萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

算理哲學
(二)

羅素著
傅種孫 張邦銘譯

漢譯世界名著

商務印書館發行

算理哲學

(二)

羅素著

傅種孫 張邦銘譯

漢譯世界名著

(原共學社叢書)

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

算理哲學

二册

羅素著

傅種孫張邦銘譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

中華民國十九年四月初版

The Complete Library

Edited by

Y. W. WONG

MATHEMATICAL PHILOSOPHY

By

BERTRAND RUSSELL

Translated by

FU CHUNG SUN and CHANG PANG MING

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.

Shanghai, China

1930

B
六五分

第十一章
從元之極限及連續

本章所研究的問題是兩個界說,一個是何謂當主元漸漸逼近於某值時『從元之極限』,一個是何謂『連續從元』. 這兩個都是很涉專門的觀念,算理哲學入門書中並無論之之必要;不過關於兩觀念有一種謬見特因尋常微分學而起,此種謬見存在哲學專家心裏很是根深蒂固,我們爲闢謬起見不能不有多大的努力. 自來本之(Leibnitz)以來世人總以爲微分學及積分學需用無限小數(Infinitesimals). 算學家曾經證明這種見解的錯誤〔魏斯特勞司(Weisrstrass)證之尤力〕;然謬見固結於人心(例如赫克爾所發關於算學的議論)更正不易,哲學家對於魏斯特勞司一流的算學家之所爲竟熟視無覩.

尋常算學書界說從元之極限及連續,常含着數的觀念. 照懷特赫(原註1)的說明,這是不必須的. 我們可先提出尋常教科書的界說,然

後研究一個推廣方法,使之能應用於一切的纚而不僅限於數量的纚或可以數量測度的纚.

試就極普通的算學從元 fx 而論,其 x 與 fx 都是實數,併且 fx 是一值從元——卽當 x 之值一定時 fx 祇有一值. x 稱爲『主元』(Argument), fx 稱爲『主元爲 x 時從元之值』. 倘若從元是『連續的』(Continuous),那末, x 之小小變動恰與 fx 之小小變動對應,若 x 之變動非常之小其對應的 fx 之變動亦必非常之小,若 x 之變動極小則 fx 之變動卽可小於任設之數: 這就是我們所要想替他求出精密意義的粗淺觀念. 從元旣然是連續的,決不會(我們這樣想)一步步的驟然跳躍,換言之,當 x 之值變動甚小時 fx 之變動決不致超過某有限大之數. 普通的算學從元就有這性質: 例如 x^2, x^3, …… log x, sin x, 等, 都是. 但是不連續的從元也非常之多. 試舉一個非算學的例: 『生存於時刻 t 年齡最小之人之誕生地』. 這是以 t 爲主元之從元; 當某人旣生(而

未死)還沒有生別人的時間以內,這個從元的值是不變的,迨別一人誕生,從元的值忽然由前一人誕生地跳到後一人誕生地去.(倘若後生者死,則從元之值忽又由後生者誕生地跳到前生者誕生地去.) 再舉一個相仿的算學的例: x為實數時『x後之第一整數』,這是x的從元;當x由一整數漸漸增大至次整數時從元之值總不變動,直到末了才忽然一躍而變. 可見連續從元在我們雖然很熟悉,究竟算是例外: 不連續的從元比之連續從元簡直是無窮之多.

從元也有在主元取某值或某些值時連續而此外不連續的. $\sin {}^1/_x$ 就是一個例. 我們知道當 θ 每由 $-{}^\pi/_2$ 變至 ${}^\pi/_2$ 或由 ${}^\pi/_2$ 變至 ${}^{3\pi}/_2$ 或由 $(2n-1)\ {}^\pi/_2$ 變至 $(2n+1)\ {}^\pi/_2$ 時(n為整數可正可負可零),從元 $\sin\theta$ 取盡由 -1 變至 1 之一切實數以為值. 令 $\theta={}^1/_x$, 當x甚小時 ${}^1/_x$ 甚大,此時x若漸漸減小,則 ${}^1/_x$ 之增大甚速,其經過 ${}^\pi/_2$ 之一倍數至次倍數必愈過愈快. 所以從元 $\sin {}^1/_x$

之值由 -1 至 1 由 1 至 -1 往復上下也愈變愈速. 今於 0 之近處由 $-\epsilon$ 至 $+\epsilon$ (ϵ 爲甚小之數)取一小範圍,在此小範圍之內 $\sin 1/x$ 上下振動次數無窮之多,雖範圍縮小而振動次數不少減. 所以這個從元在 0 之附近是不連續的. 製造一個從元,使他有無窮個處所不連續,或有 $\aleph_0$ 處不連續,或在在皆不連續,也不是難事. 尋常從元論 (Theory of founctions) 裏面主元爲實數時這樣的例很不少.

『若主元及值都是實數,當某主元時從元是連續的』這句話是什麼意思? 我們要求這個界說,可以先界說一數 x 之『近區』(Neighborhood). 設 ϵ 爲極小之數,凡 x 近旁由 $x-\epsilon$ 至 $x+\epsilon$ 一切之數總起來叫做 x 之近區. 所謂從元在某點是連續的,顯然就是說在該點近區(無論如何之小)是連續的;換言之,若主元在某點任何小之近區是連續的就是說從元在該點是連續的. 再說,設以 a 爲主元,我們希望當主元爲 a 時從元連續,

我們須先界說當主元爲 a 時從元值 fa 之近區 α. 所謂當主元爲 a 時從元是連續的就是: 無論 α 如何之小,我們一定可以將 a 之近區充分縮小,使當主元取該近區內一切之值時從元之值常在 α 以內. 換言之,倘若我們不願意 fx 與 fa 之差大過某微小之數,我們定然可以找着一串以 a 爲中心之實數,凡以該串中之數爲主元 x 時 fx 與 fa 之差不致大於該微小數. 不論微小之數選的如何小,這話須無時不眞. 故界說如下:——

設有一從元 f(x), 一主元 a, 一正數 σ, 無論 σ 如何小祇要不是零,若常有一正數 ϵ (不是 0) 存在當 σ 之絕對值小於 ϵ 時(原註 2)可使 $f(a+\sigma)-f(a)$ 之差之絕對值常小於 σ, 則稱當主元 a 時從元 f(x) 連續 (Continuous for the argument a).

在這界說裏面,σ 一數首先就把 f(a) 之近區由 $f(a)-\sigma$ 至 $f(a)+\sigma$ 限定了. 所以我們的界說祇須說『我們能够(用 ϵ)找到一個 a 之近區,卽

由 $a-\epsilon$ 至 $a+\epsilon$ 之各數,在該區內各主元之對應從元值定然在由 $f(a)-\sigma$ 至 $f(a)+\sigma$ 近區以內;無論 σ 如何之小,祇要上面的話辦得到,當主元 a 時從元定然連續』.

以上還不曾界說到當某主元時從元之極限.

倘若我們先界說了極限,那末,從元之連續性又可以換一個方法來界說: 若從元由上及由下逼近某點,其值之極限皆與從元在該點之值相同,則稱從元在該點連續. 像這樣的從元,當主元逼近某點時其值有一定極限,是很好的,可是不很經見. 通常從元多不絕的顫動,並且無論主元之近區範圍如何之小,其對應的從元往往能取一串很不相近(卽相差不小)的值. 所以我們要先從一般的情形來論.

任意指定一值 a,主元可由小而大漸漸逼近(以後簡稱上昇逼近)於 a,亦可由大而小漸漸逼近(以後簡稱下降逼近)於 a. 今先就主元上昇逼近於 a 論之. 設 ϵ 爲一小數(要非常之小).

試看當主元在 $a-\epsilon$ 至 a 範圍以內時情形如何.

當主元在由 $a-\epsilon$ 至 a(a 在外)範圍以內,從元之值是一串實數,所有不大於(卽小於或等於)這些值的一切實數組成一節,名爲與該值等對應之下節. 通常 ϵ 變則下節隨之而變. 在節內任取指定一數,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍以內之主元對應之值必有許多不小於該數者,卽當主元與 a 甚相近(若 ϵ 甚小)時從元之值必有不小於該數者. 今選取一切可能的 ϵ,而得一切可能的對應下節. 所有各下節之公共部分名之曰當主元上昇逼近 a 時之終極下節(Ultimate lower section). 所謂一數 z 屬於終極下節者,卽謂無論 ϵ 如何小,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍內主元對應之值中必有不小於 z 者.

以上所論的是下節,卽某點以下之節;仿此還可應用於上節卽某點以上之節. 當主元在由 $a-\epsilon$ 至 a(在外)範圍以內,從元之值是一串實數,所有不小於(卽大於或等於)這些值的一切實數

組成一節,名之爲上節. 通常 ϵ 變則上節隨之而變. 今選取一切可能的 ϵ, 而得一切可能的對應上節. 所有各上節之公共部分名之曰當主元上昇逼近 a 時之**終極上節**(Ultimate upper section). 所謂一數 z 屬於終極上節者,卽謂無論 ϵ 如何小,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍內主元對應之值中必有不大於 z 者.

當主元上昇逼近於 a 時其終極上節與終極下節之公共部分稱爲『當主元上昇逼近於 a 時之**終極顫部**』(Ultimate oscillation). 凡謂一數 z 屬於終極顫部,卽謂 z 屬於終極下節又屬於終極上節也. 終極顫部可以從元 sin $^1/_x$ 爲例說明之. 當主元 x 之值由負數漸漸上昇而逼近於 0 時 sin $^1/_x$ 之終極顫部存在.

先就終極下節而論. 無論 ϵ 如何之小,主元在 $-\epsilon$ 至 0 範圍內,從元之值必有達於 1 者但必不大於 1. 故終極下節包含 1 以下各實數,卽負實數全體,零,由零而上至 1 各正實數(1 在內).

同理,終極上節包含 -1 以上各實數,卽正實數全體,零,由零而下至 -1 各負實數(-1 在內).

所以終極顫部盡含由 -1 至 1 各實數(-1 及 1 亦在內).

故所謂當主元上昇逼近於 a 時從元之終極顫部,就是一些數目 x 組織而成,這些 x 有一種特性,無論我們如何迫近於 a,從元常有値不比 x 大,且常有値不比 x 小.

終極顫部也許無項,也許只有一項,也許有許多項. 在前兩場合,當主元上昇逼近於某値時從元有一定極限. 終極顫部若僅僅一項,那一項就是極限. 終極顫部若空無所有,則終極上節之下界限與終極下節之上界限相同,這界限就可以叫做極限. 倘若終極顫部含有許多項,則當主元上昇逼近於 a 時從元就沒有一定的極限. 在這種場合,終極顫部之上下界限(卽終極下節之上界限及終極上節之下界限)可以定名爲『當主元上昇逼近於a時從元終極諸値之

上下界限』. 同樣,又得『當主元下降逼近於a時從元終極諸值之上下界限』. 所以就一般情形而論,主元逼近於a時,常有四個極限. 這四極限如果是合而爲一,這個公共值就叫做『主元逼近於a時從元之極限值』;若不合而爲一則無一定極限. 四極限之公共值倘若與主元爲a時從元之值一致(通常未必一致),則稱主元爲a時從元連續. 這也可以拿來做連續性的界說,與以前的界說是一樣的. (譯者註1).

當主元逼近於a時從元之極限,還可以用別的方法界說他(祇要有他),不必經過顚部及四極限. 這個界說法正與連續性之界說相倣. 今先界說主元上昇逼近於a時從元之極限. 主元上昇逼近於a時,從元有一定極限,其必須而且充分之條件是: 任取一正數σ無論σ如何之小,取兩主元(皆小於a)使之充分接近於a則其對應兩從元值之差必小於σ; 即使ϵ充分微小與由$a-\epsilon$至a範圍內兩主元對應之兩值之

差必小於σ. 假如無論σ如何小這個條件都行,則當主元上昇逼近於a時從元有一定極限.同樣可以界說當主元下降逼近於a時從元之極限. 此兩極限縱使同時存在未必便相同(譯者註2);縱使相同也未必就與當主元爲a時從元之值一致(譯者註3). 必定三者一致,我們纔可說當主元爲a時從元連續.

連續從元(Continuous function)者當任何主元時皆連續之從元也.

此外還有一個稍爲不同的方法可以界說連續性:——

設有一類α(數之類),若有一實數a,當主元爲a或較a大時從元之值常包含於α以內,則稱該從元『終極收斂於α類內』(Ultimately converges into a class α). 同樣,設x爲一定主元,若此外有一實數y小於x,當主元在由x至y範圍(y在內,x在外)以內時從元之值常含在一類α以內,則稱『當主元上昇逼近x時從元終極收斂於α內』. 今

採用以前界說,凡小於某數之實數稱爲該數之前數,大於某數之實數稱爲該數之後數. 則當主元a時欲從元連續,其必須而且充分之條件爲下列四條:——

(1) 任取一小於fa之實數,當主元上昇逼近於a時從元之值終極收斂於該數之諸後數內.

(2) 任取一大於fa之實數,當主元上昇逼近於a時從元之值終極收斂於該數之諸前數內.

(3)及(4)是主元下降逼近於a時用的,與(1)(2)兩條正相做.

這樣的界說法便利的地方就在將連續性的條件分析爲四項,將主元與界說有連續性處之主元比較大小,從元值與界說有連續性處之從元值比較大小,實覺眉目清醒.

以前所討論的連續性及極限之界說是爲數的纚而說的. 但是這種界說還可推廣到一般的非數的纚,或不知能否以數量測度的纚. 運動正好拿來做例證. 韋爾斯(H. G. Wells)做過一

段故事,從運動方面看,可以引來說明當某主元時從元之極限未必與其值相同. 這故事中的主人說是不知不覺有實現他的志願的神力,想要怎麼樣便能怎麼樣. 他被一個警察追逼,口叫一聲『到——裏去』(譯者註4)警察就不見了. 設當時刻 t 時警察所在地位爲 $f(t)$,叫的時刻爲 t_0,那末當將叫而未叫的時候,卽當主元 t 上昇逼近於 t_0 時,警察所在地位之極限是與故事中的主人緊相接觸,而主元爲 t_0 時(卽叫時)警察的地位却是——(卽叫他去的那個地方). 這種情形在實在世界總覺的是罕見的,實在世界通常假定一切運動都是連續的,(但並無適當的證據)換言之,設 $f(t)$ 爲 t 時任意一物所在之地位, $f(t)$ 是 t 的連續從元. 這些話語裏面所謂連續正是我們現在所要簡單界說的東西.

以上各界說從元與主元都是實數,現在再將這個限制取消就可用於一般的關係.

設 P 與 Q 爲任意兩關係. (雖不限定是纔屬

關係,但爲便利起見可懸想他們是纚屬關係.)又設R爲一個一對多的關係,其關係界含於P關係場而被關係界含於Q關係場. 這個R關係可以看做是一個(廣義的)從元,其主元屬於Q關係場而值屬於P關係場. 例如我們要研究一個質點在直線上的運動: 命Q爲時間的纚,P爲直線上之點纚(從左而右),R爲當時刻a時質點所在位置對於時刻a之關係,那末,這時刻質點之位置就可以『a之R』表示之. 我們討論的雖是一般的從元,但無妨以運動爲例,將上面的說明牢牢記住.

設a爲一主元(卽Q纚之一項),若任意於P纚中取含『a之R』的一範圍α,Q纚中有一含a的範圍(a非兩端之項)盡此範圍內之項以爲主元,其對應的從元值常在α以內,則稱『當主元爲a時從元連續』. (此處所謂範圍是指介乎任意兩項之間的一切項;若x及y爲P場中兩項,其間有若干項Z,x對Z有P關係Z對y亦有P關