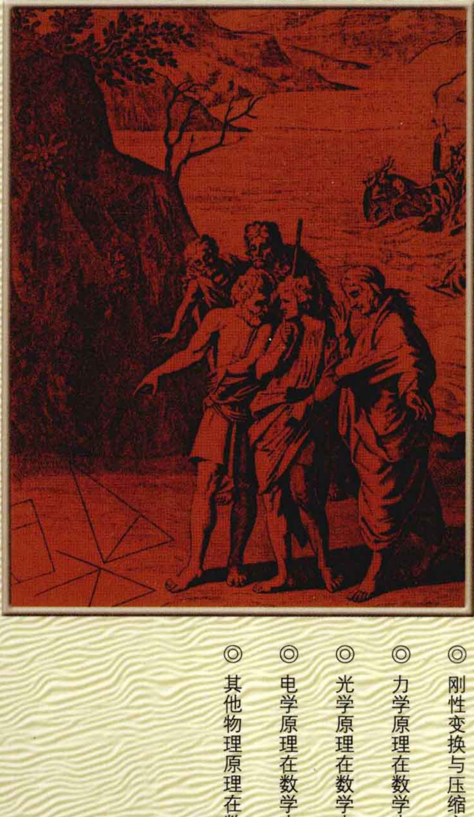
吴振奎数学经典系列

数学解题中的物理方法



吴振奎 编著

◎ 刚性变换与压缩变换

◎ 力学原理在数学中的应用

◎ 光学原理在数学中的应用

◎ 电学原理在数学中的应用

◎ 其他物理原理在数学中的应用

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

吴振奎数学经典系列

数学解题中的物理方法

吴振奎 编著

◎ 刚性变换与压缩变换

◎ 力学原理在数学中的应用

◎ 光学原理在数学中的应用

◎ 电学原理在数学中的应用

◎ 其他物理原理在数学中的应用

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

数学与物理有着不解之缘，人们常用数学方法解答物理问题，然而反过来，用物理方法解答数学问题却未被人们重视，但有时这不仅方便、简洁，而且巧妙、自然.

本书通过大量生动有趣的例子，介绍了中学数学解题中常用的各种物理方法（包括力学、光学、电学及其他物理方法），这不仅可以开阔读者的眼界，启发并丰富其解决数学问题的思路和手段，同时也有助于读者进一步加深对有关物理概念的理解.

图书在版编目（CIP）数据

数学解题中的物理方法/吴振奎编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.1

ISBN 978-7-5603-3197-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①数学课-中学-解题 Ⅳ.①G643.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 025498 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李长波
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 14.75　字数 154 千字
版　　次　2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3197-3
定　　价　28.00 元

序

如果我们打开科学史，研究一些卓越人物成功的经验，就会发现一个重要的事实：他们所研究的正是他们从小就喜欢的．少年时代的达尔文数学成绩不佳，但热爱生物，结果他成为最伟大的生物学家．反之，如果强迫他研究数学，他未必能如此成功．由此可见，兴趣与工作一致，二者形成循环，是成功的重要因素．然而兴趣又是怎样形成的呢？这固然与天赋有关，但后天的启发和培养更为重要．数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣，这等于给了他们长久钻研数学的动力．优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘，就是由于他点燃

了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣,但这远远不够.如果在传授知识的同时,分析重要的数学思想,阐明发展概况,指出各种应用,使学生不仅知其然,而且知其所以然,不仅看到定理的结论,而且了解它的演变过程,不仅看到逻辑之美,而且欣赏到形象之美、直观之美,这才是难能可贵的.在许多情况下,直观走在逻辑思维的前面,起了领路作用.直觉思维大都是顿悟的,很难把握,却极富兴趣,正是精华所在.M.克莱因写了一部大书《古今数学思想》,对数学发展的主导思想有精彩的论述,可惜篇幅太大,内容过深,不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷,必须深入数学本身:不仅是学者,而且是作者;不仅是观众,而且是演员.他必须克服一个又一个的困难,不断地有新的发现、新的创造.其入也愈深,所见也愈奇,观前人所未观,发前人所未发,这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界.为此,他应具备很强的研究能力;而这种能力,必须从中学时代起便开始锻炼,经过长期积累,方可成为巨匠.

于是我们看到"兴趣"、"思维"和"能力"三者在数学教学中的重要作用.近年来我国出版了多种数学课外读物,包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解.这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同,其宗旨是"引起兴趣、启发思维、训练能力",风格近似于美国数学教育家G. Pólya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》,但更切合我国的实际.本丛书共8本,可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广.作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平,而

且大都出版过多种数学著作. 因此,他们必能得心应手,写得趣味盎然,富于启发性. 这套丛书的主要对象是中学、中专的教师和同学,我们希望它能收到宗旨中确定的效果,为中学数学教学作出较大贡献.

王梓坤

1996 年 7 月

前 言

数学和物理有着不解之缘.自这两门学科诞生起,它们就互相启发、互相借鉴、互相帮助并一道发展.

用数学方法去解物理问题,似乎理所当然(因为数学是工具),但反过来用物理方法去解答数学问题却常被人们所忽视,实际上后者往往也能使解复杂的数学问题变得巧妙与简洁.

用物理方法解答数学问题,早在两千多年以前,古希腊学者阿基米德就已进行了开拓性的研究:他曾用力学中物理的平衡定律解一些几何问题,且将它们写入《一些几何命题的力学证明》一书.

微积分的产生是与物理(也包括工程)的研究分不开的.

近代的物理学,不仅为某些数学命题的证明提出了明确的思路和简单的办法,甚至为数学提供了新的思想和方向,从而产生出新的数学分支.

这样,我们有必要去回顾、总结一下中学数学中那些可用物理方法来解决的问题,这不仅可开阔我们的眼界,增加解决数学问题的手段,同时对于某些物理现象(原理、定律等)会有进一步的了解与认识——这对数学和物理的学习,无疑都是有益的.

本书撰于10余年前,此次出版笔者作了较大修改:增加了某些内容,充实了某些方法,添补了某些例题……然而这一切仍恐挂一漏万,因为要想用如此篇幅去侈谈"数学解题的物理方法"是困难的,况笔者功浅力薄.这里的目的无非是抛砖引玉而已.

但愿读者能体味这番苦心.

吴振奎

1994年末于天津

新版小记

此书出(再)版转眼又过去16个年头,其间偶见有读者在网上发表评见——如果本书真的对他们有过些许帮助,笔者将深感欣慰.

这次承蒙刘培杰君抬爱,使本书又获一次再版机会.

笔者时年已过花甲,体力与精力大不如前,本想对书稿作一番修订,只是心有余而力不足.

因而仅对书中某些资料最新进展作了补充和修改,其他并无大的变更.

数学也许永远不会过时,这算是笔者对本书此次再版而未作修订的一种借口吧.

吴振奎

2010年秋于天津

目录

第1章 刚性变换与压缩变换

圆是最完美的图形.

——但丁(Dante)

天气冷了,如果你细心观察就会发现,动物躺下时总要把身体缩成一团(成一个球),因为这样可以减少身体表面热量的损失.水银滚落地面,雨点打到荷叶上,都呈现球形.在表面张力的作用下,液体有力求使其表面积达到最小的趋势.这些可给我们带来一个启示(无异于要求我们去承认):

在体积一定的几何形体中,球的表面积最小.

若将一段柔软的细线两头连接起来,将它轻轻地放在一个蒙有肥皂膜的

铁框上，再用小针将曲线里的薄膜刺破，曲线就变成了圆. 这是因为曲线里面薄膜消失后，外面的肥皂膜表面的张力收缩，牵制曲线且使曲线围成的面积尽可能地扩大(图 1.1). 这又启发我们：

在周长一定的平面封闭曲线中，以圆的面积为最大(等周定理①).

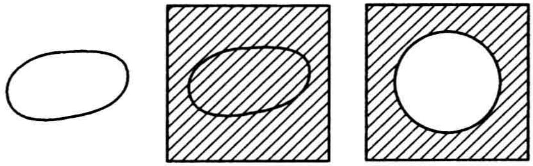


图 1.1

由以上可以看到：物理现象不仅为我们提出某些数学问题，同时也可以帮助我们理解某些数学概念和结论.

它们的证明这里姑且不谈，下面我们先谈一下利用上面的结论，且借助于所谓"刚体"的性质及变换，去证明关于多边形面积的极值问题和其他几何问题，然后再由"弹性体"谈谈压缩变换.

---

① 等周问题历史相当久远. 相传迪多(Dido)女皇曾在购买土著人土地时考虑过它(因此导致迦太基城的建立，详见第 3 章).

古希腊数学家芝诺多罗斯(Zenodorus)在公元前2世纪就研究过这个问题，其成果在 5 世纪之后由巴普士(Pappus)详述并加以推广.

18 世纪，拉格朗日(Lagrange)创立了变分法，这对等周问题的解决提供了有力的工具，尤其适于该问题的一般提法.

利用初等几何解决该问题是 19 世纪几何学家雅各布 · 斯坦纳(Jacob Steiner)完成的.

1.1　刚性变换

所谓"刚体"是指在空间移动而不改变其形状和大小的物体. 利用"刚体"的某些性质可以巧妙地处理一些问题. 我们先来看一个例子:

例 1　当四条边给定时, 什么样的四边形面积最大?

解　我们由等周定理知道:定长曲线所围成的平面图形以圆面积最大. 设四边给定的四边形 $ABCD$ 可内接于圆, 我们把圆除去四边形后剩下的部分[图 1.2(a) 中阴影部分] 视为刚性板, 且把四边形 $ABCD$ 的四个顶点看成活动关节, 当刚性板块沿活动关节变化时, 便得到一个新的图形[图 1.2(b)]—— 但它们的外围不再是个圆. 可是图中阴影部分是刚性板块, 即它位置变化时面积不变, 且圆弧及弦长也不变, 即它的周界长不变. 由

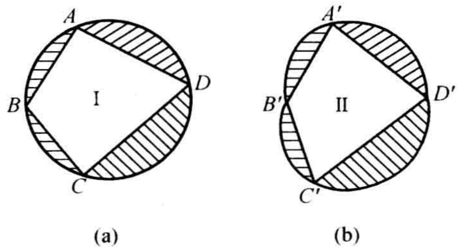


图 1.2

$$S_{\odot} > S_{图形(b)} \quad (等周定理)$$

即
$$S_{阴影} + S_{\mathrm{I}} > S_{阴影} + S_{\mathrm{II}}$$

得$S_{Ⅰ} > S_{Ⅱ}$ （因为 $S_{阴影} = S_{阴影}$）

因此，我们得到结论：

当四条边给定时，以圆内接四边形的面积为最大.

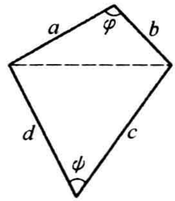


图 1.3

注 这个结论也可用三角方法得到. 令四边形面积为 S，四边长为 a、b、c、d；且 a、b 夹角为 φ；c、d 夹角为 ψ（图 1.3）. 由

$$2S = ab\sin\varphi + cd\sin\psi \tag{1.1}$$

由余弦定理有

$$\frac{1}{2}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2) = cd\cos\psi - ab\cos\varphi \tag{1.2}$$

式$(1.1)^2$ + 式$(1.2)^2$ 再整理有

$$4S^2 + \frac{1}{4}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 =$$

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd[\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi]$$

即 $$16S^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 - 8abcd\cos(\varphi + \psi)$$

故 $$S = \frac{1}{4}[4(a^2b^2 + c^2d^2) - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 - 8abcd\cos(\varphi + \psi)]^{\frac{1}{2}}$$

显然当 $\varphi + \psi = \pi$ 时，S 最大.

仿照上面的方法，我们还可以证明：

命题 1 边数及周长给定的多边形，以正多边形面积最大；

命题 2 周长相同的两个正多边形，边数多者面积也大.

下面我们仍利用刚体的性质，证明上述结论. 为了证明命题 1，我们先来证一下：周长相同、边数一样的两个多边形，以等边多边形面积最大.

边可由归纳法且**通过局部调整**的办法来证明. 只须注意到：给定底和两腰的三角形，以等腰三角形面积最大.（其实也可从图 1.4 中明显地看到这一点，注意到椭圆的性质）

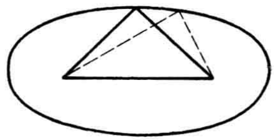


图 1.4

注　这个结论还可以用下面的证明：

若 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = l$（常数），记 $\Pi_1 = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$.

又令 $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$，$y_k = x_k (k = 3, 4, \cdots, n)$，显然 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = l$，又记 $\Pi_2 = \prod\limits_{i=1}^{n} y_i$，我们有 $\Pi_1 = \Pi_2$.

事实上，

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 > 0$$

即

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > x_1 x_2$$

从而

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \cdot \prod_{i=3}^{n} x_i > x_1 x_2 \prod_{i=3}^{n} x_i$$

即

$$\prod_{i=1}^{n} y_i > \prod_{j=1}^{n} x_j$$

由此可以看到，只要 x_i，$x_j (i \neq j)$ 不相等就可重复上面步骤，使和 $\sum x_i$ 不变，而积 $\prod x_i$ 增大.

当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，就不能再调整了，因而它的积 $\prod x_i$ 最大.

有了上面的准备，我们可用刚体的性质来证明命

题 1. 这只须证周长相同的等边 n 边形，当它能内接于圆时面积最大（即为正 n 边形）即可.

证明的方法及步骤完全与例 1.1 的证明相同（图 1.5）.

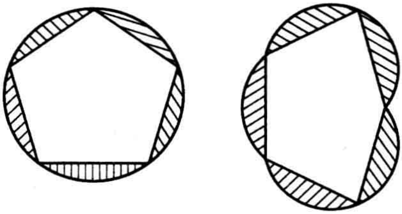


图 1.5

有了命题 1 我们不难证得命题 2，这只须把正 n 边形视为特殊的 $n+1$ 边形，即有一个顶点在某条边上而把此边一分为二. 这样它便是不等边的 $n+1$ 边形，由命题 1 显然有 $S_{\text{正}n\text{边形}} < S_{\text{正}n+1\text{边形}}$.

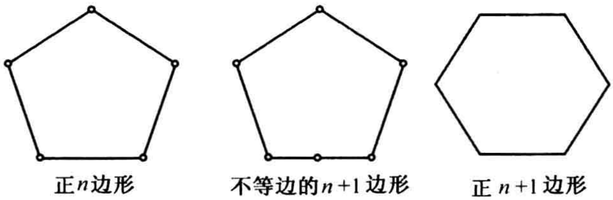


图 1.6

如果不太严格地讲，我们已经部分地论证了“等周定理”，因为圆可视为周长一定边数不断增加的正多边形的极限情形.

至于它的严格证明，可参考有关文献（比如北京大学出版社出版的《等周问题与夫妇入座问题》）.

上面我们看到利用刚体性质可以处理一类几何极

值问题，其实它还可以有效地模拟处理一些实际问题. 与运筹学有关的所谓“货郎担问题”（又称“推销员问题”），是一种选择最佳路径的问题，下面的例子是它的简单情形，我们可用线段的“刚性”巧妙地给以解决.

例 2　八个城市 A,B,C,D,E,F,G,H 均匀地分布在地球上，且每相邻的三个城市间都有航线连通，它们之间的距离如图 1.7(a) 所标. 有一位推销员想从 F 到 D 去，他应选择哪条路才最经济？（单位里程旅费都一样）

直接计算未尝不可，只是略繁. 我们可以这样处理：

解　按图中尺寸截取 12 根细铁线，再绑成如图 1.7(a) 的样子，且在各顶点处粘一记号，分别写上 A，$B,\cdots,H$，然后一手拿住 F 点，一手拿住 D 点，轻轻拉紧，便成图 1.7(b) 的样子. 其中最紧的一条：$F—B—A—D$ 即为所求. 它的道理读者不难想通：因为两点间直线段最短.

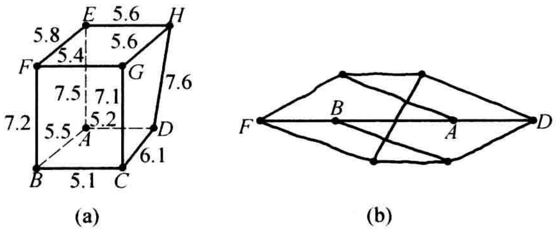


图 1.7

注　这个问题在“运筹学”（应用数学的一个分支）上称为“最短路问题”，与之相关联的著名问题是“货郎担问题”，也称“推销员问题”.

当城市个数较多时（比如城市个数 $n = 30$），按照现有的方