

线性代数 简明教程

林金楨 叶小平

广东科技出版社

· 广州 ·

线性代数简明教程

林金楨 叶小平

广东科技出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数简明教程/林金桢, 叶小平编著.
—广州: 广东科技出版社, 2000.6
ISBN7-5359-2521-9

- I. 线…
- II. ①林…②叶…
- III. 线性代数-教程
- IV. O241.6

出版发行: 广东科技出版社
(广州市环市东路水荫路 11 号 邮码: 510075)
E-mail: gdkjzbb @ 21cn. com
出版人: 黄达全
经 销: 广东新华发行集团股份有限公司
排 版: 广州科新电脑技术服务中心
印 刷: 翁源县印刷厂
(广东省翁源县龙仙镇建国路 49 号 邮码: 512600)
规 格: 787×1092 1/16 印张 12.25 字数 270 千
版 次: 2000 年 6 月第 1 版
2002 年 5 月第 2 次印刷
印 数: 1 001-4 000 册
定 价: 23.00 元

如发现因印装质量问题影响阅读, 请与承印厂联系调换。

前 言

本书是编者以讲义形式经过多年的教学实践并进行反复修改而编写出来的教材，主要适用于非数学专业类理科、经济管理以及人文学科各专业本科教学。基本内容的选取，参照了《全国工学、经济学硕士研究生入学考试大纲》中，对数学一至数学四所提出的基本要求。我们努力使得本教材能以较精练的篇幅出现，同时用较少的教学时数去实现“基本要求”的目标。

在长期的教学改革实践中，尤其在参与面向 21 世纪高等数学教学改革研究的探索过程中，我们认真学习了来自各方面有识之士的论述与见解，使用和借鉴了各种基于不同训练要求的教材与资料。所有这些，都使得我们在教学思想的转变、教学目的明确、教学方法的改进等方面深受启迪，并逐渐形成了这样的共识：数学虽然是造就高层次人才的共同基础，然而对上述各专业的数学教学，最为重要的仍然是必须充分地考虑到专业需求与学生潜质的特点，同时一本好的数学教材不能仅满足于严谨的论证与清晰的演绎，更要着力于对学生创新意识与应用意识的引导。

美国数学家 G·克莱鲍尔说过，“在编写一本教材时，决定要写些什么材料是重要的，但我觉得不写些什么的问题甚至更为重要。”我们理解，这里“不写些什么”不是说单纯地将数学专业的教材内容进行“删繁就简”，而要突出主线，弱化细节。本书在总体上以 R_n 中的向量及 R_n 向量空间为主干，而把矩阵作为向量在一定意义之下的推广，并以此来沟通线性方程组、二次型、一般线性空间和内积空间的联系，并力图将其中的基本概念和理论讲得从容透彻，而少讲或不讲某些内容与枝蔓。书中有些方法（有的即使已给出了严格证明），我们适当地采用了“以例示证”，即一般方法用特例来说明。虽然以特例说明一般不是严格的证明，但我们认为只要在方法上没有原则的区别，对合适的内容，恰当地使用，这种方法仍不至损害问题的一般性，同时也使学生便于参照掌握。比如向量的 Schmidt 正交化，二次型通过配方法化标准形就是如此。为使教学时数不足 40 小时的学生对线性空间与线性变换这两个代数的中心内容，也能有一个最初步的了解，本教材局限在 n 维几何空间，介绍了一些相关的内容。同时它也为第五章讲授一般线性空间理论提供最原始的模式。

系统性与演绎推理的严谨性是数学的特征，然而过于形式化的倾向，往往使初学者，尤其非数学专业的学生望而生畏，敬而远之，也就不利于他们对知识的接受与理解。因此本书的另一个努力目标是揭开这个数学的形式化所掩盖的生动活泼的内涵，显现其本身的自然与质朴。所以在教材编写过程中编者试图始终坚持由具体——抽象——具体的表述方式；对问题的提出或概念的介绍，注意背景方面的引导。对所讲授的内容在本理论体系中的作用与地位，注意结合学生的现有知识，日常经验，尽量加以阐述与解释，明确表达出编者所作的思考与领悟。

第一章中有极个别结论本书没有给出证明，这主要是考虑到高等数学课程的特点，我们将行列式内容摆到了相对次要的位置。

本书在附录 2 中介绍了“Mathcad”符号运算（线性代数的部份内容）入门的初级材

料，在 §2.7, §3.5, §4.4, §6.6 中列举了线性代数在应用方面的一些例子，目的在于让读者了解用代数理论去解决其他问题的方法与技巧，扩展知识面，激发学习的兴趣。这部分内容由叶小平执笔编写。

考虑到各类专业的不同需要，本书分三大“模块”，可供教学时数约为 24 学时，32 学时与 60 学时者选择使用，前者可考虑讲授前三章，次者可考虑略去带 * 号的章节。

从事过高等数学教学的教师不免都有这样的感受：尽管在讲授“纯数学”内容时是那样的“得心应手”，然而要能够结合专业与学生特点讲好非数学专业的数学，却颇费心机了。正因为如此，本教材不足之处与疏漏缺憾在所难免，敬请读者批评指教。

丘北福教授在教学中使用了本教材后，对本书的修改提供了许多宝贵的意见，在此特表示诚挚的谢意，对郑丽华编辑热心的支持与认真细致的工作，也表示衷心的感谢。

编 者

2002 年 4 月于中山大学

目 录

第一章 行列式	(1)
§ 1.1 2 阶、3 阶行列式	(1)
§ 1.2 n 阶行列式的定义	(4)
§ 1.3 行列式的性质与计算, Cramer 法则	(8)
习题一	(19)
第二章 矩阵	(25)
§ 2.1 矩阵的概念及运算	(25)
§ 2.2 可逆矩阵	(34)
§ 2.3 矩阵的分块	(41)
§ 2.4 矩阵的初等变换	(45)
§ 2.5 矩阵的秩	(51)
§ 2.6 几种特殊的方阵和相关联的方阵	(55)
§ 2.7 应用举例	(57)
习题二	(61)
第三章 线性方程组与 n 维向量空间	(67)
§ 3.1 一般线性方程组解的存在性	(67)
§ 3.2 直角和仿射坐标系、 n 维向量空间	(73)
§ 3.3 向量的线性相关性	(77)
§ 3.4 线性方程组解的结构	(86)
§ 3.5 应用举例	(91)
习题三	(97)
第四章 矩阵的相似对角形	(101)
§ 4.1 R_n 空间的线性变换	(101)
§ 4.2 矩阵的特征值与特征向量	(107)
§ 4.3 矩阵的相似标准形	(113)
§ 4.4 应用举例·约当标准形介绍	(117)
习题四	(121)
* 第五章 线性空间与欧几里德空间	(123)
§ 5.1 线性空间的定义及其基本性质	(123)
§ 5.2 线性空间的基、维数, 元素的坐标	(126)
§ 5.3 线性变换、线性变换的运算与矩阵表示	(131)
§ 5.4 欧几里德 (Euclid) 空间	(138)
§ 5.5 向量间的距离、最小二乘法	(145)
习题五	(148)
* 第六章 二次型	(151)
§ 6.1 双线性函数·二次型	(151)

§ 6.2 实二次型的标准形	(156)
§ 6.3 二次型的标准形	(158)
§ 6.4 实二次型标准形的分类	(164)
§ 6.5 复内积空间介绍	(166)
§ 6.6 应用举例	(169)
习题六.....	(174)
附录 1 习题答案	(176)
附录 2 Mathcad 符号运算简介 (线性代数部分)	(184)

第一章 行列式

§ 1.1 2阶、3阶行列式

设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

在中学代数里,我们知道为了求该方程组的公式解,用 a_{22} 乘第一个方程,用 $(-a_{12})$ 乘第二个方程,而后相加,便得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

现在我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,叫做 **2阶行列式**,其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 称为2阶行列式的元素;横排称为行,竖排称为列;从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线,这样上面的解可以表示作

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

公式中的分母恰由原方程组未知数的系数按原来的次序排列而成,称为**系数行列式**,记作 D . 而 x_1 的表达式中的分子是将 D 中第1列元素换成方程组中的常数项列,得到的行列式,记作 D_1 ;另外 x_2 表达式中的分子是将 D 中第2列元素换成方程组中的常数项列而成的行列式,记作 D_2 . 这样方程组的解可以表达成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x - 3y - 12 = 0 \\ 3x + 7y + 5 = 0 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 69$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -46$$

所以方程组的解是

$$x = \frac{D_1}{D} = 3, \quad y = \frac{D_2}{D} = -2$$

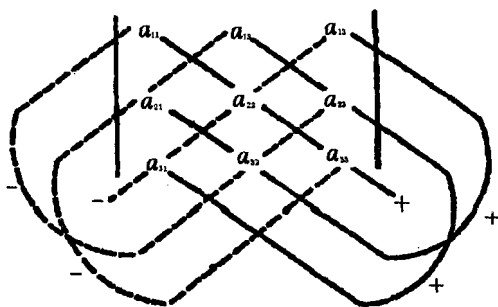
与二元一次方程组相类似,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

为表达其相应的公式解,我们引进 3 阶行列式,它定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

3 阶行列式为 3! 项代数和,每项是取自不同行不同列的 3 个元素之积,带有正号和负号的项各占一半. 为便于记忆,我们用“对角线”法则,可以很容易地将行列式的各项写出来:



各虚线联结的 3 个元素的乘积是代数和中的负项.

例 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times 6 + 2 \times 5 \times (-1) + 3 \times 0 \times 4 \\ - 3 \times 0 \times (-1) - 2 \times 4 \times 6 - 1 \times 0 \times 5 \\ = -58$$

现在回头来考查方程组(1.1.1), 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

读者可自行验证(1.1.1)的解恰可表示作

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (D \neq 0)$$

通过直接验算可知, 任意一个 3 阶行列式都可表为三个 2 阶行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \stackrel{\text{记}}{=} a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \quad (1.1.2)$$

仔细观察上式, 其中 $M_{ij} (j=1, 2, 3)$ 恰是划掉 3 阶行列式中元素 a_{ij} 所处的第 1 行第 j 列后, 余下的元素按原来排列方法构成的 2 阶行列式.

式(1.1.2)不仅可用来计算 3 阶行列式, 同时还为人们定义 n 阶行列式提供了一个有益的启示.

例 3

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = 4 \times 12 - 0 + 5 \times 2 = 58$$

§ 1.2 n 阶行列式的定义

正如研究二、三元线性方程组而引进了 2, 3 阶行列式一样, 为了讨论 n 元线性方程组就要考虑 n 阶行列式. 在 § 1.1 中, 2, 3 阶行列式是通过所谓“对角线”展开法而得到的, 然而用这种方法即使只对 4 阶行列式也无法赋以意义了. 那么该如何定义 n 阶行列式呢? 3 阶行列式的展开式(1.1.2)给了我们很好的启示, 我们可由低阶行列式来定义高阶行列式.

定义 1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n)$ 构成的 n 阶行列式

$$|a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个数:

(1) 当 $n=1$ 时, $|a_{ij}|_1 = a_{11}$;

(2) 当 $n>1$ 时,

$$\begin{aligned} |a_{ij}|_n &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ &+ (-1)^{1+j} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ &+ (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

简记为

$$|a_{ij}|_n = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

其中 M_{1j} 是划掉 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 中 a_{1j} 所处的第 1 行第 j 列后, 余下元素按原来的位置排成的 $n-1$ 阶行列式.

由(1), 1 阶行列式有了定义, 再由(2), 2 阶行列式也有定义. 如果 $n-1$ 阶行列式有了定义, 那么由(2)显然 n 阶行列式也有确定的定义, 于是任意阶行列式都有了定义. 这是用数学归纳法下的定义, 叫做归纳定义. 除此之外, 还可以通过别的途径定义 n 阶行列式, 最

常见的是把 n 阶行列式表示作 $n!$ 项的代数和, 每一项是取之不同行不同列的 n 个元素之积, 而每项前所带符号将由一定“法则”确定, 它的优点是给出以行列式元素显示的代数算式. 读者若有兴趣, 可以参阅其它线性代数教本.

例 1 证明下三角行列式等于其主对角线上元素的乘积, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\ n-1}a_{nn}$$

证: 依定义

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\ 2} & a_{n-1\ 3} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\ 3} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & 0 \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2\ n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1\ n-1} & 0 \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\ n-1}a_{nn} \end{aligned}$$

例 2 证明上三角形行列式等于其主对角线上元素的乘积, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证: 我们用归纳法来证明.

当 $n=2$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

现设对 $n-1$ 阶 ($n \geq 3$) 的这一类行列式结论成立. 那么对于 n 阶情形, 依行列式定义

$$D_n = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + \cdots + (-1)^{1+j} M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n} M_{1n}$$

依归纳假设 $n-1$ 阶上三角形行列式 $M_{1j} (j=1, 2, \dots, n)$ 的值等于主对线上元素之积, 同时注意到对于 $2 \leq j \leq n, M_{1j}$ 的第一列元素全部为零, 于是 $M_{1j} = 0 (j=2, 3, \dots, n)$, 而

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

因此 $D_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 3 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$D_4 = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} 7 \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} (-1) M_{13} + (-1)^{1+4} 2 M_{14}$$

$$= -7 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \times 4 \times 4 \times 1 - 4 \times (-2) \times 1 - 2 \times 4 \times (-2) \times 0 = -104$$

我们给出的行列式归纳定义, 是通过 $n-1$ 阶来表示 n 阶行列式, 用的是按第 1 行展开的形式. 人们不免会猜想, 若按第 2 行或其它各行展开理应也会得到同样的结果. 为回答这个问题, 我们先引入余子式与代数余子式的概念.

定义 2 在 $n (n > 1)$ 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列. 余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排列方法构成的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} , 我们再定义 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式. 对于 1 阶行列式 $|a_{11}|$, 约定 $A_{11} = 1$.

例如 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

D 的第 1 行第 1 列元素 $a_{11}=1$ 的余子式等于

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

D 的第 3 行第 2 列元素的余子式:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24$$

而它们相应的代数余子式为

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 13, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = 24$$

值得提醒的是, a_{ij} 的余子式及代数余子式都与 a_{ij} 在行列式中所处位置有关, 而与 a_{ij} 的值无

关. 这样, n 阶行列式也可表示为 $|a_{ij}|_n = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$

现在我们来叙述行列式的按行展开定理.

定理 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 等于它的任意一行的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$|a_{ij}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

* 本定理的证明有一定难度, 这儿就从略. 至此, 要计算一个行列式就可以按任一行展开去计算了.

例 4 求行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 按定义

$$D = 1 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

现将 D 按第 2 行展开:

$$\begin{aligned} D &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 9 + 0 - 12 = -3 \end{aligned}$$

若将 D 按第 3 行展开得:

$$D = 2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ = -8 + 2 + 3 = -3.$$

实际计算行列式的值时,究竟应该按哪一行展开为好呢?显然,是按含零最多的行去展开最简便.

§ 1.3 行列式的性质与计算, Cramer 法则

上一节我们引进了 n 阶行列式的定义,现在进一步讨论它的计算问题.从定义我们可以看出,若要计算一个 4 阶行列式,就需要计算 4×3 个 2 阶行列式,共有 $4 \times 3 \times 2 = 4!$ 项的代数和;一般计算 n 阶行列式就要去计算 $n!$ 项代数和,而每一项又是 n 个数的乘积,可见计算量是非常之大的.

本节将要介绍的关于行列式的基本性质,利用它不仅对简化行列式的计算很有效,而且对行列式理论的进一步研究也是重要的.

定理 1 交换行列式的两行,行列式只改变符号,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 设 \bar{D} 是 D 互换第 i 行与第 j 行后得到的行列式.我们对阶数 n 采用归纳法,证明 $D = -\bar{D}$.

当 $n=2$ 时,结论明显成立,设对 $n-1$ 阶行列式结论正确,那么对于 n 阶行列式 ($n \geq 3$),我们将 \bar{D} 按第 k ($k \neq i, j$) 行展开得

$$\bar{D} = a_{k1}(-1)^{k+1}\bar{M}_{k1} + a_{k2}(-1)^{k+2}\bar{M}_{k2} + \cdots + a_{kn}(-1)^{k+n}\bar{M}_{kn}$$

注意到,若记 M_{ks} ($s=1, 2, \dots, n$) 是 a_{ks} 在 D 中的余子式,那么 M_{ks} 与 \bar{M}_{ks} 恰好有两行互换了位置,其余各行都相同,而 M_{ks} 与 \bar{M}_{ks} 都是 $n-1$ 阶行列式,依归纳假设 $-M_{ks} = \bar{M}_{ks}$ ($s=1, 2, \dots, n$),因此,

$$\begin{aligned} \bar{D} &= a_{k1}(-1)^{k+1}(-M_{k1}) + a_{k2}(-1)^{k+2}(-M_{k2}) + \cdots + a_{kn}(-1)^{k+n}(-M_{kn}) \\ &= -[a_{k1}(-1)^{k+1}M_{k1} + a_{k2}(-1)^{k+2}M_{k2} + \cdots + a_{kn}(-1)^{k+n}M_{kn}] \\ &= -D \end{aligned}$$

定理 2 若行列式中有某两行元素相同,则行列式等于零.

因将此行列式 D 中有相同元素的两行互换后仍然是 D , 但由定理 1, 其结果应是 $-D$, 于是 $D = -D$, 所以 $D = 0$.

定理 3 行列式中某一行所有元素的公因子 k 可以提到行列式符号的外面. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用归纳法容易对定理作出证明, 就留给读者作为练习来完成. 由定理 2 与定理 3 可得

定理 4 若行列式中有两行元素成比例, 则行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

由行列式定义及归纳法, 我们很容易地还可得到:

定理 5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 6 行列式中某一行乘以常数 k 加到另一行上去,其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

本定理在化简行列式计算中尤为重要,它的证明可由定理 5、定理 4 直接获得.

把行列式 D 的行依次改为列所得到的行列式叫做 D 的转置行列式,记作 D^T . 例如

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

D 与 D^T 元素之间有如下关系: D 的第 i 行,第 j 列元素恰是 D^T 的第 j 行第 i 列元素.

定理 7 行列依次互换,行列式的值不变.

证 我们对阶数 n 用归纳法.

当 $n=1$ 时显然成立,设对 $n-1$ 阶行列式结论正确. 对于 n 阶行列式 D^T ,按第 1 行展开:

$$D^T = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{1k} \bar{A}_{1k} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{1k} (-1)^{1+k} \bar{M}_{1k}$$

由于 D^T 的第 1 行,第 k 列元素 \bar{a}_{1k} 正好是 D 的第 k 行,第 1 列元素,即 $\bar{a}_{1k} = a_{k1}$, 于是有

$$D^T = \sum_{k=1}^n a_{k1} (-1)^{1+k} \bar{M}_{1k}.$$

注意到 \bar{M}_{1k} 是 D^T 中划去第 1 行第 k 列之后余下元素组成的 $n-1$ 阶行列式,它恰好是 D 中划去第 k 行第 1 列后的余子式 M_{k1} 的转置 M_{k1}^T ,即 $\bar{M}_{1k} = M_{k1}^T$,由归纳假设 $M_{k1}^T = M_{k1}$,于是 $\bar{M}_{1k} = M_{k1}$,因此有

$$D^T = \sum_{k=1}^n a_{k1} (-1)^{1+k} M_{k1} = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1}$$

若将 D^T 按第 i 行 ($i=1,2,\dots,n$) 展开,那么同理可得

$$D^T = \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{ki} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

现将上式对 i 求和(从 1 到 n) 便得

$$\begin{aligned} nD^T &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n D = nD \end{aligned}$$