对称知识和

模的不等式 $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ 就可以使问题简捷地得到解决。

3. 良好思维品质尚未形成

思维是智力活动的核心。思维的广阔性要求我们善于从多方位、多角度去分析研究问题，着眼于事物之间的联系和关系，找出问题的本质，并能在许多不同知识和实践领域内进行创造性的思考；思维的深刻性要求我们善于钻研问题，从纷繁复杂的现象中抓住事物的本质和核心；思维的敏锐性要求我们善于迅速而正确的看出事物的实质，抓住问题的关键，作出正确的判断，当机立断提出解决问题的正确途径和方法；思维的灵活性要求我们善于迅速引起联想，建立思路，根据情况的变化进行自我调节，并具备一定的应变能力。

不少中学生证解题时思维受阻的原因，是因为上述思维品质没有很好的建立起来。如思维的深度不够、联想较差、抓不住问题的实质和关键等，特别是受心理惰性即思维的懒惰性的影响，证解题时懒于思考，对一些似曾相识的问题，往往不愿意认真分析，不深究其相异之处，简单套用同一种方法，结果造成失误。培养良好的思维品质不是一朝一夕的功夫，只有靠平时的勤思多练，要通过勤思多练逐渐做到克服思维的封闭状态，培养思维的深刻性；克服思维的惰性状态，培养思维的敏锐性和灵活性；克服思维的凌乱状态，培养思维的组织性；克服思维的保守状态，培养思维的创造性。

4. 负迁移和潜在假设的影响

负迁移指已有知识对新知识学习所产生的消极作用，它容易使学生在证解题时新旧知识产生干扰，发生混淆，导致证解题失误。潜在假设指在题设中没有的条件，或没有经过证明而得的结论，在证解题

时不自觉地予以肯定而加以利用。如已知 $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ ，求证 $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$ 。这道题目，不少学生证明时根据 $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ 而设， $\sin \alpha = a, \cos \alpha = b$ 然后代入原式，再化简证明。事实上这种证法是错误的。这里学生利用了潜在假设 $a^2 + b^2 = 1$ ，而题设中是不具备这个条件的。

负迁移和潜在假设虽不直接阻碍思维，但却容易使思维偏离正确航道，因而在数学思维训练中应尽力克服。

5. 思维定势的作用

思维定势指人们心理活动的一种预备状态，它影响并决定同类问题心理活动的趋势。在证解题过程中，受思维定势的影响，容易照搬过去的经验去解决似乎类似的问题，从而将思维禁锢在“定势”之中，难以适应变化了的情况，难以将思路开拓出去。

思维定势和首因效应都容易使证解题思维陷入固定模式、固定方法、进而走入死胡同，在培养数学思维时应引起高度重视。

为克服上述思维障碍，一方面数学教学要充分展示思维过程，另一方面中学生要通过大量的独立思考和证解题实践，日积月累，逐渐形成灵活、畅通的思维渠道。

第二节 数学思维基本方法

现代思维科学认为，思维活动是借助于一定的思维方法而开展的。数学思维是人脑对数学对象的本质属性和内在联系的间接、概括的反映过程，而数学思维方法则是人们对数学对象的内在联系的能动反映。从思维方法的本质看，数学思维方法是对数学思维内容进行加工的方式、手段和程序，具有思维规则和工具的作用，它是一种动态的思维能力因素，是由思维起点到达思维目的的桥梁。

我国数学教育家曹才翰先生指出：“数学教育的任务在于使学生形成完善的思维结构，并借助于这种结构去掌握数学知识、提高数学能力。”数学思维结构是一个三维的主体结构，三条坐标轴分别是思维内容、思维方法和个体发展水平。思维内容是指主体面临的数学思维对象，思维方法是思维活动的步骤和格式，是对思维内容进行加工的方式和程序，个体发展水平则指主体的思维品质和非智力品质，三者相互作用构成了数学思维能力，其中思维方法是思维主体与思维内容的中介和桥梁，决定着思维活动的成败和质量，因而研究数学思维方法具有重大的意义。

由于数学知识的丰富多彩和数学内容的复杂性，决定了数学思维及其方法的多层次性，因此首先应搞清数学思维及其方法的层次、数学思维方法与数学思想方法的关系。虽然这一问题尚在探讨之中，但

大体可分为三个不同的层次：

1. 数学基本方法

数学基本方法是数学思想的具体体现，是解决问题的手段。如配方法、换元法、判别式法、参数法、待定系数法、反证法、数学归纳法等。这些具体方法提供了解决数学问题的基本技能和技巧，是证解数学问题不可缺少的基本手段、工具和方法，中学生学习数学时应熟练地掌握。

2. 数学思维方法

数学思维方法指数学的思维操作方法，它既是思考问题的方法，也是解决问题的手段，它比数学基本方法有较高的层次。

一般来说，数学思维方法可分为逻辑思维方法和形象思维方法，这两种思维方法是各种数学综合思维方法的基础。

数学中的逻辑思维方法，是对数学概念、判断和推理进行加工改造，以形成新的概念、判断和推理的方法。数学逻辑思维方法的内容和表现形式十分丰富，已经成为一套完整的方法体系。常用的具体方法有：

综合——由因导果的思维方法

分析——执果索因的思维方法

类比——确定异同的思维方法

划分——区分种类的思维方法

归纳——从个别到一般的思维方法

演绎——由一般推个别的思维方法

抽象——抽取本质属性的思维方法

概括——归结共同点的思维方法

这些逻辑思维的方法虽然在内涵上各有不同，但都具有抽象性和逻辑推演性的特征，应用熟练与否，都体现着数学三大能力（运算能力，逻辑思维能力，空间想象能力）中最基本最重要的能力——逻辑思维能力的大小。

数学中的形象思维方法指对数学形象进行加工并形成新形象的方式和程序。数学中的各种图形、图表、解析式等反映于人脑中的事物的映像，以物化的形式再现出来，就是数学形象。这种对数学形象进行加工改造以形成新形象的形象思维方法主要包括联想和想象：

联想——一事物到他事物、由此及彼的思维方法。

想象——在原有形象基础上进行加工改造形成新形象的思维方法。

形象思维方法具有形象性和跳跃性的特征，它与逻辑思维方法不仅互相区别，而且互相联系，互为补充。一般来说，对数学形象的加工需要运用联想和想象等形象思维方法，对数学概念、判断、推理的加工，需要分析、综合、归纳、演绎等逻辑思维方法。在实际应用中，两者是结合在一起，并互相渗透的。如数形结合就是逻辑思维方法指导下的形象思维方法，是一种切实有效的数学综合思维方法，它已经上升到了更高的层次，即数学思想方法的层次。

3. 数学思想方法

在数学发展的漫长过程中，随着人们对一些重大概念、原理的认识不断深化，除逐渐形成了概念、原理本身外，同时还形成了对它们的正确看法和观点，总结出了一些行之有效的思想方法。

这些数学思想方法较之数学基本方法和思维方法有更高的层次，具有观念性的地位，是分析问题、解决问题过程中思维活动的导航器，对培养学生运用数学的意识起着巨大作用。中学数学中较突出的有数