

高等学校教材

线性代数

吴天毅 王玉杰 邱玉文 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

吴天毅 王玉杰 邱玉文 编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书依据高等学校线性代数课程教学基本要求,结合本科非数学类专业的实际需要编写而成。全书共分六章,主要内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等,并在每一章的后面配以适量的习题和数学实验题目。

本书注重阐明线性代数的基本理论、基本概念和基本方法,结合实际,由浅入深,突出重点,分散难点,适合普通高等学校非数学类专业学生作为教材使用,也可供科技人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/吴天毅,王玉杰,邱玉文编. —北京:高等教育出版社,2011.1

ISBN 978-7-04-031363-5

I. ①线… II. ①吴… ②王… ③邱… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第262018号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 田玲 封面设计 于涛
责任绘图 尹文军 版式设计 王艳红 责任校对 王雨
责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 13.25
字 数 240 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2011年1月第1版
印 次 2011年1月第1次印刷
定 价 18.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 31363-00

前 言

线性代数是普通高等学校理工类和经管类专业的一门重要基础课,在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用。本书是依据高等学校线性代数课程教学基本要求、结合教学实际编写而成的,可作为普通高等学校非数学类专业线性代数课程教材使用,也可供科技人员阅读和参考。本书的主要特点如下:

一、注重将现代数学思想与传统线性代数教学内容结合起来,特别注意线性代数内容与数学软件的结合,每章后面都配以数学实验题目。

二、突出线性代数的基本理论、基本概念和基本方法,目的是使学生理解基本理论,清楚基本概念,掌握基本方法。

三、采取由具体到抽象的方式,每个新内容的引入都由实际问题入手,由于有实际背景,学生易于接受和理解。

四、注重培养学生的实际应用能力,适当增加了实际应用方面的例题和习题,使学生学会用线性代数知识解决问题。

五、注重教学内容的改革,将编者的实际教学经验与体会融入教材之中,使其在内容的取舍和结构的编排上更合理,更易于教与学。

本书编者长期从事线性代数课程的教学工作,具有丰富的教学经验,特别是对新形势下如何改革线性代数的教学内容和教学方法、加强课程建设、提高教学质量等方面有着比较深入的研究。本书是编者多年教学经验和研究成果的结晶。全书由吴天毅教授主编并负责统筹定稿,其中第一章由吴天毅教授执笔,第二、三章由邱玉文副教授执笔,第四、五、六章由王玉杰教授执笔。

本书的编写得到天津科技大学理学院领导的大力支持,同时也得到数学系同仁的热情帮助,许多同仁对本书的编写提出了宝贵的意见和建议,使编者受益匪浅。在此,对给予我们支持和帮助的各位领导、同仁表示衷心的感谢!

编 者

2010年8月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010)58581897/58581896/58581879

传 真：(010)82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第一章 行列式	1
§ 1.1 行列式的定义	1
§ 1.2 行列式的性质	7
§ 1.3 行列式的展开	12
§ 1.4 克拉默法则	20
§ 1.5 数学实验	23
习题一	25
第二章 矩阵	28
§ 2.1 矩阵的概念	28
§ 2.2 矩阵的运算	31
§ 2.3 矩阵的转置与方阵的行列式	36
§ 2.4 逆矩阵	39
§ 2.5 分块矩阵	43
§ 2.6 初等变换与初等矩阵	48
§ 2.7 矩阵的秩	55
§ 2.8 数学实验	58
习题二	63
第三章 向量与线性方程组	68
§ 3.1 线性方程组的解法	68
§ 3.2 向量的线性表示与等价	73
§ 3.3 向量组的线性相关性	78
§ 3.4 向量组的秩	82
§ 3.5 向量空间	85
§ 3.6 线性方程组解的结构	87
§ 3.7 向量的内积与正交化方法	93
§ 3.8 数学实验	98
习题三	100
第四章 矩阵的特征值与特征向量	106
§ 4.1 矩阵的特征值与特征向量	106

§ 4.2	相似矩阵	113
§ 4.3	实对称矩阵的对角化	121
§ 4.4	数学实验	129
	习题四	131
第五章	二次型	134
§ 5.1	二次型及其矩阵表示	134
§ 5.2	二次型的标准形与惯性定律	136
§ 5.3	化二次型为标准形的几种方法	140
§ 5.4	二次型的分类	149
§ 5.5	数学实验	157
	习题五	158
第六章	线性空间与线性变换	161
§ 6.1	线性空间的定义及其性质	161
§ 6.2	基、维数与坐标	164
§ 6.3	基变换与坐标变换	171
§ 6.4	线性子空间	175
§ 6.5	线性空间的同构	176
§ 6.6	线性变换的定义及其性质	179
§ 6.7	线性变换的矩阵	183
	习题六	188
附录	习题参考答案	193

第一章 行列式

行列式在线性代数中是一个基本工具,我们研究许多问题时都需要用到它.本章在引进二阶、三阶行列式定义的基础上,介绍了 n 阶行列式的定义、性质及行列式按行(列)展开,并介绍了利用行列式求解线性方程组的克拉默法则.

§ 1.1 行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

行列式是由解线性方程组的公式解引出来的,因此我们先讨论二元和三元线性方程组的公式解,并由此给出二阶和三阶行列式的定义.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

利用加减消元法容易求出方程组(1)的解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中的分子、分母都是4个数分两对相乘再相减而得到的.为了便于记忆,引入二阶行列式的概念.

将4个数排成2行2列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3)$$

称式(3)左边为二阶行列式,右边的式子为二阶行列式的展开式.数 a_{ij} ($i=1,2$; $j=1,2$)称为行列式的元素,其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示该元素位于第 i 行,第二个下标 j 表示该元素位于第 j 列.

由式(3)可知,二阶行列式的计算满足对角线法则,即:主对角线(自左上至

右下)上元素之积减去副对角线(自右上至左下)上元素之积. 二阶行列式的计算结果是一个数.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组(1)的解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (4)$$

注 D 是用方程组(1)的系数所确定的二阶行列式, 一般称 D 为方程组的系数行列式. D_1 是用方程组(1)的常数项 b_1, b_2 代替 D 中第 1 列元素所得的二阶行列式, D_2 是用方程组(1)的常数项 b_1, b_2 代替 D 中第 2 列元素所得的二阶行列式.

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-1) \times 3 = 5$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5$$

所以

$$x_1 = \frac{5}{5} = 1, \quad x_2 = \frac{-5}{5} = -1$$

类似地, 考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$.

利用加减消元法也可得到它的求解公式:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}} \\ x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}} \\ x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}} \end{cases} \quad (6)$$

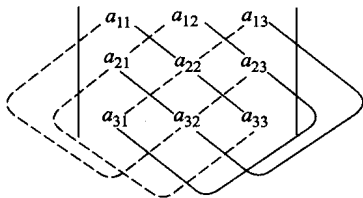
要记住这个求解公式是很困难的. 为了便于记忆, 引入三阶行列式的概念.

将 9 个数排成 3 行 3 列, 记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \quad (7)$$

称式(7)左边为三阶行列式, 右边的式子为三阶行列式的展开式.

由式(7)右边的式子可知, 三阶行列式的展开式中共有 6 项, 这 6 项的确定可按右图所示的对角线法则进行, 即: 三阶行列式的展开式为右图中实线上 3 个元素的乘积(3 项)减去虚线上 3 个元素的乘积(3 项).



例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \times 0 \times 5 + 4 \times 1 \times 7 + 2 \times 9 \times 6 - 7 \times 0 \times 2 - 9 \times 1 \times (-1) - 5 \times 4 \times 6 = 25$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则三元一次方程组(5)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (D \neq 0 \text{ 时}) \quad (8)$$

注 D 是用方程组(5)的系数所确定的三阶行列式,称 D 为方程组的系数行列式. $D_j(j=1,2,3)$ 是用方程组(5)的常数项 b_1, b_2, b_3 代替 D 中第 j 列元素所得到的三阶行列式.

例 3 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x+y-z=0 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18 \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \end{aligned}$$

所以 $x = -\frac{1}{18}, y = -\frac{7}{18}, z = -\frac{4}{9}$.

注 类似地,也可引入四阶及四阶以上的行列式,但这些行列式的展开不适合用对角线法则,需从其他方面给出其定义.

二、逆序数与对换

为了把二阶和三阶行列式的定义推广到一般的 n 阶行列式,需要用到逆序数和对换的概念.

定义 1 将 n 个数 $1, 2, 3, \dots, n$ 按某种次序排成一排,称为这 n 个数的一个全排列,简称为一个 n 级排列. n 个数按自然次序由小到大的排列称为标准排列.

显然, n 个数 $1, 2, 3, \dots, n$ 的全排列共有 $n!$ 种.

定义 2 在 n 个数 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个全排列中,若两个数的前后次序和标准排列不一致,则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总的个数称为这个排列的逆序数,记为 t .

例 4 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中,从左至右考察:

3 在首位,按规定有 0 个逆序;

2 在第二位,前面的数 3 大于 2,有 1 个逆序;

5 在第三位,前面的数都小于 5,有 0 个逆序;

1 在第四位,前面的数 3,2,5 都大于 1,有 3 个逆序;

4 在第五位,前面的数 5 大于 4,有 1 个逆序.

因此这个排列的逆序数 $t=0+1+0+3+1=5$.

定义 3 如果一个排列的逆序数是奇(偶)数,那么称这个排列为奇(偶)排列.

定义 4 在一个排列中,任意对调两个元素,其余元素不动,这一过程称为对换.相邻两个元素的对换称为相邻对换.

定理 1 一个排列进行奇数次对换,排列改变奇偶性;进行偶数次对换,排列的奇偶性不变.

证 设 a, b 是一个排列中的两个数.

(1) 若 a 与 b 是相邻的两个数,对换 a 与 b 后,只有 a 与 b 之间的逆序发生了变化,因此对换 a 与 b 后的排列的逆序数与原排列的逆序数相差 1,从而改变了排列的奇偶性.由此可推知:一个排列进行奇数次相邻对换,排列改变奇偶性;进行偶数次相邻对换,排列不改变奇偶性.

(2) 若 a 在 b 之前 i 位,只要将 a 向后进行 i 次相邻对换,再将 b 向前进行 $i-1$ 次相邻对换,就能将 a 与 b 对换.此过程共进行了 $2i-1$ 次相邻对换,由(1)可知该排列对换 a 与 b 后改变了奇偶性.

由(1)和(2)可知对换一次则排列改变奇偶性,由此即可推知定理结论成立.

如果定义标准排列为偶排列,则可由定理 1 得到下面的推论.

推论 奇(偶)排列经过奇(偶)数次对换可成为标准排列.

三、 n 阶行列式的定义

从二阶和三阶行列式的定义式(3)和(7)可以看出:

1. 它们的展开式的每一项都是位于不同行且不同列的元素的乘积.
2. 每一项前面的正负号是这样来决定的:当该项各元素的行标自左至右组成标准排列时,其列标自左至右组成的排列的逆序数是奇数则取“-”号,逆序数是偶数则取“+”号.

3. 二阶行列式展开后共 $2!$ 项,三阶行列式展开后共 $3!$ 项.

根据以上三点,二阶行列式的定义可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2}$$

其中 $p_1 p_2$ 是 $1, 2$ 的一个排列, t 是该排列的逆序数, Σ 表示对 $1, 2$ 的所有排列 (共 $2!$ 种) 求和. 三阶行列式的定义可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中 $p_1 p_2 p_3$ 是 $1, 2, 3$ 的一个排列, t 是该排列的逆序数, Σ 表示对 $1, 2, 3$ 的所有排列 (共 $3!$ 种) 求和.

类似二阶和三阶行列式的定义, 可定义出 n 阶行列式.

定义 5 将 n^2 个数排成 n 行 n 列, 记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (9)$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列, t 是该排列的逆序数, Σ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 (共 $n!$ 个) 求和. 称式(9)左边为 n 阶行列式, 式(9)右边为 n 阶行列式的展开式, 称 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n$) 为 n 阶行列式的元素.

注 (1) n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项, 其中每一项都是位于不同行且不同列的 n 个元素的乘积. n 阶行列式可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

(2) 不要将一阶行列式 $|a| = a$ 与绝对值符号相混淆.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma (-1)^\tau a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} \quad (10)$$

其中 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列, τ 是该排列的逆序数, Σ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 (共 $n!$ 个) 求和.

证 在式(9)中, 将排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 对换成标准排列, 此时 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 就对换成 $a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$. 由定理 1 的推论可知排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 具有相同的奇偶性, 从而有

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^\tau a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

其中 t 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数, τ 是排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数. 又由于排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 一一对应, 所以得到

$$\Sigma (-1)^\tau a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} = \Sigma (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (11)$$

式(11)即说明式(10)成立.

注 定义 5 中式(9)与定理 2 中式(10)的区别是: 前者是以行为标准次序来

确定每项中的 n 个元素,后者是以列为标准次序来确定每项中的 n 个元素.

按照定义 5 的式(9)及定理 2 的式(10)容易计算出下面几个特殊行列式.

1. 对角行列式(未写出的元素均为零)

$$(1) \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (12)$$

$$(2) \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (13)$$

2. 三角形行列式(未写出的元素均为零)

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (14)$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (15)$$

$$(3) \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \quad (16)$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \quad (17)$$

注 除一些特殊行列式外,一般行列式按其定义计算是非常繁杂困难的,因此实际计算行列式时并不常用其定义提供的方法.

§ 1.2 行列式的性质

为进一步讨论 n 阶行列式,简化 n 阶行列式的计算,下面介绍 n 阶行列式的

一些基本性质.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 是将行列式 D 的行、列互换后得到的行列式, 行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D^T$.

证 记 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 按定义 5 有

$$\begin{aligned} D^T &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \end{aligned}$$

又由定理 2 知

$$D = \sum (-1)^r a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

故

$$D^T = D$$

注 性质 1 表明, 行列式中的行与列具有同等的地位, 从而可知行列式的性质中凡是对行成立的, 对列也同样成立, 反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

证 互换行列式 D 的第 i 行和第 j 行, 所得行列式记为 D_1 , 即

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

由行列式定义

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

其中 t 是排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数, 如果将该排列的第 i 个元素和第 j 个元素对换, 则排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的奇偶性与排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的奇偶性

相反. 若记 τ 为排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数, 则有 $(-1)^\tau = -(-1)^\tau$, 故

$$D = -\sum (-1)^\tau a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = -D_1$$

性质 3 行列式中某一行(列)的公因子可以提出来, 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (18)$$

证 由行列式的定义有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= k \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &= k \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

注 此性质也可叙述为: 用数 k 乘以行列式等于用数 k 乘以行列式中某一行(列)的所有元素.

性质 4 行列式中有两行(列)元素对应相等时, 该行列式等于零.

证 将行列式中相同的两行(列)进行交换, 则行列式还是原先的行列式. 由性质 2 知, $D = -D$, 故 $D = 0$.

由性质 3 和性质 4 可得到下面的推论.

推论 行列式中有两行(列)元素对应成比例时, 该行列式等于零.

性质 5 行列式具有分行(列)相加性, 即

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

证 按行列式的定义, 式(19)左边 $= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots (b_{ip_i} + c_{ip_i}) \cdots a_{np_n} = \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots a_{np_n} + \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots c_{ip_i} \cdots a_{np_n} =$ 式(19)右边.

性质 6 行列式中某一行(列)各元素乘以同一个数再添加到另一行(列)对应元素上,行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \quad (20)$$

证 根据行列式的性质 5 及性质 4 的推论有

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

计算行列式的方法很多,利用前面所介绍的行列式性质,将行列式化成三角形行列式再进行计算则是最常用的方法之一.

例 5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

解 将行列式 D 的第 1 列与第 2 列互换,有

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$