普通高等教育"十二五"规划教材
21世纪大学数学精品教材

概率论与数理统计教程

（第三版）

李子强 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

·21世纪大学数学精品教材·

概率论与数理统计教程

（第三版）

李子强　主编

科学出版社

北京

内容简介

本书分为三部分，其中1～5章为概率论部分，包括概率论的基本概念、一维和二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理等；6～10章为数理统计部分，包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、贝叶斯估计等；11、12章为应用部分，包括概率论与数量统计在实际中的应用以及统计分析软件SAS的简单介绍与应用举例. 每章后配备了练习题，书末提供参考答案.

本书可作为高等学校各专业本专科学生的概率论与数量统计课程教材，也可作为报考硕士研究生考生的复习参考书，还可供工程技术人员、科研人员和教师阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程/李子强主编. —3版. —北京：科学出版社，2011.8

普通高等教育“十二五”规划教材　21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-031613-4

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第115110号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011年6月第　三　版　开本：B5(720×1000)

2011年6月第五次印刷　印张：23 1/2

印数：17 001—23 000　　字数：459 000

定价：38.80元

《概率论与数理统计教程》(第三版)
编委名单

主　编　李子强

副主编　李逢高　黄　斌　罗幼喜

编　委　(按姓氏笔画为序)

方　瑛　田德生　刘　磊　李子强　李逢高

罗幼喜　胡二琴　费锡仙　黄　斌　商　豪

第三版前言

概率论与数理统计是研究和探索客观世界中随机现象的科学，在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与自然灾害预报等方面起到非常重要的作用．现代科学的发展，越来越需要概率论与数理统计的指导来寻求随机现象的统计规律性，检验、分析和预测随机现象的规律、发展和变化．因此，概率论与数理统计已经成为高等学校理、工、农、经管等专业的一门重要基础课程．

全书分为三篇：第一篇（第 1 至 5 章）为概率论基础，包括概率论的基本概念、一维和二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；第二篇（第 6 至 10 章）为数理统计基础，包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、贝叶斯统计；第三篇（第 11、12 章）为概率论与数理统计应用，包括概率论与数理统计在实际中的应用以及统计分析软件 SAS 的简单介绍与应用举例．

本书可作为高等学校经管类、工科、理科等学科概率论与数理统计课程教材．在编写过程中，我们力求做到结构严谨，知识体系相对完整，例题丰富，通俗易懂．为适应不同学科类教学的需要，我们对书中部分内容采用 * 标出，非数学和统计学专业学生在学时紧张情况下可不学习该部分内容，而数学和统计学专业学生可根据学时情况选择学习．为了方便学生巩固知识及自学，每章末配备了适量习题与自测题，并提供解题思路或参考答案．

本书由李子强任主编，李逢高、黄斌、罗幼喜任副主编．各章编写人员如下：田德生（第 1 章），刘磊（第 2 章），方瑛（第 3 章），李子强（第 4、5 章），商豪（第 6、11 章），李逢高（第 7 章），黄斌（第 8 章），费锡仙（第 9 章），胡二琴（第 10 章），罗幼喜（第 12 章）．罗幼喜、商豪、胡二琴对初稿内容进行了修改和整理，最后由李子强统稿、定稿．

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书难免存在疏漏和不足之处，恳请广大读者批评指正．

编　者

2007 年 10 月

目　录

第1章　概率论的基本概念

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支，本章重点介绍概率论中的基本概念，如随机事件、空间样本、概率等，它们是学习概率论与数理统计的基础.

1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　随机现象与随机试验

在自然界和人类社会生活中，存在着两类不同的现象：必然现象（确定性现象）和随机现象（不确定性现象），它们是从其结果能否准确预言的角度区分的. 例如，水在标准大气压下于 100℃沸腾；太阳每天都从东边升起；匀速直线运动的物体在不受外力作用下仍保持匀速直线运动等，这种在一定条件下必然会发生（或必然不发生）的现象，称为必然现象.

除了必然现象之外，在人类社会生活中还存在着大量的随机现象. 例如，抛掷一枚硬币，可能出现正面朝上，也可能出现反面朝上，而在每次抛掷之前，无法确定会出现何种结果；记录 24 小时通过武汉长江大桥的车辆数，可能是任意非负数，但事先无法预言其确切数字；每天中午观察武汉市的气温，它可能是某一实数，但事先无法确定其确切的数值. 这类现象的共同特点是：在条件相同的情况下，一系列试验或观察会得到不同的结果. 换言之，就某一次的试验或观察而言，它可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，呈现出一种偶然性，这种现象称为**随机现象**.

随机现象的结果虽然无法预测，但并不是完全无规律可循. 例如，在篮球的投篮比赛中，选手甲和选手乙投篮之前，无法预知他们是否能够投中，而在日常生活中常听到"甲比乙优秀"这样的说法，这样说的依据是：根据以往多次比赛的统计，甲的命中率比乙的命中率高. 可见，随机现象在个别试验或观察中呈现不确定的结果，而在大量重复试验或观察中，其结果呈现某种规律性，这种规律性称为**统计规律性**.

为了研究随机现象的统计规律性，必然要联系到对客观事物进行观察或试验. 为此将这种在相同条件下进行的大量重复的试验或观察称为**随机试验**，简称为**试验**，用字母 E 表示. 一般地，一个随机试验满足以下条件：① 试验可以在相同的条件下重复进行；② 每次试验的可能结果不止一个，而究竟会出现哪一个结果，在试验之前不能确定；③ 事先知道试验可能出现的所有结果.

下面来看例子.

例 1.1.1　下列各试验或观察都是随机试验.

E_1：掷一枚骰子，观察朝上一面出现的点数.

E_2：观察长江武汉关的水位. 防汛指挥部关心的是"超过警戒水位"与"没有超过警戒水位".

E_3：一学生宿舍的电话一天之内收到呼叫次数可能是某一个非负整数.

E_4：在一批日光灯管中任意抽取一只，观察具体使用寿命.

E_5：记录武汉市一昼夜的最高气温和最低气温.

从例 1.1.1 可知，随机试验是产生随机现象的过程，二者是并存的，人们通过随机试验来研究随机现象.

1.1.2 样本空间与随机事件

根据随机试验满足的条件可知，一个随机试验将出现怎样的结果在试验以前是不能确定的，但试验的所有可能结果在试验以前是已知的. 将随机试验 E 的每一个可能结果称为**样本点**，一般用 w 来表示. 样本点的全体构成的集合称为**样本空间**，一般用 Ω 来表示. 通常来说，给出样本空间是描述随机现象的第一步.

例 1.1.2 给出例 1.1.1 中各随机试验的样本空间 Ω_k $(k=1,2,\cdots,S)$.

解

$$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\Omega_2=\{\text{超过警戒水位,没有超过警戒水位}\}$$

在这里，若以"1"表示"超过警戒水位"，以"0"表示"没有超过警戒水位"，则 Ω_2 可写为

$$\Omega_2'=\{0,1\}$$

$$\Omega_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

$$\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$$

$$\Omega_5=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$$

这里，x 表示最低气温，y 表示最高气温，并设这一地区气温不会低于 T_0，也不会高于 T_1.

从这些例子可以看出，样本空间可以是数集，也可以不是数集；样本空间可以是有限集，也可以是无限集.

这里需要指出的是，样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如，E_6 表示将一枚硬币投掷两次，观察两次出现正面、反面的情况；E_7 表示将一枚硬币投掷两次，观察两次出现正、反面数相同的情况的次数. 虽然上述 E_6 和 E_7 都是将硬币投掷两次，但其试验目的不同，其样本空间是不同的. 对于 E_6，其样本空间为

$$\Omega_6=\{(\text{正面,正面}),(\text{正面,反面}),(\text{反面,正面}),(\text{反面,反面})\}$$

而对于 E_7，所有可能的结果只有出现 0 次和出现 1 次两个，故其样本空间有两个元素，即 $\Omega_7=\{0,1\}$.

人们在研究随机现象时，通常关心的不仅是某一个样本点在试验中是否出现，更关心满足某条件的一些样本点在试验中是否出现. 例如，在例 1.1.1 中的投掷一枚

骰子 E_1 的试验中，当关心掷出的点数是奇数的情况，则它是由 3 个样本点 1,3,5 所组成的集合. 同样在上述 E_6 的试验中，如果讨论“两次出现的面相同”的情形，那么它是由两个样本点“正正”和“反反”所组成的集合. 以上两个集合都是其相应样本空间的子集. 称样本空间的子集为**随机事件**，简称**事件**. 随机事件通常以大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 因此，以上两个事件可以表示为

$$A=\{\text{掷出的点数为奇数}\}=\{1,3,5\}$$

$$B=\{\text{两次出现的面相同}\}=\{(\text{正正}),(\text{反反})\}$$

由此可见，一个样本空间可以含有很多的随机事件.

一般地，对于随机试验 E，如果随机事件 A 中某一个样本点出现，那么就称事件 A 发生，否则就称事件 A 不发生. 例如，对于事件 $A=\{$掷出的点数为奇数$\}$，在试验中可能发生，也可能不发生，当且仅当掷出的点是 1,3,5 中的任一个时，则认为事件 A 发生. 同样，对于事件 $B=\{$两次出现的面相同$\}$，若试验的结果是(正，正)或(反，反)，则可以认为随机事件 B 发生了.

根据定义，随机事件是样本空间的子集，由一个样本点组成的单点集当然是样本空间 Ω 的一个子集合，因此也是随机事件，称之为**基本事件**. 样本空间 Ω 是其自身的子集，因而 Ω 也是随机事件. 由于样本空间 Ω 包含所有的样本点，每次试验中必有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必然发生，称之为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的子集，因此 $\varnothing$ 也是一个随机事件；而 $\varnothing$ 不含任何样本点，在每次试验中都不发生，所以称之为**不可能事件**. 值得注意的是，必然事件和不可能事件都不具有随机性；但为了数学处理上的方便，仍把 Ω 和 $\varnothing$ 当作两个特殊的随机事件.

1.1.3 事件的关系与运算

在同一样本空间中，往往存在许多随机事件. 概率论的一个重要研究课题就是希望通过对较简单事件的分析，去了解较复杂的事件. 因此，需要研究同一个随机试验的各种事件之间的关系和运算.

由于样本空间、随机事件都是集合，因此，随机事件之间的关系和运算同集合论中集合之间的关系和运算是一致的. 设随机实验 E 的样本空间为 Ω，而 A,B,A_k $(k=1,2,3,\cdots)$ 都是 Ω 的随机事件.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 为事件 B 的子事件，即属于事件 A 的每一个样本点均属于事件 B，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

显然，对任意事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的相等

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$，这表明事件 A 与事件 B 所包含的样本点完全相同.

3. 事件的和(并)

将表示"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件,称为事件 A 与事件 B 的和(并),记为 $A\cup B$,它是由属于 A 或 B 的所有样本点构成的集合. 事件 $A\cup B$ 发生意味着或 A 发生,或 B 发生,或 A 与 B 都发生.

一般地,事件的和(并)可以推广到多个事件的情形,即

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"的事件.

4. 事件的交(积)

将表示"事件 A 与事件 B 同时发生"的事件,称为事件 A 与事件 B 的交(积),它是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合,记为 $A\cap B$ 或 AB.

类似地,事件的交(积)可以推广到多个事件的情形,即

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"的事件.

5. 事件的差

将表示"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件,称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A-B$. 它表示由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合.

6. 互不相容(或互斥)事件

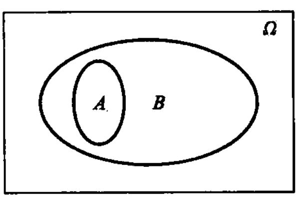
如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥),它表明事件 A 与事件 B 没有公共的样本点. 若 A 与 B 互不相容时,$A\cup B$ 记为 $A+B$,称为 A 与 B 的和. 样本点是互不相容的.

7. 对立事件(或逆事件)

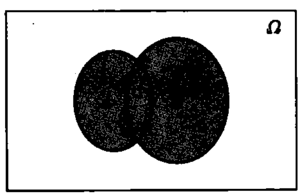
如果 $A\cup B=\Omega$,$A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件,或互为逆事件,它表示事件 A,B 中必有一个且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$,它由样本空间 Ω 中所有不属于 A 的样本点组成的集合,满足关系

$$A\cup\overline{A}=\Omega \qquad A\overline{A}=\varnothing$$

由定义知,两个对立事件一定是互不相容事件,而两个互不相容事件却不一定是对立事件. 上述事件的各种关系和运算可直观地用韦氏图表示,如图 1-1 所示.



$A\subset B$



$A\cup B$

图 1-1 事件关系与运算关系韦氏图

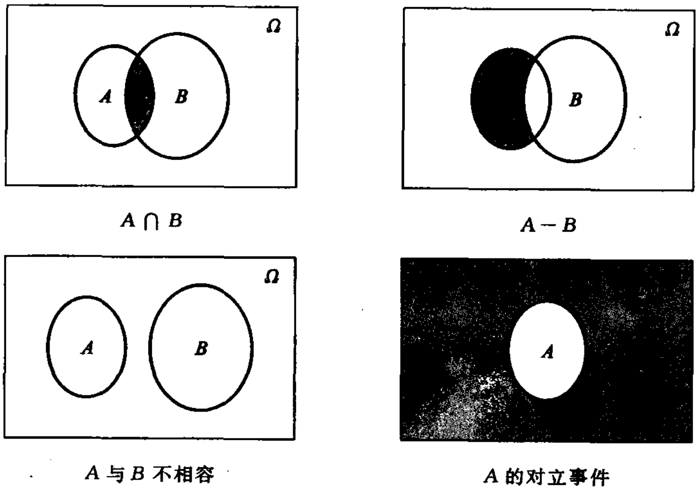


图 1-1　事件关系与运算关系韦氏图(续)

随机事件间的关系与运算可按照集合论中集合之间的关系和运算来处理，且满足如下的运算性质：对任意事件 A,B,C，有

(1) 交换律，$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律，$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 对偶律(德摩根公式)，$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B},\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

一般地，这些规律可推广到多个事件的情形，例如，对于事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

例 1.1.3　设 A,B,C 为三个事件，试利用它们表示下列事件：

(1) A 发生而 B,C 都不发生；(2) 三个事件都发生；(3) 三个事件都不发生；(4) 三个事件至少有一个发生；(5) 三个事件至多有两个发生；(6) 三个事件恰有一个发生.

解　(1) $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

(2) ABC；

(3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；

(4) $A\cup B\cup C$ 或 $\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup ABC$；

(5) $\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}$；

(6) $\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}$.

例 1.1.4　设某人用篮球投篮三次，用 A_i 表示事件“第 i 次投中，$i=1,2,3$”，试描述下列事件：

(1) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$； (2) $\overline{A_1\cup A_2}$； (3) $A_1A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

解 (1) 三次投篮中至少有一次没有投中；

(2) 第一、二次都没有投中；

(3) 恰好连续两次投中.

例 1.1.5 设 A,B 为任意的两个随机事件，证明：

(1) $(A\cup B)-B=A\overline{B}$；(2) $\overline{AB}=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}$.

证 (1) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=(A\overline{B})\cup(B\overline{B})=A\overline{B}\cup\varnothing=A\overline{B}$；

(2) 左边$=\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，

右边$=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}=(\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B})\cup A\overline{B}=[\overline{A}(B\cup\overline{B})]\cup A\overline{B}=\overline{A}\cup A\overline{B}$

$=(A\cup\overline{A})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}\cup\overline{B}$，

从而所证等式成立.

1.2 随机事件的概率

当做某一随机试验时，常常会发现随机事件是否发生及发生的可能性各不相同. 其试验结果的多样性可以用其包含样本点的不同来处理；而其发生可能性大小，常用不同的数值来表示，这个数值就称为**随机事件发生的概率**. 简单地说，事件的概率就是事件发生可能性大小的数量描述.

本节介绍概率论中最基本的概念——概率的定义，并讨论其相应的计算公式和性质.

1.2.1 概率的统计定义

定义 1.2.1 在相同的条件下，重复做 n 次试验，设事件 A 出现了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$.

易验证频率具有下列性质：① 非负性，对任何事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；② 规范性，$f_n(\Omega)=1$；③ 有限可加性，设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

显然，事件 A 的频率的大小与 A 在一次试验中出现的可能性的大小(概率)成正比，那么，是否能用频率来定义概率呢？这是不能的，因为频率具有波动性；但人们在实践中发现：在相同条件下重复进行同一试验，当试验次数较大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 具有一定的稳定性. 也就是说，当试验次数 n 很大时，事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 会在某一确定的数值 p 附近摆动，而且随着试验次数的增加，这种摆动的幅度愈来愈小. 频率的这种稳定性就是一种统计规律性. 历史上曾经有一些著名的统计学家进行过投掷硬币的试验，其结果详见表 1-1.