

数学名著译丛

数学物理方法 I

〔德〕R.柯朗 D.希尔伯特 著
钱敏 郭敦仁 译



科学出版社

数学名著译丛

数学物理方法 I

[德] R. 柯 朗 D. 希尔伯特 著

钱 敏 郭敦仁 译

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系一经典名著.

本书系统地提供了为解决各种重要物理问题所需的基本数学方法. 全书分三卷出版. 卷 I 内容包括: 线性代数和二次型、任意函数的级数展开、线性积分方程、变分法、振动和本征值问题、变分法在本征值问题上的应用以及本征值问题所定义的特殊函数.

本书可以作为高等学校“数学物理”课程的教本; 对理论物理学工作者, 它也是一本有用的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 I/(德)柯朗, (德)希尔伯特著; 钱敏, 郭敦仁译. —北京: 科学出版社, 2011

(数学名著译丛)

ISBN 978-7-03-031361-4

I. ①数… II. ①柯… ②希… ③钱… ④郭… III. ①数学物理方法 IV. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 104979 号

责任编辑: 陈玉琢 汪 操 / 责任校对: 李 影

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

随 主 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 6 月第一次印刷 印张: 29 3/4

印数: 1—2 500 字数: 576 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

中译本前言

柯朗和希尔伯特所著《数学物理方法》一书, 德文第二版发行于 1930 年. 1953 年出版了英文本. 在内容上, 英文本有些增加, 因此译文大体以英文本为基础. 可是无论在措辞或字句的含义上, 英文本都出了不少错误, 因此在翻译过程中, 译者不得不经常参照德文本, 加以改正. 第 1 章翻译时, 英文本尚未出版, 所以翻译以德文本为根据, 后来又参照英文本修改过.

译 者

英文版原序摘译

本书第一卷德文第一版于 1924 年在柏林出版, 第二版于 1930 年出版, 第二卷于 1938 年出版. 这本英文版是依据德文本写成的, 但有大部分增加和修改.

本书对于数学家和物理学家有同样的用处. 本书目的还是如同第一次德文版序言中所写的: “从十七世纪以来, 物理的直观, 对于数学问题和方法是富有生命力的根源. 然而近年来的趋向和时尚, 已将数学与物理学间的联系减弱了; 数学家离开了数学的直观根源, 而集中在推理精致和着重于数学的公设方面, 甚至有时忽视数学与物理学以及其他科学领域的整体性. 在许多情况下, 物理学家也不再体会数学家的观点. 这种分裂, 无疑地对于整个科学是一个严重的威胁; 科学发展的洪流, 可以逐渐分裂成为细小而又细小的溪渠, 以至于涸. 因此, 有必要引导我们的努力转向于将许多有特点的和各式各样的科学事实的共同点及其相互关联加以阐明, 以重新统一这种分离的趋向. 只有这样, 才可以使学者们掌握这些材料, 从而为研究工作更进一步的有机发展准备下基础.

“本书就是针对这个目的为供学习数学物理而作的. 本书发展了起源于物理问题的数学方法, 并试图使这些结果纳入统一的数学理论. 作者并未企图做得完备, 只是希望本书可以便于读者接近一个丰富而重要的领域.”

“本书的责任由我个人担负. 可是, 本书加上我的老师、同事和朋友 D. 希尔伯特的名字, 这是正当的, 盖因从希尔伯特的一些论文和讲义中采取了许多材料, 并且希望本书表现一些希尔伯特的精神, 这种精神在数学研究和教学上具有决定性的影响.”

R. 柯朗

1953 年 6 月于纽约

目 录

中译本前言

英文版原序摘译

第 1 章 线性代数和二次型	1
1.1 线性方程和线性变换	1
1.1.1 矢量	1
1.1.2 正交矢量组、完备性	3
1.1.3 线性变换、矩阵	4
1.1.4 双线型、二次型和埃尔米特型	9
1.1.5 正交变换和复正交变换	12
1.2 含线性参数的线性变换	14
1.3 二次型和埃尔米特型的主轴变换	19
1.3.1 根据极大值原理作主轴变换	19
1.3.2 本征值	22
1.3.3 推广于埃尔米特型	23
1.3.4 二次型的惰性定理	23
1.3.5 二次型的预解式的表示	24
1.3.6 与二次型相联属的线性方程组的解	25
1.4 本征值的极小-极大性	26
1.4.1 用极小-极大问题表征本征值	26
1.4.2 应用、约束	28
1.5 补充材料及问题	29
1.5.1 线性独立性及格拉姆行列式	29
1.5.2 行列式的阿达马不等式	30
1.5.3 正则变换的广义处理	31
1.5.4 无穷多个变数的变线型和二次型	34
1.5.5 无穷小线性变换	35
1.5.6 微扰	36
1.5.7 约束	38
1.5.8 矩阵或变线型的初等除数	38
1.5.9 复正交矩阵的谱	39
参考文献	39

第 2 章 任意函数的级数展开	41
2.1 正交函数组	41
2.1.1 定义	41
2.1.2 一组函数的正交化	43
2.1.3 贝塞尔不等式、完备性关系、平均逼近	43
2.1.4 无穷多个变数的正交变换和复正交变换	46
2.1.5 在多个自变数及更一般的假定下上述结果的正确性	47
2.1.6 多变数完备函数组的构造	47
2.2 函数的聚点定理	48
2.2.1 函数空间的收敛性	48
2.3 独立性测度和维数	51
2.3.1 独立性测度	51
2.3.2 一函数序列的渐近维数	52
2.4 魏尔斯特拉斯逼近定理、幂函数和三角函数的完备性	54
2.4.1 魏尔斯特拉斯逼近定理	54
2.4.2 推广到多元函数的情形	56
2.4.3 函数及其微商同时用多项式逼近	57
2.4.4 三角函数的完备性	57
2.5 傅里叶级数	58
2.5.1 基本定理的证明	58
2.5.2 重傅里叶级数	61
2.5.3 傅里叶系数的数量级	62
2.5.4 基本区间长度的更改	62
2.5.5 例子	62
2.6 傅里叶积分	64
2.6.1 基本定理	64
2.6.2 把上节结果推广到多元函数的情形	66
2.6.3 互逆公式	67
2.7 傅里叶积分的例子	68
2.8 勒让德多项式	69
2.8.1 从幂函数 $1, x, x^2, \dots$ 的正交化作出勒让德多项式	69
2.8.2 母函数	71
2.8.3 勒让德多项式的其他性质	72
2.9 其他正交组的例子	73
2.9.1 导致勒让德多项式的问题的推广	73

2.9.2 切比雪夫多项式	74
2.9.3 雅可比多项式	76
2.9.4 埃尔米特多项式	77
2.9.5 拉盖尔多项式	79
2.9.6 拉盖尔函数和埃尔米特函数的完备性	81
2.10 补充材料和问题	82
2.10.1 等周问题的赫尔维茨解	82
2.10.2 互逆公式	83
2.10.3 傅里叶积分和平均收敛性	84
2.10.4 由傅里叶级数和积分所得的谱分解	85
2.10.5 稠密函数组	85
2.10.6 赫·明兹关于幂函数完备性的一个定理	86
2.10.7 费耶求和定理	86
2.10.8 梅林反演公式	87
2.10.9 吉布斯现象	89
2.10.10 关于格拉姆行列式的一个定理	91
2.10.11 勒贝格积分的应用	92
参考文献	93
第3章 线性积分方程	95
3.1 引论	95
3.1.1 符号和基本概念	95
3.1.2 以积分表示的函数	96
3.1.3 退化核	97
3.2 退化核的弗雷德霍姆定理	97
3.3 对任意核的弗雷德霍姆定理	100
3.4 对称核及其本征值	103
3.4.1 对称核的本征值的存在性	103
3.4.2 本征函数和本征值的全体	106
3.4.3 本征值的极大-极小性质	110
3.5 展开定理及其应用	112
3.5.1 展开定理	112
3.5.2 非齐次线性积分方程的解	113
3.5.3 累次核的双线公式	114
3.5.4 Mercer 定理	116
3.6 诺伊曼级数和预解核	117

3.7	弗雷德霍姆公式	119
3.8	积分方程理论的另一推导	123
3.8.1	一个引理	123
3.8.2	对称核的本征函数	124
3.8.3	非对称核	125
3.8.4	本征值和本征函数对核的连续依赖性	126
3.9	本理论的推广	126
3.10	补充材料和问题	127
3.10.1	问题	127
3.10.2	奇异积分方程	128
3.10.3	依·施密特关于弗雷德霍姆定理的推导	129
3.10.4	解对称积分方程的恩斯库格法	129
3.10.5	决定本征函数的凯洛格法	130
3.10.6	核的形式函数及其本征值	130
3.10.7	没有本征函数的一个非对称核例子	131
3.10.8	沃尔泰拉积分方程	131
3.10.9	阿贝尔积分方程	131
3.10.10	属于一非对称核的共轭正交组	132
3.10.11	第一类积分方程	132
3.10.12	无穷多变数法	133
3.10.13	本征函数的极小性	134
3.10.14	极性积分方程	134
3.10.15	可对称化的核	134
3.10.16	由函数方程决定预解核	134
3.10.17	正(负)定核的连续性	135
3.10.18	哈默斯坦定理	135
	参考文献	135
第4章	变分法	137
4.1	变分法的问题	137
4.1.1	函数的极大和极小	137
4.1.2	泛函	139
4.1.3	变分法的典型问题	140
4.1.4	变分法特有的困难	143
4.2	直接解	144
4.2.1	等周问题	144

4.2.2	瑞利-里茨方法、极小化序列	144
4.2.3	其他直接方法、有限差法、无穷多个变数法	145
4.2.4	关于变分直接方法的一般讨论	149
4.3	欧拉方程	151
4.3.1	变分法中“最简单的问题”	151
4.3.2	多个未知函数的问题	153
4.3.3	高阶微商的出现	155
4.3.4	多个自变量情形	156
4.3.5	欧拉微分式之恒等于零	158
4.3.6	齐次形的欧拉方程	160
4.3.7	条件的放宽、杜布瓦雷蒙和哈尔定理	163
4.3.8	变分问题和函数方程	167
4.4	欧拉微分方程的积分	168
4.5	边界条件	169
4.5.1	自由边界的自然边界条件	170
4.5.2	几何问题、横交条件	172
4.6	二级变分及勒让德条件	174
4.7	带附加条件的变分问题	176
4.7.1	等周问题	176
4.7.2	有限附加条件	178
4.7.3	微分方程作为附加条件	180
4.8	欧拉方程的不变性	181
4.8.1	欧拉式作为函数空间的梯度、欧拉式的不变性	181
4.8.2	Δu 的变换、球坐标	183
4.8.3	椭球坐标	184
4.9	变分问题之变换为正则形和回转形	188
4.9.1	在附加条件下通常极小问题的变换	188
4.9.2	最简单的一些变分问题的回转变换	190
4.9.3	变分问题向正则形的变换	194
4.9.4	推广	195
4.10	变分法和数学物理微分方程	197
4.10.1	一般的讨论	197
4.10.2	振动的弦和振动的杆	199
4.10.3	膜与板	200
4.11	互逆二次变分问题	204

4.12 补充材料和练习	209
4.12.1 一给定微分方程的变分问题	209
4.12.2 等周问题的可逆性	209
4.12.3 圆形光线	209
4.12.4 代多问题	209
4.12.5 空间问题的例	209
4.12.6 示性曲线及其应用	210
4.12.7 变动的区域	211
4.12.8 诺特关于不变变分问题的定理、质点力学问题中的积分	213
4.12.9 重积分的横交条件	216
4.12.10 曲面上的欧拉微分式	217
4.12.11 静电学中的汤姆生原理	217
4.12.12 弹性体的平衡问题、卡斯泰尔诺沃原理	218
4.12.13 翘曲的变分问题	221
参考文献	223
第 5 章 振动和本征值问题	224
5.1 线性微分方程述引	224
5.1.1 叠加原理	224
5.1.2 齐次和非齐次问题、边界条件	225
5.1.3 形式关系、伴随微分式、格林公式	226
5.1.4 线性函数方程 —— 线性方程组的类似和极限情形	228
5.2 有限自由度的系统	228
5.2.1 简正形振动、简正坐标、运动的普遍理论	229
5.2.2 振动系统的一般性质	232
5.3 弦的振动	232
5.3.1 均匀弦的自由运动	233
5.3.2 受迫振动	235
5.3.3 一般的不均匀的弦和施图姆-刘维尔本征值问题	236
5.4 杆的振动	239
5.5 膜的振动	241
5.5.1 关于均匀膜的一般本征值问题	241
5.5.2 受迫运动	242
5.5.3 节线	243
5.5.4 矩形膜	243
5.5.5 圆形膜、贝塞尔函数	245

5.5.6 不均匀的膜	247
5.6 板的振动	248
5.6.1 概述	248
5.6.2 圆形边界	248
5.7 关于本征函数法的一般性问题	249
5.7.1 振动及平衡问题	249
5.7.2 热传导及本征值问题	252
5.8 三维连续体的振动、分离变数法	253
5.9 本征函数和势论中的边值问题	254
5.9.1 圆、球、球壳	254
5.9.2 柱形区域	257
5.9.3 拉梅问题	257
5.10 施图姆-刘维尔型问题、奇异边界点	261
5.10.1 贝塞尔函数	261
5.10.2 任意阶的勒让德函数	262
5.10.3 雅可比及切比雪夫多项式	264
5.10.4 埃尔米特及拉盖尔多项式	264
5.11 施图姆-刘维尔方程解的渐近行为	266
5.11.1 当自变数趋向无穷时解的有界性	267
5.11.2 更确切一点的结果 (贝塞尔函数)	267
5.11.3 当参数增大时的有界性	269
5.11.4 解的渐近表示	270
5.11.5 施图姆-刘维尔本征函数的渐近表示	271
5.12 具有连续谱的本征值问题	273
5.12.1 三角函数	274
5.12.2 贝塞尔函数	274
5.12.3 无穷平面的膜振动方程的本征值问题	274
5.12.4 薛定谔本征值问题	275
5.13 微扰理论	277
5.13.1 单重本征值	277
5.13.2 重本征值	279
5.13.3 微扰理论的一例	281
5.14 格林函数 (影响函数) 及化微分方程为积分方程	282
5.14.1 格林函数及常微分方程的边值问题	283
5.14.2 格林函数的构造、广义格林函数	285

5.14.3	微分方程和积分方程的等价	288
5.14.4	高阶常微分方程	290
5.14.5	偏微分方程	292
5.15	格林函数的例子	297
5.15.1	常微分方程	297
5.15.2	对圆和球 Δu 的格林函数	302
5.15.3	格林函数和保角映射	302
5.15.4	在球面上的势方程的格林函数	303
5.15.5	直角平行六面体中 $\Delta u = 0$ 的格林函数	303
5.15.6	矩形内 Δu 的格林函数	308
5.15.7	圆形环的格林函数	310
5.16	补充材料	311
5.16.1	弦振动的例子	311
5.16.2	自由悬挂的绳的振动、贝塞尔函数	313
5.16.3	振动方程明显解的例子、椭圆柱函数	314
5.16.4	含有参数的边界条件	315
5.16.5	微分方程组的格林张量	315
5.16.6	方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 解的解析延拓	316
5.16.7	关于 $\Delta u + \lambda u = 0$ 解的节线的定理	317
5.16.8	无穷重数的本征值的例	317
5.16.9	展开定理的有效范围	317
	参考文献	317
第 6 章	变分法在本征值问题上的应用	319
6.1	本征值的极值性质	319
6.1.1	经典的极值性质	319
6.1.2	推广	322
6.1.3	当区域具有分隔组成部分时的本征值问题	325
6.1.4	本征值的极大-极小性质	325
6.2	由本征值的极值性质所得的一般结论	326
6.2.1	一般定理	326
6.2.2	本征值的无限增大	330
6.2.3	施图姆-刘维尔问题中本征值的渐近性质	331
6.2.4	奇异微分方程	332
6.2.5	关于本征值增大的进一步讨论、负本征值的出现	333
6.2.6	本征值的连续性	335

6.3 完备性和展开定理	339
6.3.1 本征函数的完备性	339
6.3.2 展开定理	341
6.3.3 展开定理的推广	342
6.4 本征值的渐近分布	343
6.4.1 在矩形上的方程	344
6.4.2 在有限多个方形或立方体所作成的区域上的方程 $\Delta u + \lambda u = 0$	345
6.4.3 把结果推广于一般的微分方程 $L[u] + \lambda \rho u = 0$	347
6.4.4 对任意区域本征值的渐近分布	349
6.4.5 对微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 而言本征值的渐近分布规律较精确的形式	354
6.5 薛定谔型的本征值问题	355
6.6 本征函数的节	360
6.7 补充材料和问题	364
6.7.1 本征值的极小性质、由完备性所作的推导	364
6.7.2 用没有节这个性质来刻画第一个本征函数	365
6.7.3 本征值的另外一些极小性质	366
6.7.4 本征值的渐近分布	367
6.7.5 双参数本征值问题	367
6.7.6 包含参数的边界条件	367
6.7.7 闭曲面的本征值问题	368
6.7.8 当有奇点出现时本征值的估计	368
6.7.9 板和膜的极小定理	369
6.7.10 双质量分布的极小问题	369
6.7.11 施图姆-刘维尔问题的节点、极大-极小原理	369
参考文献	370
第 7 章 本征值问题所定义的特殊函数	372
7.1 线性二阶微分方程的初步讨论	372
7.2 贝塞尔函数	373
7.2.1 积分变换的应用	373
7.2.2 汉克尔函数	374
7.2.3 贝塞尔函数和诺伊曼函数	376
7.2.4 贝塞尔函数的积分表示式	378
7.2.5 汉克尔函数和贝塞尔函数的另一积分表示式	380
7.2.6 贝塞尔函数的幂级数展开	385
7.2.7 各贝塞尔函数间的关系	388

7.2.8	贝塞尔函数的零点	394
7.2.9	诺伊曼函数	397
7.3	勒让德函数	401
7.3.1	施拉夫利积分	401
7.3.2	拉普拉斯的积分表示式	403
7.3.3	第二类勒让德函数	403
7.3.4	联属勒让德函数 (高阶勒让德函数)	404
7.4	应用积分变换方法于勒让德、切比雪夫、埃尔米特及拉盖尔方程	405
7.4.1	勒让德函数	405
7.4.2	切比雪夫函数	406
7.4.3	埃尔米特函数	407
7.4.4	拉盖尔函数	408
7.5	拉普拉斯球面调和函数	409
7.5.1	$2n+1$ 个 n 阶球面调和函数的确定	409
7.5.2	函数组的完备性	410
7.5.3	展开定理	410
7.5.4	泊松积分	411
7.5.5	麦克斯韦-西尔维斯特的球面调和函数表示式	412
7.6	渐近展开	417
7.6.1	斯特林公式	417
7.6.2	当变量值大时汉克尔和贝塞尔函数的渐近计算	419
7.6.3	马鞍点法	421
7.6.4	应用马鞍点法计算大参量和大变量的汉克尔函数和贝塞尔函数	422
7.6.5	马鞍点法的一般讨论	426
7.6.6	达布方法	426
7.6.7	应用达布方法于勒让德多项式的渐近展开	427
7.7	附录: 球面调和函数的变换	429
7.7.1	导言及符号	429
7.7.2	正交变换	429
7.7.3	球面调和函数的一个母函数	432
7.7.4	变换公式	434
7.7.5	直角坐标下的表示式	435
	附加参考文献	438
	索引	443

第 1 章 线性代数和二次型

在本卷内我们要处理许多数学分析的问题, 它们是和线性变换和二次型的理论紧密地联系着的; 因此我们在第一章中先简短地复习一下这个部分的某些方面, 假定读者对于这些问题已有一般的知识.

1.1 线性方程和线性变换

1.1.1 矢量

为了简短地叙述线性方程论的结果, 最适当的是引进矢量计算中的符号¹⁾. 我们称一组 n 个实数 $x_1, \dots, x_n$ 为一个 n 维矢量或 n 维空间的一个矢量, 而用相应的黑体字母 x 来简单地表示它. $x_i (i = 1, \dots, n)$ 这些数叫做矢量 x 的分量. 如果所有的分量皆为零, 那么我们称该矢量为零矢量. 在 $n = 2$ 或 $n = 3$ 的情形, 矢量在几何上可以解释为由坐标原点引向以 x_i 为直角坐标的那一点的“位矢”. 在 $n > 3$ 的情形, 不可能再有几何直观; 不过几何的语言依然适用.

给定两个任意的实数 λ 和 μ , 我们定义 $\lambda x + \mu y = z$ 为一个矢量, 它的分量 z_i 由 x 和 y 的分量 x_i, y_i 按照关系 $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$ 线性组合而成. 由此, 作为特例, 我们已给出了两个矢量的和及差的定义.

矢量 x 和 y 的“内积” $(x \cdot y)$ 表示一个数:

$$(x \cdot y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = (y \cdot x)^2. \quad (1)$$

有时候我们也称内积 $(x \cdot y)$ 为矢量 y 对 x 的分量, 反过来说也一样.

如果内积 $(x \cdot y)$ 为零, 我们就说 x 和 y 互相垂直或正交; 在 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的情形, 这种说法具有直接的直观意义. 一个矢量和它自己的内积 $x \cdot x = x^2$ 有其特殊的地位, 我们称之为该矢量的范数. x^2 的正平方根叫做矢量 x 的值或长度, 而记作 $|x| = \sqrt{x^2}$. 长度为 1 的矢量叫做归一化矢量或单位矢量.

对两个矢量 $a = (a_1, \dots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \dots, b_n)$ 的内积 $(a \cdot b)$ 而言, 以下不等式成立:

$$(a \cdot b)^2 \leq a^2 b^2,$$

1) 这里我们只涉及一种简短的表示法, 而不是真正来讲矢量分析或是它在 n 维空间的推广, 这方面研究的中心问题是关于一些不变量的寻求.

2) 有时记作 $x \cdot y$ 而不用括号.

或者不用矢量写法,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

其中等号当且仅当 a_i 和 b_i 成比例时方才成立, 这时候关系 $\lambda a + \mu b = 0$ 成立, 其中 $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

上述“施瓦茨不等式”¹⁾的证明可以由这样的论点得出, 就是二次方程

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$$

对于未知数 x 来说永远不会有二个不同的实根, 而必须有两个虚根, 除非 a_i 和 b_i 成比例; 施瓦茨不等式无非是把这事实用二次方程的判别式表出而已. 施瓦茨不等式的另一个证明可由下面的恒等式直接得出:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

矢量 $x_1, \dots, x_m$ 称为彼此线性独立, 假如不可能找到一组数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (不全等于零) 使矢量方程

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$$

成立, 也就是说使左边矢量的各个分量都为零. 如果情形不是如此, 我们就称这些矢量为线性相关的.

在 n 维空间, 具有分量

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0, \\ 0 & 1 & \cdots & 0, \\ & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

的 n 个矢量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 组成一组 n 个线性独立的矢量. 因为假如存在一个关系 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, 于是只要乘以 e_h 则由于 $e_h^2 = 1$, $(e_h \cdot e_k) = 0 (h \neq k)$ 就得出 $\lambda_h = 0$. 因此一组 n 个线性独立的矢量 (在 n 维空间) 总是存在的. 可是在 $n+1$ 个矢量 $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ (n 维空间的) 之间, 就至少有一个系数不全为零的线性关系存在:

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_{n+1} u_{n+1} = 0,$$

1) 这个关系在施瓦茨之前已为柯西所用过.