普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学

——微积分

主　编　张建梅　马庆华
副主编　席　敏　王慧蕾　饶兰兰

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教育

经济数学——微积分

主　编　张建梅　马庆华

副主编　席　敏　王慧蕾　饶兰兰

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是适合经济管理类专业使用的微积分教材. 全书共 8 章, 内容包括函数、极限与连续, 导数与微分, 中值定理与导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 多元函数微积分, 无穷级数, 微分方程与差分方程. 全书注意保持理论的完整性和严密性, 注重应用, 并配有大量例题和习题, 书后附参考答案. 书中穿插了相关数学史和数学家的阅读材料, 增加教材的可读性; 给出重要数学名词的英文翻译, 以提高学生阅读外文资料的能力.

本书可作为普通高等院校经济管理类专业的微积分教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学. 微积分/张建梅, 马庆华主编. —北京: 科学出版社, 2011

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-031987-6

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①张… ②马… Ⅲ. ①经济数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①F224.0②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 156973 号

责任编辑: 姚莉丽 房 阳 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2011 年 8 月第一次印刷 印张: 22 1/2

印数: 1—5 000 字数: 450 000

定价: 36.00 元

前　言

拉卡托斯(Imre Lakatos)说过：人类因为已经积累了大量的科学知识，要再提出有价值的学术观点，那就必须是新奇的. 作为一本大学数学基础教育的教材，虽然不可能有多少新奇的学术观点，但是却可以引导学生探索新奇，为今后提出有价值的学术观点打下良好基础. 这不仅是因为包括微积分在内的数学知识在自然科学、社会科学以及应用科学等许多领域里有日益广泛的应用，是人们在这些领域求得新知的重要工具，而且还基于我们对这本教材编写特色的那份自信. 概括起来，本书有如下几点特色：

(1)内容精炼，逻辑严谨，不拖泥带水；行文流畅，通俗易懂，具有很强的可读性. 这既有助于学生掌握完整的微积分知识，提高学习效率，又方便学生自学和复习.

(2)给出了重要数学名词的英文翻译，有利于提高学生阅读外文资料的能力，也为学生今后进一步的深造打下基础.

(3)在每章的结尾专门介绍了与本章内容相关的数学家和数学史，叙述了那些看似枯燥的数学知识背后的动人故事，展现了那些数学知识的原生态. 这既有助于激发学生的好奇和兴趣，也可以培养他们勇于探索的精神.

(4)为适应不同的教学对象和不同专业类别的教学需要，将有些内容加了“*”号以便在教学中进行取舍，略去不讲或以例题说明都不会影响教材的系统性. 这些内容也可作为选学内容或学生自学用.

(5)以注的方式对定理、概念、公式的理解和应用给出了进一步的总结.

(6)注重微积分的应用. 书中除了一些经典的几何或物理问题外，进一步侧重了在经济方面的应用.

(7)参与本书编写的人员都是在高校从事微积分教学 10～20 年的一线优秀教师，经验丰富，编写的内容有许多地方都体现了他们的教学心得和体会.

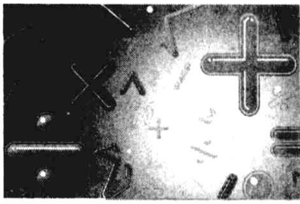
本书的编写工作由张建梅、马庆华主持. 各章的编写分工如下：第 1 章由马庆华撰写，第 2 章、第 3 章由饶兰兰撰写，第 4 章、第 5 章由席敏撰写，第 6 章、第 7 章由张建梅撰写，第 8 章以及数学家简介、数学史、附录等内容由王慧蕾撰写. 最后由张建梅、马庆华对全书进行修改、统纂定稿. 全书充分考虑了教师课堂教学的习惯和需要，教学起来自然会得心应手. 讲授本书所需教学时数约为 120 学时(不含习题课).

本书成于众人之手，彼此轩轻有别，错误和疏漏之处在所难免，真诚地希望各位读者批评指正.

编　者

2011 年 4 月于广东外语外贸大学

目　录



CHAPTER 1

第 1 章 函数、极限与连续

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中变量之间的依赖关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法.

1.1 函　　数

由于微积分中的函数是在实数范围内来讨论的，所以我们先复习一下与实数系有关的基本内容.

1.1.1 实数

我们知道，**实数**(real number)由**有理数**(rational number)与**无理数**(irrational number)两部分组成.

有理数包含零、正负整数与正负分数. 任意一个有理数均可以表示成$\frac{p}{q}$(其中 p，q 为整数，且 $q\neq 0$)，也可以表示为整数、有限小数或无限循环小数. 无理数只能表示成无限不循环小数.

由于实数与数轴上的点是一一对应的. 为简便起见，对实数与数轴上的点就不加区分，我们常用同一字母或数字既表示某个实数又表示以实数为坐标的数轴上的对应点. 例如，数 a 与点 a，数$\sqrt{3}$与点$\sqrt{3}$……

数轴上表示有理数的点称为有理点，表示无理数的点称为无理点. 数轴上任意两个不同的有理点之间一定存在无穷多个有理点，这称为有理数的稠密性. 同样地，无理数也具有稠密性. 可以证明，实数点能铺满整个数轴，而不会留下任何空隙，此即所谓的实数的连续性.

1.1.2 常用的实数集

全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$，全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$. 此外，常用的实数集合还有区间与邻域.

1. 区间

区间(interval)是常用的实数集，分为有限区间和无限区间两类.

定义 1.1.1 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，定义

1)有限区间(finite interval)

(1)闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

(2)开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

(3)半开半闭区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$.

2)无限区间(infinite interval)

引入记号 $+\infty$ 及 $-\infty$，则可类似地表示无限区间. 例如，

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\}=\{x\,|\,a\leqslant x\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x\},\quad (-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}.$$

在今后的讨论中，有时需要考虑由某点 x_0 附近的所有点构成的集合，为此需引入邻域的概念.

2. 邻域

定义 1.1.2 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 **δ 邻域**(neighbourhood)，记为 $U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$，其中点 a 称为该**邻域的中心**(center of neighbourhood)，δ 称为该**邻域的半径**(radius of neighbourhood)(图 1.1.1).

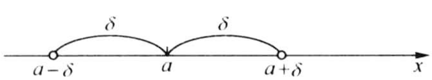


图 1.1.1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，所以 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$.

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心的 δ 邻域**. 记为 $U(\alpha,\delta)$，即 $U(\alpha,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**.

1.1.3 函数概念

为了今后表达方便，引入下面几个记号：

“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”(Any，All)；

“∃”表示“存在”(Existence)；

“s. t. ”表示“使得”(such that, subject to).

1. 函数的定义

定义 1.1.3 设 D 是一个给定的非空实数集. 若对于 $\forall x \in D$，按照一定规则 f，都有唯一确定的实数 y 和它对应，则称 y 为 x 的**函数**(function)，记为 $y=f(x)$，$x \in D$，其中 x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(induced variable)，数集 D 称为这个函数的**定义域**(domain of definition)，也记为 D_f，即 $D_f=D$.

若 $x_0 \in D_f$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义.

当自变量 x 取遍定义域 D 的所有数值时，对应的函数值 $y=f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**(range)，记为 $R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$.

注 函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相等的充要条件是它们的定义域和对应法则均相同. 至于自变量、因变量用什么字母表示，不影响函数关系.

例 1.1.1 $y=\arcsin(x^2+2)$.

对任何实数 x，都没有按给定规则与之对应的 y 值. 函数定义域不能是空集，因此，此例不是函数.

例 1.1.2 $y<x$.

按这个规则，每一个 x 有无穷多个与之对应的 y 值. 而函数定义中的对应规则要求对每一个 x 只有一个确定的 y 值与之对应，因此，此例也不是函数.

例 1.1.3 判断下面函数是否相同，并说明理由：

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$； (2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

解 (1) 虽然这两个函数的表现形式不同，但它们的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 与对应法则均相同，所以这两个函数相同.

(2) 虽然它们的自变量与因变量所用的字母不同，但其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 和对应法则均相同，所以这两个函数相同.

2. 函数定义域

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为**自然定义域**. 自然定义域一般是不给出的，需要我们根据对应规则确定.

求函数定义域要注意：偶次方根下不能是负数，分式的分母不能为零，对数的真数必须大于零，以及三角函数与反三角函数有它自己的变化范围等.

例 1.1.4 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)$ 有意义，显然 x 要满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -2,\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的定义域为 $D=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 1.1.5 求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)$ 有意义，显然 x 要满足

$$\begin{cases}3-x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ 5+4x-x^2\geqslant 0,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}x<3,\\ x\neq k\pi,\quad (k\text{ 为整数}),\\ -1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的定义域为 $D_f=\{x\mid -1\leqslant x<3, x\neq 0\}=[-1,0)\cup(0,3)$.

3. 多值函数

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**(uniform function)，否则称为**多值函数**(multiform function). 例如，$y=\pm\sqrt{25-x^2}$. 如果不作声明，本书中提到的函数均指单值函数.

4. 函数的常用表示法

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、公式法(解析法)，这在中学里大家已经熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$$

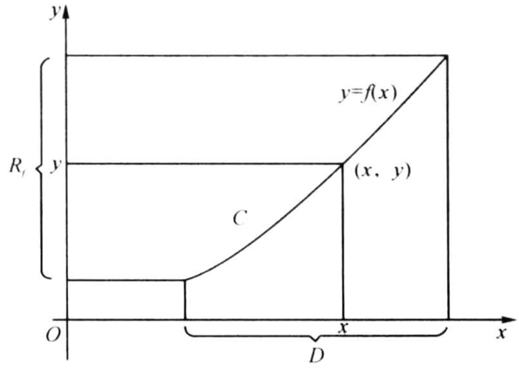


图 1.1.2

称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形(图 1.1.2). 图中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

这里需要强调的是其中的公式法是将自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法. 根据函数的解析式的形式的不同，函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(1) **显函数**(explicit function). 函数 y 由 x 的解析表达式直接表示，即 $y=f(x)$. 例如，$y=2x+1$.

(2) **隐函数**(implicit function). 函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如，$\ln y=\cos(x+y)$. 显然隐函数不一定能用显函数表示出来. 且不是任意一个方程 $F(x,y)=0$ 都能确定一个 y 与 x 的函数关系. 例如，$x^2+y^2+1=0$ 就不能确定一个 y 与 x 的函数关系，因为函数定义域不能是空集.

(3) **分段函数**(piecewise function). 函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式.

以下是几个常见的分段函数.

例 1.1.6 绝对值函数(absolute value function):

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,其图形如图 1.1.3 所示.

例 1.1.7 符号函数(sign function):

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,其图形如图 1.1.4 所示.

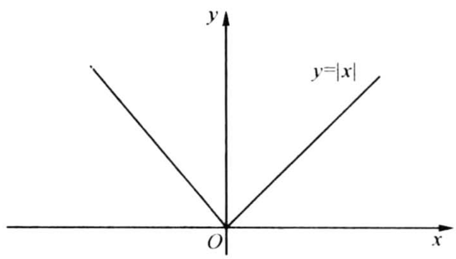


图 1.1.3

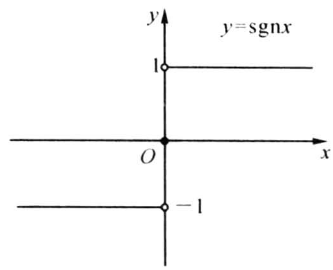


图 1.1.4

例 1.1.8 取整函数(integer function):

$$y=[x],\quad \text{其中},[x]\text{表示不超过 } x \text{ 的最大整数}.$$

例如,$[\pi]=3$,$[-2.3]=-3$.

易见取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$,其图形如图 1.1.5 所示.

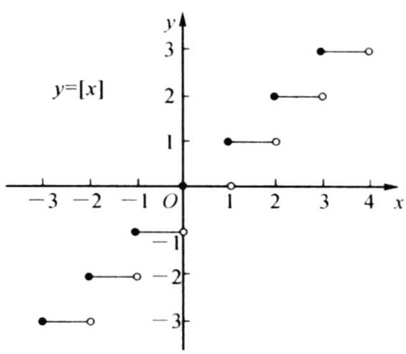


图 1.1.5

1.1.4 函数的几种特性

1. 函数的有界性

若有正数 M 存在,使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 I

上是**有界函数**(bounded function)；否则，$f(x)$在区间 I 上是**无界函数**(unbounded function).

如果存在常数 M(不一定局限于正数)，使函数 $f(x)$在区间 I 上恒有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$在区间 I 上有上界，并且任意一个 $N\geqslant M$ 的数 N 都是 $f(x)$在区间 I 上的一个上界；如果存在常数 m，使 $f(x)$在区间 I 上恒有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$在区间 I 上有下界，并且任意一个 $l\leqslant m$ 的数 l 都是 $f(x)$在区间 I 上的一个下界.

显然，函数 $f(x)$在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在区间 I 上既有上界又有下界.

例如，$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内，数 1 是它的一个上界，数 -1 是它的一个下界(当然大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界). 故函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界，在$[1,+\infty)$内有界.

再如函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的，因为 $0<\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1$.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间 I 上**严格单调递增**(strictly monotone increasing)(图 1.1.6)；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间 I 上**严格单调递减**(strictly monotone decreasing)(图 1.1.7). 单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**(monotone function).

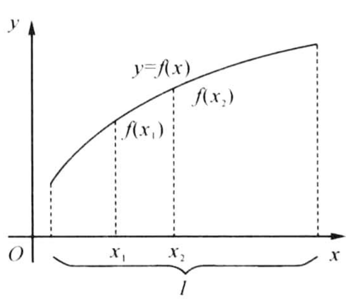


图 1.1.6

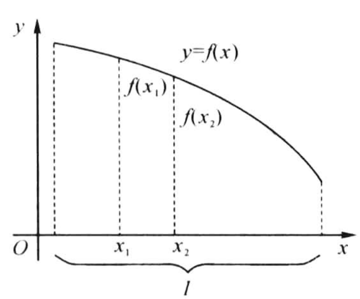


图 1.1.7

如果在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $y=f(x)$在区间 I 上为广义单调增加(或广义单调减少)的函数. 广义单调增加的函数，通常简称为单调增加的函数或非减函数；广义单调减少的函数则简称为单调减少的函数或非增函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是严格单调减少的；在区间$(0,+\infty)$内是严格单调增加的；在区间$(-\infty,+\infty)$内函数 $y=x^2$ 不是单调的. 而函数 $y=x$，$y=x^3$ 在区

间$(-\infty,+\infty)$内都是严格单调增加的.

3. 函数的奇偶性

函数 $f(x)$在关于原点对称的区间 I 上,

若$\forall x\in I$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**(even function);

若$\forall x\in I$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**(odd function).

偶函数的图形是关于 y 轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的.

例如,$f(x)=x^2$,$g(x)=x\sin x$ 在定义区间上都是偶函数. 而 $F(x)=x$,$G(x)=x\cos x$ 在定义区间上都是奇函数.

例 1.1.9 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解 方法一.
$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).\end{aligned}$$

由定义知 $f(x)$为奇函数.

方法二.
$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln1=0.\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为奇函数.

进一步可知 $F(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$既是奇函数,也是偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在一个常数 $T>0$,使得对一切的 $x\in D$,有$(x\pm T)\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为**周期函数**(periodic function). 并把 T 称为 $f(x)$的一个周期. 应当指出的是,通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期. 但并非每个周期函数都有最小正周期. 如函数 $f(x)=2$.

对三角函数而言,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,而 $y=\tan x$,$y=\cot x$则是以 π 为周期的周期函数.

例 1.1.10 设函数 $f(x)$是周期为 $T(T>0)$的周期函数,试求函数 $f(ax+b)$的周期,其中 a,b 为常数,且 $a>0$.

解 因为

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+T+b)=f((ax+b)+T)=f(ax+b),$$

故按周期函数的定义,$f(ax+b)$的周期为$\dfrac{T}{a}$.

特别地，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期均为 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$. $y=\tan kx$，$y=\cot kx$ 的周期均为 $\dfrac{\pi}{|k|}$.

关于函数的性质，除了有界性与无界性之外，单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质，而不是每一个函数都一定具备的.

习题 1.1

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=\arcsin(x-3)$；　(3) $y=\sqrt{3-x}-\arctan\dfrac{1}{x}$；

(4) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；　(5) $y=e^{\frac{1}{x}}$；　(6) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

3. 证明函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

4. 证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的函数.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=0$；　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) $y=x(x-1)(x+1)$；　(4) $y=\sin x-\cos x+1$.

6. 判断函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$ 的奇偶性.

7. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其最小正周期：

(1) $y=\cos(x-1)$；　(2) $y=\sin^2 x$；　(3) $y=x\cos x$.

8. 若 $f(x)$ 对其定义域上的一切 x，恒有 $f(x)=f(2a-x)$，则称 $f(x)$ 对称于 $x=a$.

证明：若 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b(a<b)$，则 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

9. 设狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}.\end{cases}$$

求 $D\left(-\dfrac{7}{5}\right)$，$D(1-\sqrt{2})$，$D(D(x))$. 并讨论此函数的有界性和周期性.

10. 某工厂生产某型号车床，年产量为 a 台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 b 元，设产品均匀投入市场，且上一批用完后立即生产下一批，即平均库存量为批量的一半. 设每年每台库存费为 c 元. 显然，生产批量大则库存费高；生产批量少则批数增多，因而生产准备费高. 为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系.

11. 某运输公司规定货物的吨千米运价为：在 a 千米以内，每千米 k 元，超过部分为每千米 $\dfrac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系.但在研究过程中,哪个量作为自变量,哪个量作为因变量(函数)是由具体问题来决定的.

例如,设某种商品销售总收益为 y,销售量为 x,该商品的单价为 a,则销售收入 y 是 x 的函数,即可以确定函数 $y=ax$.若已知收入 y,反过来求销售量 x,则有 $x=\frac{y}{a}$.由此可知 $y=ax$ 与 $x=\frac{y}{a}$ 是同一个关系的两种写法,但从函数的观点来看,由于对应法则不同,它们是两个不同的函数.我们称 $x=\frac{y}{a}$ 是 $y=ax$ 的反函数,或者说它们互为反函数.

一般地,设函数的定义域为 D_f,值域为 R_f.对于任意的 $y\in R_f$,在 D_f 上至少可以确定一个 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$.如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,就可以得到一个新的函数:$x=f^{-1}(y)$.我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**(inverse function),而把函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**(direct function).

注 (1)应当说明的是,虽然直接函数 $y=f(x)$ 是单值函数,但是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 却不一定是单值的.但如果 $y=f(x)$ 不仅是单值的,而且单调,则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是单值的.例如,$y=f(x)=x^2$ 的定义域为 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=[0,+\infty)$.任取非零的 $y\in R_f$,则适合 $y=x^2$ 的 x 的数值有两个:$x_1=\sqrt{y}$,$x_2=-\sqrt{y}$.所以,直接函数 $y=x^2$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是多值函数 $x=\pm\sqrt{y}$.如果把 x 限制在区间 $[0,+\infty)$ 上,则直接函数 $y=x^2$ 的反函数 $x=\sqrt{y}$ 是单值的.并称 $x=\sqrt{y}$ 为直接函数 $y=x^2$, $x\in\mathbf{R}$ 的反函数的一个单值分支.显然,反函数的另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$.

(2)一个函数若有反函数,则有恒等式

$$f^{-1}(f(x))\equiv x,\quad x\in D_f,$$
$$f(f^{-1}(y))\equiv y,\quad y\in R_f.$$

例如,直接函数 $y=f(x)=\frac{3}{4}x+3$,$x\in\mathbf{R}$ 的反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\frac{4}{3}(y-3),\quad y\in\mathbf{R},$$

并且有

$$f^{-1}(f(x))=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x+3\right)-3\right]\equiv x,\quad f(f^{-1}(y))=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right]+3\equiv y.$$

(3)由于习惯上 x 表示自变量，y 表示因变量，于是我们约定 $y=f^{-1}(x)$ 也是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数.

(4)反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$，这两种形式今后都要用到. 应当说明的是函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 具有相同的图形. 而直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的(图 1.2.1).

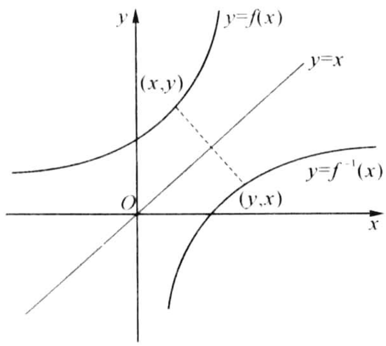


图 1.2.1

1.2.2 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数函数这 6 类函数称为**基本初等函数**(basic elementary function). 具体为

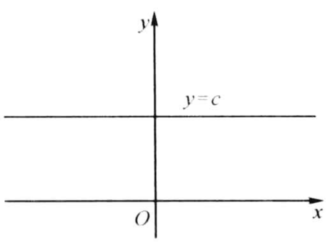


图 1.2.2

常数函数：$y=c$(c 为常数)(图 1.2.2)；

幂函数：$y=x^a$ ($a\in\mathbf{R}$)；

指数函数：$y=a^x$ ($a>0,a\neq1$)；

对数函数：$y=\log_a x$ ($a>0,a\neq1$)；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$ 和 $y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，$y=\operatorname{arcsec} x$，$y=\operatorname{arccsc} x$.

这些函数在中学的数学课程里已经学过. 这里只作简要复习.

1. 幂函数(power function)

$$y=x^a\quad(a\in\mathbf{R}).$$

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同，但是无论 a 取何值，幂函数在 $x\in$

$(0,+\infty)$内总有定义，且经过$(1,1)$点. 当 $a\in\mathbf{N}$ 或 $a=\dfrac{1}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}^+$ 时，定义域为 $\mathbf{R}$. 常见的幂函数的图形如图 1.2.3 所示.

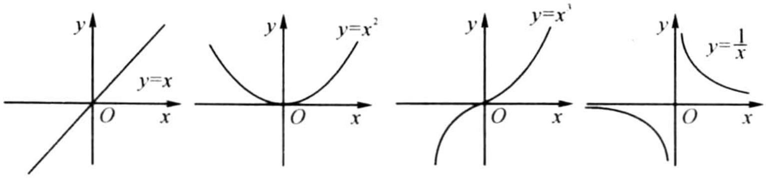


图 1.2.3

2. **指数函数**(exponential function)

$$y=a^x \quad (a>0,a\neq 1).$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$. 指数函数的图形如图 1.2.4 所示.

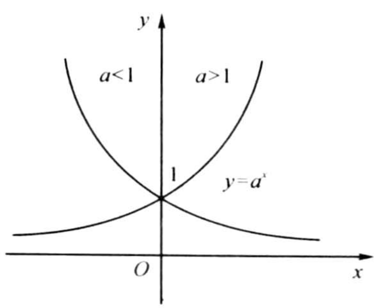


图 1.2.4

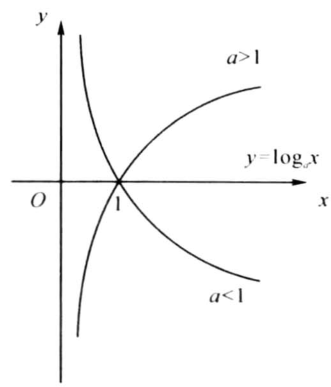


图 1.2.5

3. **对数函数**(logarithm function)

$$y=\log_a x \quad (a>0,a\neq 1).$$

定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 其图形如图 1.2.5 所示.

在工程中，常以无理数 $\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底，并且记 $\mathrm{e}^x=\exp x$，$\log_{\mathrm{e}} x=\ln x$，而后者称为自然对数函数.

4. **三角函数**(circular function)

三角函数有 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$ 和 $y=\csc x$，其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形如图 1.2.6 所示. 观察图形易知它们的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、有界性等性质.