21世纪经济与管理规划教材
经济数学系列

概率论与数理统计

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

蔡海鸥　叶向　刘叶玲　李军林　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪经济与管理规划
经济数学系列

概率论与数理统计

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

蔡海鸥　叶向　刘叶玲　李军林　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/蔡海鸥等编著．—北京：北京大学出版社，2010.11
(21世纪经济与管理规划教材·经济数学系列)
ISBN 978-7-301-18041-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第215736号

书　　　名：概率论与数理统计
著作责任者：蔡海鸥　叶　向　刘叶玲　李军林　编著
责 任 编 辑：朱启兵
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-18041-9/O·0829
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752926
出版部 62754962
电 子 邮 箱：em@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销　者：新华书店
730毫米×980毫米　16开本　22.5印张　402千字
2010年11月第1版　2010年11月第1次印刷
印　　　数：0001—4000册
定　　　价：39.00元

丛书序言

在最近二十多年中，我国社会生活的各个方面发生了巨大变化，经济建设取得了令世人瞩目的奇迹，经济体制正在全面地向市场经济体制转轨。经济与社会的全面转型产生了对市场经济知识的巨大需求，这又极大地推动了我国经济学教育水平的整体提高与进步。

今天，我国大学里的经济学教育已经越来越趋向规范化与国际化，一种更加有利于经济学理论发展的学术氛围已经形成，一大批拥有现代经济学知识与新型经济学理念的崭新人才正在脱颖而出。但是，不可否认的是，我国经济学教育和研究的整体水平与世界一流大学相比还有比较大的差距。突出表现在，我们自己培养的经济学博士很少能够在欧美一流大学任教；在国际著名的经济学期刊上，特别是顶级的经济学期刊上也不多见纯粹由国内经济学家完成的研究成果发表，这些都说明要想提高我国经济学教育和研究的水平并缩短这些差距，我们要走的路仍然很长！

近五十年来，经济学的研究与其成果越来越呈现出科学化的态势，其中一个突出的表现形式就是数学理论与经济学研究的紧密结合。具有严密逻辑的数学方法彻底改变了以往经济学分析中存在的一些缺点，如论证缺乏逻辑一致性以及所得出结论的模糊性。同时，随着数学方法在经济学中的广泛应用，不论是经济学研究方法还是经济学的研究成果，都越来越具有科学的特征。而且经济学家们所构建的经济学理论在很大程度上具有可检验性，这就避免了我们接受那些似是而非、模棱两可的结论。应该说，这是一种对传统社会科学，尤其是对经济学研究理念的根本性突破。随之而来的就是许多经济学领域的研究成果也逐渐被科学界所认可，一个最突出的现象就是，瑞典皇家科学院从 1968 年开始，特别为经济学领域内的那些具有开创性的成果设立了诺贝尔经济科学纪念奖，使经济学这一最具科学特征的社会科学也跻身于科学行列之中。

经济学在近半个世纪已经取得了一大批突破性的研究成果，这些成果不仅加深了人类对现实经济问题的洞察，而且也影响着人类社会的进一步向前发展。几乎所有这些成果都是用数学方法或数学语言所完成的，它们的核心内容都是建立在完备的数学模型与严密的数学论证的基础之上的，而且相当数量成果本身就是由优秀数学家取得的。尤其是获得诺贝尔经济学奖的重大研究成果，更

是如此。从最早获奖的计量经济学理论、一般均衡理论，到最近获奖的资产定价理论、信息经济学理论与博弈理论，其分析方法与内容都是建立在数学理论与方法的基础之上的。近十年来两度获得诺贝尔经济学奖的博弈理论的主要贡献者纳什(Nash)与奥曼(Aumman)就是出色的数学家。因此，从某种意义上讲，这些成果在经济学理论上的突破，其实就是数学理论的研究应用及其分析方法的拓展。今天，数学已经融入经济学之中，成为了现代经济学最重要的分析工具与研究方法。

事实上，在人类文明的发展进程中，数学一直占据核心的位置，许多推动人类文明发展并影响人类生活的重大科学发现与科学理论，都离不开数学所起到的奠基性贡献。今天，不仅是在自然科学，而且在人文社会科学的诸多学科中，使用数学语言或数学模型进行理论分析和观点阐述的现象也非常普遍。而一些社会科学中的许多重大发展也源于数学工具的改进与数学思想的发展。因此，我们可以这样说，数学知识的进步在很大程度上是人类文明进步的一个重要标志。

在整个社会科学中，经济学应该说最具有科学的特征，这主要归功于数学在经济学中的广泛应用，我们相信，数学必将继续推动经济学理论不断地向前发展。因此，掌握现代经济学的一个必要前提条件就是要先学好数学的基础知识。

当前，国内许多高校的经济学院系也都根据现代经济学发展的需要，调整、修订并实施了新的数学教学计划，加大了数学课的教学时数，加深了数学课的难度，这就对经济管理专业学生的数学水平提出了更高的要求。正是在这种背景下，北京大学出版社策划出版了《21世纪经济与管理规划教材·经济数学系列》丛书。

本丛书主要是针对高等院校的经济学、管理学各专业学生所编写的。丛书的编著者分别是中国人民大学、复旦大学、南京大学、武汉大学和华中科技大学等著名高校的教师，他们中的多数都同时具有数学与经济学硕士以上的学位，他们不仅有深厚的数学功底，而且深谙现代经济学理论，所研究的课题也在经济学的前沿领域内。他们有多年为经济与管理专业本科生、研究生讲授微积分、线性代数、运筹学、概率论与数理统计等多门课程的教学经验，目前又承担着本科生、研究生的中高级微观经济学、中高级宏观经济学、计量经济学、数理经济学、金融经济学、博弈论与信息经济学等经济学理论课的教学工作。这是一支知识结构合理、教学经验丰富的写作团队。

在内容的选择上，每本教材都尽量考虑到不同层次、不同专业的教学需要，尽可能地使本系列教材在教学过程中为任课教师提供一个合理的选择空间。当然，不足之处难免存在，希望广大师生不吝赐教，以便本丛书今后不断修订完善。

在本丛书的策划、出版过程中，经北京大学中国经济研究中心姚洋老师推

荐,中国人民大学经济学院的李军林老师做了大量的组织协调工作。丛书编委会在此对他们表示诚挚的感谢!

丛书编委会

2006年6月

目　　录

第1章　随机事件及其概率

本章所涉及的基本概念和内容为随机事件、事件的概率、古典概型、几何概型，以及概率的公理化定义.

自然界和社会上发生的现象可以大致分为两大类：一类是在一定条件下必然发生的现象，如由于地球引力作用，向上抛一石子必然下落；同性电荷必相互排斥；等等，这类问题研究的是必然现象中的数量关系. 另一类现象是在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果，例如，抛一枚硬币，落地时，可能出现正面朝上，也可能出现反面朝上，在每次抛掷之前，无法确定会出现何种结果，这类现象称为**随机现象**. 当我们重复观察随机现象时候，就会发现大多数随机现象呈现一定的规律，这种规律称为统计规律性.

概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 一方面，它有自己独特的概念和方法；另一方面，它与其他数学分支又有紧密的联系，它是现代数学的重要组成部分. 概率论的理论与方法几乎遍及所有自然科学领域和社会科学领域研究.

§1.1　随机事件

一、随机试验

我们遇到过各种试验. 在这里，我们把试验作为一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，也可以是对某一事物的一次或多次观察. 比如，掷一枚硬币和观察某地区7、8月份的汛期水文资料都可以认为是试验.

下面举一些试验的例子：

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H(或者反面 T)出现的情况.

E_2：将一枚硬币抛三次，观察出现正面的次数.

E_3：抛一枚骰子，观察出现的点数.

E_4：记录车站售票处一天内售出的车票数.

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

E_6：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下特点：

1. 可以在相同的条件下重复地进行；
2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；
3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**.

二、样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的一切可能的结果是已知的. 我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω，样本空间的元素称为**样本点**. 例如，上面的 6 个随机试验的样本空间分别为：

$\Omega_1=\{H,T\}$；

$\Omega_2=\{0,1,2,3\}$；

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_4=\{1,2,\cdots,n\}$，这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数 n；

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_6=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度. 并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

三、随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情就叫**随机事件**，或简称**事件**. 随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 或者希腊字母 $\xi,\eta,\gamma,\cdots$ 表示，它是样本空间 Ω 的**子集合**. 在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称**事件 A 发生**，样本点所描述的事件称为**基本随机事件**.

例如在试验 E_3 中，如果用 A 表示事件“掷出奇点数”，那么 A 是一个随机事件. 由于在一次投掷中，当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时，则有事件 A 发生. 所以我们把事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$. 同样地，若用 B 表示事件“掷出偶点数”，那么 B 也是一个随机事件，$B=\{2,4,6\}$.

对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的**必然事件**，记为 Ω；显然样本空间 Ω 是必然事件. 在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 例如在 E_3 中，“掷出的点数不超过 6”就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 而事件“掷出的点数大于 6”是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集 $\varnothing$ 表示. **对于一个试验 E，它的样本空间 Ω 是 E 的必然事件；空集 $\varnothing$ 是不可能事件.** 必然事件与不可能事件不再是随机事件，但在概率论中，常把它们当做两个特殊

的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

将随机事件看成集合这一天才发现，使得概率研究被纳入数学研究的基本内容中，其理论成为数学分支的基本依据. 下面将运用已知的数学成果对概率理论展开描述，假定读者具有微积分的基础，熟悉我们的描述语言.

四、事件间的关系与运算

事实上，我们不但关心某个随机事件是否发生，更关心它发生的可能性大小，这就是事件的**概率**. 如果某个复杂事件与若干个简单事件有关联，而这些简单事件的概率都比较容易获得，应当如何确定这个复杂事件的概率？因为事件是一个集合，因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω，并假定随机事件 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或直接称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$. 若 $A\subset B$，同时有 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

2. 事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**(**或并事件**)，记为 $A\cup B$，或简记为 $A+B$. 事件 $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，即事件 A,B 中至少有一个发生.

事件的和可以推广到多个事件的情况. 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$. 可以推广至可列无穷的和，即 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

3. 事件的乘积

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**乘积事件**(**或交事件**)，记为 $A\cap B$，也简记为 AB. 事件 $A\cap B$(或 AB)：意味着事件 A 发生，而且事件 B 也发生，即 A 与 B 同时发生.

类似的，可以定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$. 亦可推广至可列无穷的积，即 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

4. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为

$A-B$.

5. 事件的互不相容(互斥)

事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容(或互斥)**的.

6. 事件的对立

将"A 不发生"的事件称为事件 A 的**对立事件**,记为 $\overline{A}$. A 和 $\overline{A}$ 满足:$A\cup\overline{A}=\Omega$,$A\overline{A}=\varnothing$,对立事件 $\overline{A}$ 与事件 A 是互不相容的,而且对立事件 $\overline{A}$ 的对立事件就是 A 事件,即 $\overline{\overline{A}}=A$.

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互不相容,则称这些事件是两两互不相容的. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且它们的和事件是必然事件,则称它们为一个**完备事件组**. 对立事件组是最简单的完备事件组.

如同集合一样,事件间的关系可以用 Venn 图(如图 1-1-1)直观地表示出来. 事件间的关系和运算与集合的关系和运算完全相似,这对建立概率论的严格数学基础非常有意义. 但是,这里我们应该熟悉用概率语言来解释随机事件的关系和运算.

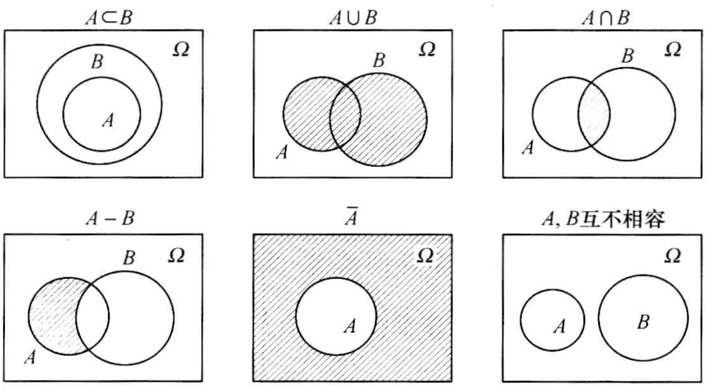

图　1-1-1

事件运算满足如下性质. 设 A,B,C 为事件,则有

交换律:$A\cup B=B\cup A$(或 $A+B=B+A$);$A\cap B=B\cap A$(或 $AB=BA$).

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$(AB)C=A(BC)$.

分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

德·摩根(De Morgan)定理:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对于 n 个事件,甚至可列个事件,德·摩根定理仍成立,即 $\overline{A_1\cup A_2\cdots\cup A_k\cdots}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_k\cdots$;及 $\overline{A_1A_2\cdots A_k\cdots}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cdots\cup\overline{A}_k\cdots$.