数学名著译丛

数学物理方法 I

〔德〕R.柯朗 D.希尔伯特 著
钱敏 郭敦仁 译

科学出版社

数学名著译丛

数学物理方法 I

〔德〕 R. 柯 朗 D. 希尔伯特 著

钱 敏 郭敦仁 译

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系一经典名著.

本书系统地提供了为解决各种重要物理问题所需的基本数学方法. 全书分三卷出版. 卷 I 内容包括: 线性代数和二次型、任意函数的级数展开、线性积分方程、变分法、振动和本征值问题、变分法在本征值问题上的应用以及本征值问题所定义的特殊函数.

本书可以作为高等学校"数学物理"课程的教本; 对理论物理学工作者, 它也是一本有用的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 I/(德)柯朗, (德)希尔伯特著; 钱敏, 郭敦仁译. —北京: 科学出版社, 2011

(数学名著译丛)

ISBN 978-7-03-031361-4

I. ①数… II. ①柯… ②希… ③钱… ④郭… III. ①数学物理方法 IV. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 104979 号

责任编辑: 陈玉琢 汪 操 / 责任校对: 李 影

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 6 月第一次印刷 印张: 29 3/4

印数: 1—2 500 字数: 576 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

中译本前言

柯朗和希尔伯特所著《数学物理方法》一书, 德文第二版发行于 1930 年. 1953 年出版了英文本. 在内容上, 英文本有些增加, 因此译文大体以英文本为基础. 可是无论在措辞或字句的含义上, 英文本都出了不少错误, 因此在翻译过程中, 译者不得不经常参照德文本, 加以改正. 第 1 章翻译时, 英文本尚未出版, 所以翻译以德文本为根据, 后来又参照英文本修改过.

译 者

英文版原序摘译

本书第一卷德文第一版于 1924 年在柏林出版, 第二版于 1930 年出版, 第二卷于 1938 年出版. 这本英文版是依据德文本写成的, 但有大部分增加和修改.

本书对于数学家和物理学家有同样的用处. 本书目的还是如同第一次德文版序言中所写的:“从十七世纪以来, 物理的直观, 对于数学问题和方法是富有生命力的根源. 然而近年来的趋向和时尚, 已将数学与物理学间的联系减弱了; 数学家离开了数学的直观根源, 而集中在推理精致和着重于数学的公设方面, 甚至有时忽视数学与物理学以及其他科学领域的整体性. 在许多情况下, 物理学家也不再体会数学家的观点. 这种分裂, 无疑地对于整个科学是一个严重的威胁; 科学发展的洪流, 可以逐渐分裂成为细小而又细小的溪渠, 以至干涸. 因此, 有必要引导我们的努力转向于将许多有特点的和各式各样的科学事实的共同点及其相互关联加以阐明, 以重新统一这种分离的趋向. 只有这样, 才可以使学者们掌握这些材料, 从而为研究工作更进一步的有机发展准备下基础.

“本书就是针对这个目的为供学习数学物理而作的. 本书发展了起源于物理问题的数学方法, 并试图使这些结果纳入统一的数学理论. 作者并未企图做得完备, 只是希望本书可以便利于读者接近一个丰富而重要的领域.”

“本书的责任由我个人担负. 可是, 本书加上我的老师、同事和朋友 D. 希尔伯特的名字, 这是正当的, 盖因从希尔伯特的一些论文和讲义中采取了许多材料, 并且希望本书表现一些希尔伯特的精神, 这种精神在数学研究和教学上具有决定性的影响.”

R. 柯朗

1953 年 6 月于纽约

目　录

第1章　线性代数和二次型

在本卷内我们要处理许多数学分析的问题，它们是和线性变换和二次型的理论紧密地联系着的；因此我们在第一章中先简短地复习一下这个部分的某些方面，假定读者对于这些问题已有一般的知识.

1.1　线性方程和线性变换

1.1.1　矢量

为了简短地叙述线性方程论的结果，最适当的是引进矢量计算中的符号[1)]. 我们称一组 n 个实数 $x_1, \cdots, x_n$ 为一个 n 维矢量或 n 维空间的一个矢量，而用相应的黑体字母 $\boldsymbol{x}$ 来简单地表示它. $x_i (i=1, \cdots, n)$ 这些数叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的*分量*. 如果所有的分量皆为零，那么我们称该矢量为*零矢量*. 在 $n=2$ 或 $n=3$ 的情形，矢量在几何上可以解释为由坐标原点引向以 x_i 为直角坐标的那一点的"位矢". 在 $n>3$ 的情形，不可能再有几何直观；不过几何的语言依然适用.

给定两个任意的实数 λ 和 μ，我们定义 $\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$ 为一个矢量，它的分量 z_i 由 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的分量 x_i, y_i 按照关系 $z_i=\lambda x_i+\mu y_i$ 线性组合而成. 由此，作为特例，我们已给出了两个矢量的和及差的定义.

矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的"*内积*" $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$ 表示一个数：

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=x_1y_1+\cdots+x_ny_n=y_1x_1+\cdots+y_nx_n=(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x})^{2)}. \tag{1}$$

有时候我们也称内积 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$ 为*矢量 $\boldsymbol{y}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的分量*，反过来说也一样.

如果内积 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$ 为零，我们就说 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 互相垂直或*正交*；在 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形，这种说法具有直接的直观意义. 一个矢量和它自己的内积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^2$ 有其特殊的地位，我们称之为该矢量的*范数*. $\boldsymbol{x}^2$ 的正平方根叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的*值*或*长度*，而记作 $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}$. 长度为 1 的矢量叫做*规一化矢量*或*单位矢量*.

对两个矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_n)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1, \cdots, b_n)$ 的内积 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 而言，以下不等式成立：

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \leqslant \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2,$$

---

1) 这里我们只涉及一种简短的表示法，而不是真正来讲矢量分析或是它在 n 维空间的推广，这方面研究的中心问题是关于一些不变量的寻求.

2) 有时记作 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 而不用括号.

或者不用矢量写法,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

其中等号当且仅当 a_i 和 b_i 成比例时方才成立, 这时候关系 $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = 0$ 成立, 其中 $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

上述"施瓦茨不等式"[1)]的证明可以由这样的论点得出, 就是二次方程

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$$

对于未知数 x 来说永远不会有两个不同的实根, 而必须有两个虚根, 除非 a_i 和 b_i 成比例; 施瓦茨不等式无非是把这事实用二次方程的判别式表出而已. 施瓦茨不等式的另一个证明可由下面的恒等式直接得出:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

矢量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 称为彼此**线性独立**, 假如不可能找到一组数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$(不全等于零) 使矢量方程

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m = 0$$

成立, 也就是说使左边矢量的各个分量都为零. 如果情形不是如此, 我们就称这些矢量为**线性相关的**.

在 n 维空间, 具有分量

$$\begin{array}{ll} 1 & 0\cdots0, \\ 0 & 1\cdots0, \\ \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots1 \end{array}$$

的 n 个矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 组成一组 n 个线性独立的矢量. 因为假如存在一个关系 $\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = 0$, 于是只要乘以 $\boldsymbol{e}_h$ 则由于 $\boldsymbol{e}_h^2 = 1$, $(\boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k) = 0 (h \neq k)$ 就得出 $\lambda_h = 0$. 因此一组 n 个线性独立的矢量 (在 n 维空间) 总是存在的. 可是在 $n+1$ 个矢量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n+1}$($n$ 维空间的) 之间, 就至少有一个系数不全为零的线性关系存在:

$$\mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_{n+1} \boldsymbol{u}_{n+1} = 0,$$

1) 这个关系在施瓦茨之前已为柯西所用过.