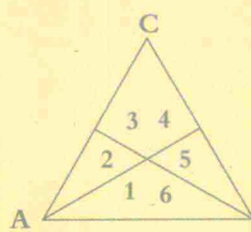
选举几何学

胡卫群 盛立人 肖 箭 杨明辉 蒋华松◎著

VOTING GEOMETRY



科学出版社

内 容 简 介

“绝对公平的选举是不可能实现的！”当美国经济学家 K.J.Arrow 在 1952 年向世界发表这一定理时，人们才开始真正认识决策和民主. 自此，选举学正式成为一种独立完整的理论.

本书从介绍 Arrow 定理及其简化版的证明入手，进而讨论后 Arrow 时代选举理论的面貌，即 D.G.Saari（他创建了初等几何学方法）和 G.Chichilnisky（她创建了拓扑方法）对选举理论所作的重要贡献. 阅读本书可以了解社会发展中令人意想不到的真实轨迹，更重要的是，学会如何应用最为恰当的选择方法，让智慧指导生活决策.

本书可供管理人员、决策人员等社会各界人士阅读，也可供高等院校及科研机构的数理社会学研究人员、相关专业师生参考和使用.

图书在版编目(CIP)数据

选举几何学 / 胡卫群等著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-031392-8

I. 选… II. 胡… III. 几何学–研究 IV. 018

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第107104号

责任编辑：侯俊琳 邹 聪 房 阳 / 责任校对：纪振红

责任印制：赵德静 / 封面设计：无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011年7月第一次印刷 印张：13 插页：2

印数：1–3 000 字数：243 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序

通过对经济、管理等学科的渗透，数学早已吹响了向人文科学进军的号角，特别是社会选择理论，其领军人物当推诺贝尔经济学奖得主 K. J. Arrow 教授. 他于 1952 年发表的公平选举不可能性定理，开创了现代选举理论的滥觞.

Arrow 的工作不但是对于 200 多年前由两位法国数学家 Borda 与 Condorcet 创导的将数学引入选举理论的局面的总结；而且，仍然是得益于数学，使社会学的一个重要分支——社会选择——发展成为理论与实践完美结合的人文科学之一.

在 Arrow 之后，经过美国西北大学 Sarri 与哈佛大学 Daugherty 等数学家的努力，将正交补空间分解与群表示论引进选举理论中，这使得深入揭示与刻画社会选择理论的内核，即选举悖论，成为可能. 到了 20 世纪七八十年代，联合国首席经济理论教授，美籍阿根廷女数学家 Chichilnisky 基于研究连续商品空间的需要，将代数拓扑引进选举理论. 她不但改写了 Arrow 的结果，而且获得了更进一步的发展，即她的有关商品空间可缩性的新的不可能性定理，从而为选举理论，也为社会学的持续发展竖起新的里程碑：一门新的学科——拓扑社会选择理论——脱颖而出. 所有这些理论为数学应用描绘出一幅斑斓多彩的壮丽画卷.

如此丰富多彩的数学应用成果，亟须一份向国人介绍这些理论的综述，以适应我国科学技术现代化的进程. 遗憾的是，以我的孤陋寡闻，似乎国内还没有这方面的专著. 应当感谢胡卫群、盛立人教授这个团队撰写的《选举几何学》一书，此可谓是一本及时之作. 书中内容基本上包含了我上面所说的理论成果，为国内愿意进入此领域的专家或青年学者提供了难得的入门之钥.

胡卫群与盛立人教授关注选举理论由来已久. 几年前他们曾出版过通俗教材《社会科学中的数学》一书，其中已部分地向人们展示了选举理论的复杂性. 此书

曾产生过一定影响，受到好评．现在他们又撰写了这个姐妹篇，为推动我国数学事业的发展，尽了他们应尽的力量．因此我强烈推荐此书出版．相信此书的出版对我们发展中的应用数学一定大有裨益．

中国科学院院士

李邦河

2010 年 12 月

前　　言

作者想借此机会来说一下本书的由来与过程.

我们关注选举理论已有好多年, 最初是从数理经济学入门, 由此涉及以选举理论为主导的社会选择理论, 接着开始尝试数学对社会学的应用. 作为一个导引, 我们已将这些材料编入在科学出版社出版的《社会科学中的数学》一书前三章中. 其中包含了本书将要详细讨论的 Arrow 定理的证明. 而所有的讨论仅止于 1952 年 Arrow 发表不可能性定理这一时期. 由于该书是通俗教材, 我们为了面向更多的读者, 在数学上常常是浅尝辄止, 从出版效果来看, 对其感兴趣的读者很多, 反馈意见也很多. 不少读者反映该书给人感觉(我们自己也如此)常常是"隔靴搔痒". 就是说, 读者们希望知道数学对社会学更深入的应用.

其实, 对于选举理论的后 Arrow 时代, 数理社会学和社会选择理论的发展是相当神速的, 国外已经出现了一些专门期刊, 其论文数量一如恒河沙数; 还有不少以手册为标题的大部头著作, 其类别相当于工具书. 然而这方面的专著在国内几乎没有. 如何将这些理论方法介绍给读者, 最大的困难便是在浩瀚的资料面前寻找切入点. 因此, 尽管我们的愿望是着手整理一本陈述这一理论的书, 却始终没有动手写作的勇气.

正当我们踌躇不前的时候, 有机会得到美国西北大学 Saari 教授所著的与本书同名的两本书《选举几何学》(*Geometry of Voting*)和《选举的几何基础》(*Basic Geometry of Voting*). 这两本书利用不多的数学方法讨论了各种选举方法和选举悖论的成因, 属于半通俗性质,曾经成为美国的畅销书. 在通读这两本书的讨论班中, 我们发现Saari在诸多结论的证明中包含了太多Poincaré式的证明, 并不适宜于一般读者. 因此我们更看重的是它们的材料和结构. 此外, 这两本书也没有包含选举理论最新成果——Chichilnisky 的拓扑社会选择理论. 但无论如何它们给出了一个好框架, 使我们撰写一本专著的信心大增. 这便是我们开始动笔的诱因.

我们的另一个困惑之处是, 本书包含的宝贵资料, 尽管可望弥补国内数学出

版物的空白, 但苦于目前数学出版市场的不景气, 难有出版社能眷顾. 为了能吸引更多的读者, 我们尽量采用更通俗的陈述方式, 以期任何读者都可以无障碍地阅读本书前两章.

我们在撰写本书过程中曾经吸收了大量的资料(但 Saari 的书的材料用得并不多), 更是广泛听取了许多经济学家的提示和意见. 因为人数众多, 我们也就不再一一致谢. 但特别要感谢的是美国西北大学与乔治城大学几位博士生曾不辞辛苦地为我们寻觅资料, 这使本书得以顺利完成.

因为得到南京林业大学和安徽大学各位领导的支持和大力帮助，本书不但顺利出版，而且出版周期大为缩短，我们谨此表示衷心感谢.

中国科学院李邦河院士一直关注我们这个团队的工作，在得知本书将付梓时，欣然为之作序, 为此让我们在这里向他表示诚挚的谢意.

对于科学出版社不计市场赢利得失，毅然支持本书出版的敬业精神，理当特别说明, 以申谢意.

还要声明一句的是，我们都只是普通的数学工作者，对于社会学与经济学所知不多，或许更不清楚这些学科对数学的真正要求；此外，即使对选举理论本身，也是少有研究工作，体会不深，所以书中不妥之处在所难免，还希望专家们多多批评指教.

作者谨识

2011 年 5 月

目　　录

引　论

在人类诸多活动中，可以毫不夸张地说,选择几乎是与生俱来的行为之一. 小到两人打赌，大至国家选举，无不与选择有关. 到了文明教化社会，选择便以选举或表决方式固定下来，成为人人遵守的文明社会的公约. 人们通过选举产生群体或社会的政策或决议. 一个民主社会的基石便是公平性和定期选举. 而选举活动的公平性则表现在，选举应当体现出大多数投票人的意向与偏爱.

众所周知，社会必须在大量的政策之间进行遴选和抉择. 在一宗选举活动中，我们把供社会或群体选择的许多对象称为候选人(在社会学里它们可以是一些议案，在经济学里它们可能是一些商品，在国家事务里可能是外事、财政、军事政策等)，但是群体的每一个个体对这些候选人都有自己的偏爱意向. 因此，所谓选举者便是要从错综复杂的个体偏爱中谋求一个(最好还是唯一的一个)最终候选人，或是候选人的一个排序，作为群体的最终选择. 同时我们还必须要求最终选择是理智的，即要求最终选择是代表了多数或大多数个体的意愿. 换句话说，选举理论要研究的是：怎样在公平意义下给出诸多候选人的一个排序. 很显然，选举本身是一门需要对之进行严肃研究的理论.

从表面看来，选举过程似乎只是个简单排序问题，一般人都不认为有多么复杂. 但实际情况远非如此. 从古罗马元老院那椿表决案开始算起(假如这段历史是真实的(盛立人等, 2006))，直到今天为止，选举理论一直都被人诟病多多，缘因选举一事一直以来便是悖论丛生. 我们甚至可以把一部选举史看成是选举悖论的演变史，一直到今天还有许许多多问题尚未得出定论(Saari, 1995, 1994). 这种现象自然会引起许多专家，特别是那些对悖论感兴趣的哲学家们的关注，并参与到选举理论的讨论和研究里来. 事实上，在选举理论发展的各个时期，都有一批数学家(他们当中不乏一些一流数学家)，作为哲学家的特殊群体默默地介入进来，为选举理论做出了重大的贡献.

近几十年来，数学界正在悄悄地进行着一场革命，那就是将数学作为一种基本工具运用到人类本身的种种活动中去：研究人类的行为、价值、交流、斗争、组织、公平配额、决策乃至一些涉及近代技术和复杂组织的层面. 那情形与300年来将数学用于研究物理对象和它们的运动这种情况相比，简直不可同日而语. 一种用数学来思考人类事务的专业已经应运而生，而选举理论正是她的宠儿之一. 总的说来，有关人们实施决策的一些事务，已经越来越多地受到数学的深刻影响，专家们甚至已经创造出一些独特的数学对象，让人们能更好地进行决策和选择. 更有意思的是，有些施行决策的技巧，从性质上看来则完全是纯数学的，因而可以当作一种纯科学来看待. 而数学家则正好有两个优势：独特的度量方法和严格的演绎思想. 前者能使他们从繁复的数字堆里找出规律，后者使他们有能力提供准确安全的预报. 此外，数学家们还可以从代数、几何、统计、数理逻辑、拓扑学等分支的特点发挥其洞察空间与数据本质的优势. 数学家正是这样在选举理论中找到自己的“英雄用武之地”.

选举理论隶属于一门称之为社会选择理论的学科，此学科拥有两个背景空间，它既属于经济学(数理经济学)，又属于社会学(数理社会学). 对于前者，数学家早已参与工作，至于后者，正是选举理论的发展，才使它完全丰富起来，构成数理社会学的绝大部分内容. 1952 年, K. J. Arrow 在选举理论中运用数理经济中的数学方法导致选举理论最辉煌的成果之一(Arrow et al., 2002; Arrow, 1963; Saari, 1995, 1994; 盛立人等, 2006)，即我们现在称之为不可能性定理(详见第 1 章)的 Arrow 定理的产生：“完全公平的选举系统不存在.”现在看来他的证明具有十分鲜明的经济学内涵：将由众多个体的偏爱排序诱导出社会或群体的偏爱排序的选举过程视为一个社会福利函数，并运用不多的数学逻辑理论(严格说来还并不是数理逻辑)给出此定理的严格证明.

将数学用到选举理论其实还要上溯到200多年前，最早是由法国数学家 Borda 和 Condorcet 开始的(Borda, 1781; Condorcet, 1785). 他们创造的 Borda 记分法与捉对表决法至今仍是选举理论的研究课题. 但那时他们用的数学其实都是初等的，包括算术和概率论. 显然 Arrow 的成就主要缘自那个时代数理经济理论的成熟，但值得一提的是，Arrow 在选举理论上的成就和方法与他在经济学的平衡点理论中的研究工作是相通的，正是他的几项工作使他当之无愧地获得 1972 年度诺贝尔经济学奖. 对于选举理论的这个重大结果，后来都收集在他的名著《社会选择与个体价值》(Arrow, 1963)中.

毫无疑问, Arrow 的工作是选举理论的里程碑. 但选举理论的研究并未中止, 选举理论的后 Arrow 时代是属于另两位数学家, 他们是美籍芬兰数学家 D. G. Saari 和美籍阿根廷女数学家 G. Chichilnisky. 前者创建了几何方法(Saari, 2000a, 2000b, 1999, 1995, 1994, 1992, 1990, 1989, 1988; Saari et al., 2000, 1998), 后者创建了拓扑方法(Chichilnisky, 1997, 1982a, 1982b, 1982c, 1980, 1979; Chichilnisky et al., 1983). 专家们公认他们两人的工作堪称选举理论的又一个里程碑.

Saari 关于选举理论的工作很多, 根据上文所说的选举理论悖论丛生的特征, 他的主要工作便是探索选举悖论的成因. 为此他将选举系统所有候选人的意向表构造成一个向量空间, 再将此空间分解成一些正交子空间. 他进一步发现, 每一个这样的子空间可以用来解释种种业已出现或尚未出现的选举悖论. 他的一部分工作使他也出版了一本畅销书——《选举的几何基础》(这是一本准通俗数学著作). Saari 的工作后来又被哈佛大学一些数学家，如 Daugherty 等用更严谨的数学理论(主要是模理论与群表示论)予以扩充与深化(Daugherty, 2005; Daugherty et al., 2007; Eustis et al., 2005).

与 Saari 工作完全不同的是, Chichilnisky 的工作仍然是从 Arrow 定理和经济与社会选择理论出发. 但她的目的是为了减少 Arrow 公理的条件, 在这些业经减弱的公理上, 她将上文 Saari 的意向表空间改造成一个拓扑空间, 从而也得出一个不可能性定理. 这时候, 她的意向表空间是个微分流形, 所以不但她的不可能性定理在数学上十分完美, 在经济学与社会选择理论上则更有意义: 因为这个定理给出了近代数理经济非常关注的连续商品空间的一个或许是只有代数拓扑才能说清楚的重要几何性质——商品空间的不可缩性.

Chichilnisky 的研究还不只是给出一个重要定理, 实际上她给出的是一整套研究经济与社会学的代数拓扑方法. 从此一门新的数理社会学分支——拓扑社会选择理论——应运而生.

不少专家对相差 20 年的两代数学家 Arrow 与 Chichilnisky 创造的两个不可能性定理进行了比较和分析, 结果发生了一件有趣的事情: 德国数学家 Y. M. Baryshnikov(1997, 1993)对两个不可能性定理给出了一个统一的代数拓扑的证明.

本书要介绍的是这些先驱者的行踪和成果. 因此本书不是一本社会学或经济学的著作, 而是一本数学出版物. 我们特别要予以推荐的读者, 是那些对社会学或经济学感兴趣的数学家们, 以及对数学感兴趣的经济学家和社会学家们.

我们将这样来安排本书内容.

第 1 章简单介绍选举理论的现状, 作为全书的一个引子.

第 2 章讨论 Arrow 不可能性定理的证明. 我们至少给出 3 个证明, 其中特别关注香港学者给出的计算机证明. 这个证明的意义不只是定理本身, 而是他们证明的归纳方法.

第 3 章则以较大篇幅主要讨论 Saari 的几何方法. 这一章讨论的是三个候选人的选举系统, 由于第 2 章的归纳法, 所以三员选举几何学应有它的普遍意义. 我们特别细致地分析了三员意向表空间的正交分解, 以及各类选举悖论的几何表示.

第 4 章的内容分两部分, 其一是将第 3 章的结果拓展到一般的多维意向表空间, 以谋求理论上的完备; 其二是介绍 Daugherty 等关于群表示论对选举理论的应用, 进而将两部分合起来, 以谋求理论上的严谨.

第 5 章详细讨论 Chichilnisky 的拓扑社会选择理论, 我们主要是给出它的不可能性理论及其证明，以及其他一些新的社会选择理论的结论.

可以说, 本书从 Arrow 定理开始, 以 Baryshnikov 给出的 Arrow 定理的代数拓扑证明结束, 完成一个有趣的循环.

为使本书更完整, 我们不能不提到两个与选举理论密切相关、属于社会选择理论的分支, 那就是权力指数与公平整分. 我们将以尽可能简明浅显的方式给以讨论, 并放在书末的两个附录里.

我们就这样界定了本书的范围.

第1章 选举概论

1.1 选举理论的复杂性——悖论重重

历史上第一宗选举案例是两千多年前，一位名叫小 Pliny 的罗马历史学家在他的著作中所说的一个故事(盛立人等, 2006).

> "……有一天，罗马元老院出现一场争论，事情涉及已经死亡的大公 Afranius Dexter 以及他的自由奴的生死. 因为元老院不能确定，大公 Dexter 是自杀，还是死于自由奴之手. 或者，是否因为 Dexter 的精神原因，由于服从命令，自由奴杀了大公……"

将最后一种死因称为安乐死，则按罗马法，自由奴们将面临三种处罚:

谋杀: 自由奴应处死刑;

自杀: 自由奴无罪释放;

安乐死: 自由奴应予放逐.

用 A, B, C 分别记三种判决结果: 无罪释放、放逐及死刑，则小 Pliny 把元老院的元老们分成三组: 甲组赞成 A，占 40%; 乙组赞成 B，占 35%; 丙组赞成 C，占 25%. 对此可以列出一张信息表如下:

甲	A	40%
乙	B	35%
丙	C	25%

现在，自由奴的命运完全由元老们投票决定. 让我们来分析一下可能出现的投票结果.

多数(plurality)原则 以得最多票者为胜方. 显然甲组成为赢家，判决结果

是 A. 注意, 此时赢家元老组甲并非占绝大多数(majority).

简单多数(majority)原则 只有获得半数以上票数的议案才被通过.

现在因为票数分散, 不可能施行此原则. 为此需要知道三个元老组更进一步的信息, 就是说, 要指出他们对于三种判决的偏爱次序. 小 Pliny 给出了下面这张意向偏爱表, 其中, $A>B$ 表示"偏爱 A 更甚于 B"等.

意向偏爱表一

甲	$A > B > C$	40%
乙	$B > A > C$	35%
丙	$C > B > A$	25%

为了施行简单多数原则, 下面介绍一个极为重要的方法——捉对表决法, 又称 Condorcet 法.此法是将三宗判决 A, B 与 C 两两进行表决, 只有在捉对表决(此时一定符合简单多数原则)中全部胜出的议案才是最后赢家. 这个赢家又称为 Condorcet 赢家, 同理, 在捉对表决中全输的议案称为 Condorcet 输家. 按照上面的意向表, 我们得到下面选举结果:

$$\begin{cases} A & 40\% \\ B & 35\% + 25\% = 60\% \end{cases} \Rightarrow B > A\,,$$

$$\begin{cases} B & 40\% + 35\% = 75\% \\ C & 25\% \end{cases} \Rightarrow B > C\,,$$

$$\begin{cases} A & 40\% + 35\% = 75\% \\ C & 25\% \end{cases} \Rightarrow A > C\,.$$

结论是 $B>A>C$, 所以 B 是 Condorcet 赢家, 而 C 是 Condorcet 输家. 因此对自由奴的最后判决是 B.

下面再施行另一个重要方法, Borda 记分法. 办法是按上面意向表给各议案在表中的地位打分. 位于首位的给 2 分, 次位的给 1 分, 末位的无分. 最后将每项判决的得分累加, 以得分多少排出议案的次序. 根据上面意向表有如下计算和结果:

$$\begin{cases} A & 2\cdot(0.40) + 1\cdot(0.35) + 0\cdot(0.25) = 1.15 \\ B & 2\cdot(0.35) + 1\cdot(0.40) + 1\cdot(0.25) = 1.35 \\ C & 2\cdot(0.25) + 0\cdot(0.40) + 0\cdot(0.25) = 0.50 \end{cases} \Rightarrow B > A > C\,.$$

可见有 $B>A>C$, 因此结论最后还是判决 B : 放逐.

Condorcet 与 Borda 是同时代的法国数学家, 历史上曾有过一场关于各自方法的争论(见 1.2 节), 起因是这两个重要方法都会产生不可克服的矛盾, 或者说悖论.

我们上面用了三种方法, 却得出两种不同的表决结果, 其中有一条“成俗”的约定是, 每个投票人必须严格按照意向表的排序进行表决. 这种约定称为真诚表决或非策略表决. 与之相应的是非真诚表决或策略表决, 其时投票人可以根据各自价值观任意选择意向投票. 而 Condorcet 方法最大的缺陷是常常得不出赢家. 例如甲元老组不管什么理由在投票时将意向表一中的意向 $A>B>C$ 改成 $A>C>B$, 则意向表一变成下面的意向偏爱表二.

意向偏爱表二

甲	$A>C>B$	40%
乙	$B>A>C$	35%
丙	$C>B>A$	25%

如果仍施行捉对表决就得到

$$\begin{cases} A & 40\% \\ B & 60\% \end{cases} \Rightarrow B>A\,,\quad \begin{cases} B & 35\% \\ C & 65\% \end{cases} \Rightarrow C>B\,,\quad \begin{cases} A & 75\% \\ C & 25\% \end{cases} \Rightarrow A>C\,.$$

结果出现称为 Condorcet 循环的选举悖论 $B>A>C>B$. 这个悖论成为日后 Borda 攻击 Condorcet 的主要理由.

但 Borda 记分法也不是没有缺陷, Condorcet 攻击 Borda 的主要理由是要求说明, 为什么一定要采用[2, 1, 0]的记法制(按一般情形的 Borda 记分法是, 对 n 个候选人采用[n–1, n–2, $\cdots$, 2, 1, 0]记分制).事实上, 可以举出例子, 采用不同的记分制 $[w_1,w_2,\cdots,w_n], w_1\geqslant w_2\geqslant\cdots\geqslant w_n\geq 0$ 会得出完全不同的选举结果. 例如, 我们用记分制[20, 10, 9](这相当于记分制[2, 1, 0.9], 显然, 成比例放大记分不会改变候选人的最终排序), 结果得到

$$\begin{cases} A & 20(0.40)+10(0.35)+9(0.25)=13.75 \\ B & 20(0.35)+10(0.40)+10(0.25)=13.50 \Rightarrow A>B>C\,. \\ C & 20(0.25)+9(0.40)+9(0.25)=10.85 \end{cases}$$

结果是 $A>B>C$. 现在最后的判决变成 A: 无罪释放. 这个例子说明, Borda 记分法十分不稳定.

由于出现各式各样的悖论, 小 Pliny 所描绘的例子本意也是要告诉我们, 2000