模块教材

高中新课标

数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：袁桐 何继刚 姚平

数方法赏析

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

复数方法赏析

本册编著：袁　桐（扬州新东方中学数学特级教师）

何继刚（扬州大学附中数学特级教师）

姚　平（江苏省兴化中学数学高级教师）

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据
复数方法赏析/毛文凤主编.-北京:中国
大百科全书出版社,2005
新课标高中数学模块教材
ISBN 7-5000-7220-1
Ⅰ.复… Ⅱ.毛… Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142243 号

策划设计:可一图书　(http://www.keyibook.com)
责任编辑:简菊玲

新课标高中数学模块教材
复数方法赏析
* * *
中国大百科全书出版社出版
全国新华书店经销
http://www.ecph.com.cn
北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010-88390797
南京玄武湖印刷实业有限公司印刷
* * *
2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷
890×1240 毫米　32 开本　9 印张　161 千字
ISBN 7-5000-7220-1/G·818
定　价:13.00 元

序

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容(指高中)相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

(作者系南京师范大学数科院教授)

前　言

复数是中学数学里的一个传统课题，但是由于它方法的综合性，被很多国家从中学教材中删去。新的高中课标把复数作为选学内容，又提出来了，而且更重视复数方法的综合应用，因此就重视了复数与几何、复数与三角、复数与代数、复数与物理的联系，因而更重视复数思想、复数运用的策略研究。

本书是编者从复数方法的赏析这一新的角度来介绍复数的发展历史与方法，包含了原教材中复数部分的内容，还重视了选材与叙述的知识性、趣味性、文化性、思考性，表达了编者对复数的认识，更表达了编者对新课标的理解。

作为"数学模块教材"系列丛书的一个分册，我们努力为高中师生提供学习、理解新课标的教材。所以，复数内容是一个比较完整的部分，只是，阅读它，需要有相关的几何、三角、代数、物理等知识和方法作基础，习题有些较难，可以先看提示，我们相信，一旦理解、掌握了这些方法，会感到愉悦，会得到兴趣。

学习数学，通常都要一边读书，一边思考，还要一边动手画画写写。本书常以一些具体问题出发，通过解答

说明思路与解法，进一步再加评注，提出思考的来由。这就要求读者，在阅读了每章开始的几个问题之后，逐步做到先思考后看解答与说明。这样做会加深印象，也更能体会作者的意图。因为学习数学的目的，最终是能自己解决问题，是能提高解决问题的能力。读书是过程，最后要吸收全书的精华，超过教师，超越作者，超越现成的材料，达到创新的境界。

还希望读者在学习过程中，形成互动的习惯，有问题欢迎与作者沟通。

本书主要由扬州大学附中何继刚执笔，江苏省兴化中学高级教师姚平也参加了部分编写和审稿工作，不当之处，请指正。

编者

目　录

第一章　虚数不“虚”

一、虚数不“虚”

正如大家知道的，$\mathbf{C}$ 代表复数集. 当 $x \in \mathbf{C}$，$y \in \mathbf{C}$ 时，$y = f(x)$ 称为复(变)函数.

在理科专业的学习中，通常都要开设“复变函数”这门学科. 这是因为复变函数的研究应用很广，尤以流体力学(包括空气动力学等)为多. 如像水库设计、水力发电工程设计都要用到复数或复变函数. 又如飞机机翼的设计，就要利用“复数映射”将一种曲线围成的图形映射成矩形处理. 正因为如此，中学生了解一些复数的有关知识是很必要的.

数学各部分内容的和谐美，自然也反映到复数部分. 很多数学问题可以“一题多解”，这里的“多解”，是指可以有不同的思路，完全不同的方法. 复数由于它的本身的性质，往往也能起着独特的作用. 复数既是一种数的称呼，又是一种方法. 一个几何问题，可能用复数解决会显得方便. 数论是以研究整数为己任的，但为了研究数论，有时还需要用到复数，甚至成为“解析数论”这门专门学科.

复数的研究是来源于对虚数的认识，只有认识到“虚数不虚”之后，才会去建立复数.然而这一点是很不容易的.

早在7世纪，印度数学大师布拉马古夫塔(Brahmagupta，598～660)在公元628年出版的代数一书中，发表了二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a，b，c 为常数，$a\neq 0$)的解的公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

这是目前世界公认的二次方程式的求解公式.

用此公式解二次方程式 $x^2+2x+3=0$ 时，得 $x=-1\pm\sqrt{-2}$，此处出现了 $\sqrt{-2}$.这就是发现虚数单位的根源.当时，多数数学家认为“不会有这类数”，处理的办法是“这类方程无解”.

1545年，意大利数学家卡丹第一个认真地讨论了虚数，他在著作《大术》中研究了这样的问题：两数的和是10，积是40，求这两个数.也就是解方程 $x^2-10x+40=0$.他指出：尽管这个问题没有实数解，但是，假如把答案写成 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 这样两个令人诧异的表达式，就能满足题目的要求.他验证如下：

$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=5+5=10$；

$(5+\sqrt{-15})\times(5-\sqrt{-15})=5^2-(\sqrt{-15})^2=25-(-15)=40.$

应当指出，当时卡丹将两根定义成：$5\cdot\tilde{p}\cdot R\cdot\tilde{m}\cdot 15$ 与 $5\cdot\tilde{m}\cdot R\cdot\tilde{m}\cdot 15$，其中 R 相当于根号，$\tilde{m}$ 是减(负)号、$\tilde{p}$ 表示加号，这是最早的

虚数表示法. 这就宣告了虚数的诞生. 然而他在运用他自己发现的解三次方程 $x^3+px+q=0$ 的卡丹公式：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

时，却碰到了一个令人费解的疑问. 例如，方程 $x^3-15x-4=0$ 按卡丹公式有

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \qquad (*)$$

这里出现了负数开平方这一当时认为不可能的运算. 但另一方面，由

$$\begin{aligned} x^3-15x-4 &= x^3-4x^2+4x^2-16x+x-4 \\ &= (x-4)(x^2+4x+1)=0 \end{aligned}$$

可知，4，$-2\pm\sqrt{3}$ 是这个三次方程的三个实根.

这一现象的出现，使当时的数学家们感到非常困惑：为什么通过“不可能的运算”却能表达完全现实的结果呢？同时，这一现象也让人们感到：虚数并不“虚”. 然而真正第一次证明虚数并不“虚”的是意大利数学家邦贝利.

尽管在邦贝利之前，法国的舒开在《算术三篇》中得到二次方程 $4+x^2=3x$ 的二根为 $\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}$，但他又声称“这是不可能的.”卡丹也得到些结果，引出一些疑问，不能继续下去，他也称虚数是“诡辩的”“虚幻的”量，而邦贝利则在 1572 年的《代数学》一书中大

胆设想,按实数的运算规则将(*)式中右边两个立方根作了如下分解变形:

$\because 2 \pm \sqrt{-121} = 8 \pm 12\sqrt{-1} + 6(\sqrt{-1})^2 \pm (\sqrt{-1})^2\sqrt{-1} = (2 \pm \sqrt{-1})^3$

$$\therefore x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$= 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4.$$

这说明:该过程只有借助$\sqrt{-1}$,才能用卡丹公式解得实数根.邦贝利还进一步建起了以$\sqrt{-1}$为单位的新数的四则运算,同时还创造性地将虚数和实数统一了起来,使它们各自成为一个更大数集的组成部分.为了在这更大的数集中定义算术运算,尤其是加法运算,他确定了更大数集中的元素的基本形式为$a+b\sqrt{-1}$,其中a、b为任意实数.这就为能自然地将数集扩充到复数集奠定了一定的基础.

虽然如此,大物理学家、数学家牛顿认为,在解方程中给出虚根,只是为了"使不可能解的问题显得像是可以解的样子".沃利斯曾解释为:假设某人失去10亩土地,也就是他得到-10亩土地,如果这块土地是正方形的,那么它的边长就是$\sqrt{-10}$,大数学家莱布尼兹说得更妙,"虚数是理想世界的奇异创造,几乎是介于存在与不存在之间的两栖动物".这些伟大人物的语言并没有阻挡住数学家前进的决心和

步伐.

1637 年,法国数学家在《几何学》一书中,第一次给出了“虚数”这个名字,代表 $a+b\cdot\sqrt{-1}$,而这个“虚”字又给人一种“虚幻”的感觉.

1714 年,牛顿的学生给出:

$$\sqrt{-1}\cdot x=l(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)$$

1777 年,欧拉首次用 i 表示 $\sqrt{-1}$.

棣莫弗与欧拉给出了公式:

$$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin x$$

1741 年,欧拉给出著名公式:

$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 在 $x=\pi$ 时,联系了五个数学中重要的数:0, 1, i, π, e.

1797 年,挪威数学家威塞尔提出了与现代复平面表示法一致的几何表示法.

1806 年,日内瓦的阿尔肯提出了复数模的概念以及 i, i^2, i^3, i^4 的几何意义. 直到 1837 年,经高斯的系统描述,复平面与复数域的等价性,术语“复数”和符号“i”方为数学界所通用. 也就是说,虚数从开始被数学家认识,到理论的完备、数学界的普遍认可,也经历了 300 多年.

二、虚数与复数

数是数学研究最基本的对象之一,数的概念不断发展与扩充有两

个基本动力：其一是人类社会实践水平的逐步提高；其二是数学内部的矛盾运动. 从社会实践的角度和数学本身来看，数学必须考虑正的运算与逆的运算.

对两个任意的正整数，施行加法运算，其和还是正整数，也就是说从正整数集出发，进行正运算加法，我们不会超出正整数集的范围. 但其逆运算——减法——就使我们超出了正整数集，当我们把零与负整数合并到正整数集后，在整数集中其逆运算即可永远可能了. 第二种逆运算——除法，为了使它能永远实施，引入了分数的概念，全体整数和分数统称为有理数，在有理数集中，对于加法、减法、乘法与除法四种代数运算是封闭的，也就是说，对任意两个有理数(除了零以外)，进行其中的任何一种运算，其结果还是这个集合中的元素——有理数. 第三种逆运算是开方，一方面使我们引进了无理数，使数集扩充到实数集. 另一方面，它给我们以 $y\sqrt{-1}$形式的数.

为了进一步扩充数集，我们必须遵守下列原则：

(1)新数集应该包含实数集.

(2)新数集中方程 $x^2+1=0$ 应该有解，即新数集中含有平方后等于-1 的数.

(3)实数集中的两个基本运算——加法、乘法，在新数集中应有定义，且保持在实数集中的运算规律和一些重要关系.

数学家们根据这些原则，通过一系列的定义将实数集扩充到了复

数集.由于复数中增加了新数,因此复数集一方面将具有原来实数集所没有的新性质,另一方面随着数集的扩充,原数集的若干性质,新数集将不再具备,从而使新数集带有了新的特点:

(1)在包含了具有性质 $i^2=-1$ 的元素 i 后的复数集中,开任何次方的运算永远可以实施.

(2)在高斯建立了复平面以后,复数 $z=a+bi$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$,起点在原点的位置向量 $\overrightarrow{OZ}$ 之间建立了一一对应关系,复数的加、减、乘、除、乘方、开方都具有了明显的几何意义,使复数与平移、旋转运动建立了对应关系,使数和形得到了很好的统一.

在复平面上,虚数具有旋转特征,当复数 z 乘以 i 以后,则 z 对应的点将被逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$,且其模长不变,由此可见,虚数单位 i 的作用是以 $\frac{\pi}{2}$ 为单位的正旋转变换,那么能否使之产生连续的旋转变换?历史上早已作出了回答,是可以的.这就是指数函数 e^{ix} 的功能,即欧拉公式所表示的特征.

(3)复数 z 还具有周期性,复数不但能表现运动的平移性,更能表现运动的旋转性,其数学表达式中,既有非周期成分(模),又有周期性成分(辐角).所以人们谈到周期理论就必然联想到复数、复变函数.数学研究表明,涉及周期函数的理论,如果不应用复变函数,其困难是难以想象的,有了复变函数工具,很多数学问题就可以容易地得到解决.

(4)实数集扩充到复数集后,实数可以比较大小这个性质在复数集中不再具备.因此,在求解复系数的一元二次方程时,$\Delta = b^2 - 4ac$ 不再具有根的判别功能.

(5)复数集具有"完备性".复数集对加、减、乘、除、乘方、开方运算是封闭的,对极限运算也是封闭的.代数基本定理告诉我们,一切代数方程的解的集合不可能超出复数集.

第二章　复数运算的赏析

§1　复数的分类与复数的结构特征

问题　设 x 是模为 1 的复数，则函数 $f(x)=x^2+1+\frac{1}{x^2}$ 的最小值为　　（　　）

A. 不存在　　B. 为 -1　　C. 为 1　　D. 为 3

思路引导　实数集扩充到复数集后，实数可以比较大小这个性质，在任意两个复数之间不再具备了．明确地说，只有当两个复数为实数时才能比较大小，实数与虚数，虚数与虚数是不能比较大小的．本题可设 $x=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$，代入后进行虚、实部分离，再利用 $f(x)=x^2+1+\frac{1}{x^2}$ 为实数的隐含条件求解．

解　由 $|x|=1$ 可设 $x=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$，代入得

$$f(x)=\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta+1+\frac{1}{\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta}=2\cos2\theta+1.$$

当 $\cos2\theta=-1$（或 $x=\mathrm{i}$）时，$f(x)$ 有最小值 -1．应选 B．

思维误区　若不顾条件，盲目用不等式 $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$，或 $f(x)=$