



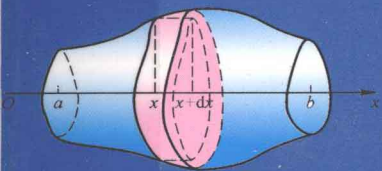
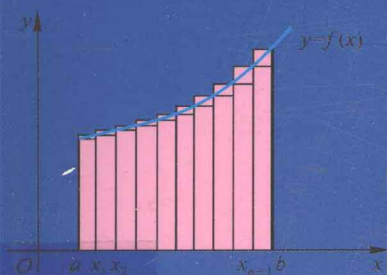
自主创新
方法先行

高等数学

(上册)

主编 张学山

主审 段承后



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

国家自然科学基金研究项目 (50778037)

LÜSE JIANZHU DE
JIEGOU YINGBIAN



绿色建筑的结构应变

方立新 王琳琳 编著



知识产权出版社
INTELLECTUAL PROPERTY PUBLISHING HOUSE

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”(项目编号:2009IM010400)子课题“科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果。

本书在内容的确定和表述上,充分考虑了一般本科院校学生的学习能力、动力等实际状况,加强了对学生数学应用能力的培养,重视说理,密切联系实际。

本书分为上、下两册,上册包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程;下册包括空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数。本书可作为一般本科院校理工类各专业的高等数学课程教材,也可作为其他读者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/张学山主编. —北京:高等教育出版社, 2011. 6

ISBN 978 - 7 - 04 - 032192 - 0

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 084453 号

策划编辑 王 强
插图绘制 尹文军

责任编辑 徐 可
责任校对 胡晓琪

封面设计 于 涛
责任印制 尤 静

版式设计 范晓红

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京铭成印刷有限公司
开 本 787 × 960 1/16
印 张 27
字 数 500 000
购书热线 010 - 58581118

咨询电话 400 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2011 年 6 月第 1 版
印 次 2011 年 6 月第 1 次印刷
定 价 36.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 32192 - 00

高等数学

(上册)

主 编：张学山

编 委：沈亦一 李 路 赵德钧 洪银萍

 江开忠 张 颖 李 瑞 彭利平

 方 涛 郑中团 吴中成 胡远波

主 审：段承后

序

本世纪以来，我国高等教育规模迅速扩大，人才强国战略对创新型人才培养提出了更高的要求。在新的形势下，“以学生为本”的教育理念深入人心，课程内容和教学体系的进一步改革，教学方法和教学手段的进一步革新，有效提高教学质量，已成为广大高校教师的重要任务。

“高等数学”作为高等学校各专业的基础课程，越来越受到广大高校的重视。上海工程技术大学的“高等数学”，作为工科和经济管理学科各专业的基础课，也受到学校领导、教师和学生的广泛重视。为适应教学改革的需求，该校张学山教授等多位教师精心策划，经过长期的教学实践积累，编写出适用于普通本科高校的《高等数学》(上、下册)教材。

数学教学不仅应该传授必要的数学知识，而且应该增强学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，提高学生的数学素养，改善学生的思维品质，培养学生的创新意识和应用意识。该套教材在这些方面都有所体现。

这套教材在内容处理上的特点在教材“前言”中已有许多表述，我想特别指出的是：

该书贯彻了“以学生为本”的教育理念，充分考虑到适合普通本科高校学生的知识水平和能力水平。教材内容按篇、章、节组成三级模块，每个模块的开头有“导学”，适时采用问题驱动的方式引导学生；结尾有“复习指导”，并且设计了“思考与探索”的问题，这种处理方式能够更好地调动学生的主观能动性。

为了培养学生的应用意识和应用能力，教材中适当增加了运用所学知识处理实际问题的例题，把数学建模的思想融于其中。这样安排教学内容，既让学生了解到数学的应用，又提高了学生学习数学的兴趣。

教材中适当地融入了有关数学文化的内容，例如：结合教学内容，穿插介绍有关的知识背景、历史事件和人物；介绍“数学抽象”及“数学应用”的思想和方法；介绍微积分在产生、发展与完善中的曲折经历和数学家的探索与成就。“扩展阅读”板块拓展了学生的视野，有利于科学精神与人文精神的融合。

此外，作者将形式的数学语言尽可能通俗化，全书的表述不但重视推理，更注重说理；在数学概念及其理论的引入中密切联系实际，让学生切实感受到

数学理论来自于实践，存在于我们的生活之中，用途广泛，以此来增加数学的亲和力。

这是一套有特色的教材，希望它能够为普通本科高校“高等数学”课程的教学改革做出贡献。该教材是上海工程技术大学众多教师多年来教学实践的结晶，而教材又都需要在教学实践中反复地磨炼、修改、提升，相信这套教材在再版时会更加实用，更加完善，更加精彩！



2011年3月于天津 南开园

前言

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”(项目编号:2009IM010400)的研究成果之一。

我国高等教育发展到大众化阶段以来,数学课程的教学出现了一些新情况,教学内容在概念的抽象性和计算的技巧性等方面的难度有所降低;对学生进行数学思想、数学方法训练的导向受到重视;面向非数学专业开设的数学基础课程的应用性和创新性要求正在逐步加强。高等学校办学的多元化,教学对象的多元化,国家对应用创新型人才的需要,都要求“高等数学”课程教学的众多环节,包括高等数学教材必须有一些新的变化。这些变化包括:教材的定位应当与学校的层次水平、专业需求相适应;教材的陈述要适应已经变化了的教学对象,以学生为本;教材的内容应当较好地体现对学生数学素养、数学能力的培养等等。本书就是按照这样的思路来尝试编写的。

这套《高等数学》(上、下册)的教学对象定位于一般普通本科高校修读一学年高等数学课程的学生;教材内容选择的主要依据是教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新近修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。在内容的确定和表述上还充分考虑到普通本科高校学生的能力水平、学习动力等实际状况;吸收了与本课程密切相关的国外著名教材、国内重点教材的优点;在强调基本概念、基本理论、基本应用的同时,适当地增加了应用能力训练的内容;重视数学思想、数学方法的教学。主要做法有:

1. 教学内容模块化。本教材将《高等数学》(上、下册)的全部教学内容划分为八篇十一章,按篇、章、节组成三级模块;在每一模块的开头都有一个导学,简要介绍将要学习的内容的背景、目的、意义和内容要点,处理问题的基本思路和方法,本部分内容和内容的关联等等;在每一篇的篇尾都安排了一个针对本篇内容的综合性的“复习指导与自测”,用来引导学生对该篇内容进行系统的自我复习和自我检测。

2. 加强应用能力培养。除了常规的应用题举例外,本教材在一些章节中适当增加了应用所学知识处理实际问题的例题以及经过简化的数学建模问题的例题。这些例题,有的与学生的后继专业课程有关;有的是日常生活中常会遇到的某些现实问题。考虑到有的高校教学课时数不足,教师在课堂上可能来不及处理上述例题,因此,作者在对这些内容的处理上尽可能采用问题驱动,以直观和通俗易懂的方式来讲述,以此来吸引那些学有余力且有积极性的学生,

通过自学增强应用数学解决实际问题的能力。

3. 体现“情感教学”。如何使得本教材较好地适应普通本科高校学生的能力水平,缩短教学内容与学生现状的距离,努力提高学生的数学素养?面对这一课题,作者作了一定的探索与研究,在内容的处理和表述上作了一些尝试,以此来调动学生的非智力因素,驱动学生主动地学习。主要有:

注重说理。对于有一定难度的教学内容,例如在对极限的概念、函数连续的定义、无穷小的概念、导数或积分的定义、中值定理、泰勒公式、微积分基本定理、无穷级数的收敛与发散等等的引入中,教材的陈述不再仅仅是直述和推理,更多的是说理,讲清楚问题的来源、处理问题的思路和方法。

增加数学的亲合力。在处理一些艰涩难懂的概念和理论时,尽量避免始终用枯燥的推理或论证,力求以直观和通俗易懂的方式来表述;密切联系现实生活中的实例,让读者感受到高等数学的概念和理论来自于实践,存在于我们的生活之中,用途广泛;在重视基本概念、基本计算、基本应用的基础上,在教学基本要求的框架内,淡化理论推导、淡化运算技巧;适当地采用图表,尽可能多地借助几何图形来消解学生在理解上的障碍。

问题驱动。在主要概念和理论的引入过程中,尽量围绕“为什么学、学什么、怎样学”渐次推进,逐步诱导;在每一篇的篇尾给出与基本概念、基本理论、基本方法相关的若干问题,引导学生根据这些问题思考、复习和总结;在适当的地方,以“思考与探索”为标题留给学生一些有意义的问题,引导学生探索。

融入有关数学文化的内容。结合教学内容,适当穿插相关知识背景及历史事件的介绍;在某些章节中安排“扩展阅读”,延伸及拓展学生的视野,让学生简单了解微积分在产生、发展与完善过程中的曲折经历和数学家的探索与成就。

需要说明的是,书中的“扩展阅读”围绕“课程内容”而展开,它们不作为正式教学内容,而是作为课外阅读以脚注的形式提供给学生。

安排“扩展阅读”的出发点主要有两个,一是问题的意义。例如为什么要正确使用数学符号、怎样理解与把握变上限积分等等。二是了解历史、拓展视野。例如关于无穷小、函数的连续与可微、欧拉数 e 、悬链线、向量值函数与曲线的向量表示、偏微分方程与数学模型、幂级数与函数逼近等等。

以上关于教材结构和内容的处理部分地增加了教材的篇幅,所增加篇幅中的大部分出现在前述三级模块的引言、扩展阅读和说理部分,它们是用来帮助初学者更好地理解、掌握高等数学的概念、理论和方法的,这些内容可读性强,既有背景,又有数学思想。我们认为,在教材的可读性、通俗性加强以后,学生在课前预习与课后复习的过程中所遇到的障碍少了,学习起来会省时省力。

本套教材分为上、下两册出版，上册包括函数与极限，一元函数微积分，常微分方程；下册包括空间解析几何与向量代数，多元函数微积分，无穷级数。为便于读者查阅，在上册的末尾安排了三个附录，其中附录一为参数方程与极坐标，附录二为常用初等数学公式，附录三为常用曲线及其方程。

在上册第四篇的末尾，配置了一个求解数学建模问题的例子。此例在2004年全国大学生数学建模竞赛C题“饮酒驾车”的基础上，经过适当简化来展示如何将微分方程方法用于数学建模的过程。作为自修内容，相信感兴趣的同学能够读懂它并初步体验数学建模的概貌。

考虑到不同学生在数学课程的学习上所投入的时间、精力不一样，目标追求也会有差异，本教材在例题、习题和测试题的安排上，坚持以基本题为主，由易到难、循序渐进；同时为学有余力、打算进一步深造的同学安排了部分与考研相关的题，此外还有个别标有*号的题目，不在教学要求之列。

2010年6月，作者所在高校被列入教育部“卓越工程师计划”首批试点单位。配合“卓越工程师培养计划”的实施，结合本教材初稿在我校试用的反馈意见，我们对教材内容作了适当的调整。

本书由张学山主编。参加编写的人员有：第一篇张学山，第二篇赵德钧（第二章），洪银萍（第三章），第三篇沈亦一，第四篇李路，第五篇张颖，第六篇方涛，第七篇李瑞，第八篇彭利平。张学山负责全书的策划、组织、统稿定稿。段承后教授主审了全书并提出许多新观点和新思路，江开忠博士制作了全部的插图。郑中团、吴中成博士和胡远波为教材文稿的完善付出了辛勤的劳动。

顾沛、郭镜明、王绵森三位专家在审阅样稿以后，就本书的编写思路提出了许多指导性的意见，并指出样稿内容处理中的一些不当之处，作者借此机会对专家们的支持表示衷心的感谢。作者还要感谢高等教育出版社的有关同志，他们对本书给予很大的关注与支持，与作者一起策划，多次讨论教材的立意、创新点。上海工程技术大学的主要领导，教务处和基础教学学院的领导，以张子厚教授为首的全体数学教师对本书的编写与出版始终给予关注与支持，作者特表衷心的感谢。

作者深知，编写这样一套涉及重要基础课程的教材实非易事，我们虽然作了一些尝试，但限于作者的水平，不妥或错误之处在所难免，请专家、广大教师和读者批评指正。

编者

2011年3月

目 录

第一篇 函数、极限与连续

第一章 函数、极限与连续	3
第一节 函数	3
一、预备知识(3) 二、函数的基本概念(6) 三、函数的简单性质(11)	
四、由已知函数构造新函数(14) 五、初等函数(21) 六、函数关系的建立(27) 习题 1-1(34)	
第二节 极限的概念	36
一、极限概念的引入(36) 二、数列极限(39) 三、自变量趋于无穷大时的函数极限(44) 四、自变量趋于有限值时的函数极限(47) 五、本节内容小结(52) 习题 1-2(54)	
第三节 极限运算法则	55
一、极限的四则运算法则(55) 二、复合函数的极限运算法则(59) 习题 1-3(61)	
第四节 极限存在准则 两个重要极限	62
一、夹逼准则(62) 二、第一个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (64) 三、单调有界原理(65) 四、第二个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (66) 五、极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 与指数增长模型(70) 习题 1-4(71)	
第五节 无穷小与无穷大	72
一、无穷小的概念与性质(72) 二、无穷小的比较(75) 三、利用等价无穷小代换求极限(77) 四、无穷大(80) 习题 1-5(82)	
第六节 函数的连续性	83
一、函数的连续与间断点的概念(83) 二、连续函数的运算与初等函数的连续性(90) 三、闭区间上连续函数的性质(93) 习题 1-6(97)	
第一篇复习指导与自测	100

第二篇 一元函数微分学

第二章 导数与微分	107
第一节 导数的概念	107
一、导数概念的引入(107) 二、导数的定义(109) 三、导数的几何	

意义(112)	四、函数的可导性与连续性的关系(113)	五、导数的 基本应用(114)	习题 2-1(115)	
第二节 求导法则				116
一、函数的和、差、积、商的求导法则(116)	二、反函数的求导法则(118)			
三、复合函数的求导法则(119)	四、对数求导法(121)			
五、基本初等函数的导数公式(122)	习题 2-2(123)			
第三节 高阶导数 由参数方程所表示的函数的导数				124
一、高阶导数的定义与算法(125)	二、由参数方程所表示的函数的 导数(128)	习题 2-3(130)		
第四节 隐函数的导数 相关变化率				131
一、隐函数的导数(131)	二、相关变化率(133)	习题 2-4(136)		
第五节 函数的微分				136
一、微分的定义(137)	二、微分的几何意义与函数的局部线性化(141)			
三、基本微分公式与微分运算法则(142)	四、微分在近似计算中的应用(146)			
习题 2-5(148)				
第三章 微分中值定理与导数的应用				150
第一节 微分中值定理				150
一、罗尔(Rolle)定理(150)	二、拉格朗日(Lagrange)中值定理(153)			
三、柯西(Cauchy)中值定理(156)	习题 3-1(158)			
第二节 洛必达法则				159
一、 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的洛必达法则(159)	二、其他五类不定式的 极限(162)	习题 3-2(164)		
第三节 泰勒公式				165
一、泰勒(Taylor)公式(165)	二、泰勒公式应用举例(169)	习题 3-3 (171)		
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性				172
一、函数的单调性(172)	二、曲线的凹凸性与拐点(177)	习题 3-4 (184)		
第五节 函数的极值与最大最小值				185
一、函数的极值(185)	二、函数的最大最小值及其应用(189)	习题 3-5(193)		
第六节 函数图像的描绘				194
一、曲线的水平渐近线与铅直渐近线(194)	二、函数图像的描绘(196)	习题 3-6(198)		
第七节 平面曲线的曲率				199
一、弧微分(199)	二、曲率的概念(200)	三、曲率的计算(202)		

四、曲率半径与曲率圆(204)	习题 3-7(205)	
第二篇复习指导与自测		206

第三篇 一元函数积分学

第四章 不定积分	213
第一节 不定积分的概念与性质	213
一、原函数与不定积分的概念(213)	二、不定积分的性质(218)
三、基本积分表(219)	四、直接积分法(220)
习题 4-1(223)	
第二节 换元积分法	224
一、第一类换元积分法(凑微分法)(224)	二、第二类换元积分法(230)
习题 4-2(235)	
第三节 分部积分法	237
习题 4-3(243)	
第五章 定积分	244
第一节 定积分的概念与性质	244
一、引例(244)	二、定积分的定义(247)
三、定积分的性质(249)	
四、定积分的几何意义(252)	习题 5-1(255)
第二节 微积分基本公式	256
一、再论变速直线运动的路程(256)	二、积分上限函数及其导数(257)
三、牛顿-莱布尼茨公式(261)	习题 5-2(265)
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	266
一、定积分的换元积分法(266)	二、定积分的分部积分法(270)
习题 5-3(273)	
第四节 广义积分	274
一、无穷限广义积分(274)	二、无界函数的广义积分(278)
习题 5-4(281)	
第五节 定积分的应用	282
一、定积分的微元法(282)	二、定积分的几何应用(284)
三、定积分的物理应用(294)	习题 5-5(300)
第三篇复习指导与自测	303

第四篇 常微分方程

第六章 常微分方程	311
第一节 微分方程的基本概念	311
一、引例(311)	二、基本概念(313)
习题 6-1(317)	

第二节 可分离变量的微分方程	318
一、可分离变量微分方程的概念和解法(318)	
二、可分离变量微分方程应用举例(320)	
习题 6-2(323)	
第三节 一阶线性微分方程	324
一、一阶线性方程的概念和解法(324)	
二、一阶线性微分方程应用举例(328)	
习题 6-3(330)	
第四节 可利用变量代换求解的一阶微分方程	331
一、齐次方程的解法(331)	
二、伯努利方程的解法(333)	
三、可利用变量代换求解的其他一阶微分方程举例(334)	
习题 6-4(335)	
第五节 可降阶的高阶微分方程	335
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型(335)	
二、 $y'' = f(x, y')$ 型(336)	
三、 $y'' = f(y, y')$ 型(337)	
四、二阶可降阶微分方程应用举例(338)	
习题 6-5(342)	
第六节 二阶线性微分方程解的结构	343
一、二阶线性微分方程的概念(343)	
二、二阶齐次线性微分方程解的结构(344)	
三、二阶非齐次线性微分方程解的结构(346)	
习题 6-6(348)	
第七节 二阶常系数齐次线性微分方程	348
一、二阶常系数齐次线性微分方程的通解(348)	
二、 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解(351)	
习题 6-7(352)	
第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程	352
一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型(353)	
二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型(356)	
三、应用举例(358)	
习题 6-8(364)	
第四篇复习指导与自测	366
利用微分方程模型求解数学建模问题——饮酒驾车	369
附录一 参数方程与极坐标	376
附录二 常用初等数学公式	383
附录三 常用曲线及其方程	387
习题答案	391
第一篇 函数、极限与连续	391
第一章(391)	
第一篇 本篇测试(393)	
第二篇 一元函数微分学	394
第二章(394)	
第三章(398)	
第二篇 本篇测试(402)	
第三篇 一元函数积分学	403
第四章(403)	
第五章(406)	
第三篇 本篇测试(409)	
第四篇 常微分方程	410
第六章(410)	
第四篇 本篇测试(414)	

第一篇 函数、极限与连续

“高等数学”课程的主要内容是微积分。

微积分学的创立，有力地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解。微积分学是继欧氏几何后，全部数学中最伟大的一个创造。它不仅是其他众多数学分支的重要基础，而且在自然科学、工程技术、经济管理、生命科学、社会科学等众多领域获得了十分广泛的应用，成为处理有关连续性问题的强有力的数学工具。

以微积分为主体的“高等数学”课程是大学工科类专业最重要的基础课，是为进一步学习其他课程打基础的。该课程不仅提供解决实际问题的数学工具，更重要的是在数学模型的建立，实际问题量化处理过程中所展现的数学思想、数学方法已经成为科学思维、科学方法的主要部分之一。

“高等数学”课程包括一元函数微分学和一元函数积分学，多元函数微分学和多元函数积分学，微分方程，无穷级数这样一些主要内容。有三个概念贯穿于课程始终：

1. 函数。函数是高等数学要研究处理的主要对象；
2. 极限。极限理论是微积分的基础，极限方法是微积分的基本分析方法，是学习高等数学、概率论与数理统计、复变函数与积分变换以及后续专业课的不可或缺的基本手段；
3. 连续。函数的连续性是函数的重要特性之一，是处理客观世界连续性现象的重要数学工具。高等数学的许多重要内容都与函数的连续性密切相关，例如可以利用函数的连续性求极限，有导数的函数一定连续(第二章)，连续函数的积分一定存在(第四、第五、第九、第十章)等等。

本篇只有一章，即第一章。作为本课程的基础，本篇首先在中学初等数学的基础上总结性地介绍一元函数的概念、特性、构造方法；然后引进极限的概念，以及部分常用的计算极限的方法；最后是关于函数连续性的研究。

第一章 函数、极限与连续

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着。因此在数学中引入了变量的概念后，就有可能把客观世界的运动现象及其变化规律用数学来加以描述了，这正是高等数学的主要职责之一。那么，怎样才能利用数学去处理客观世界中的运动现象及其变化规律呢？高等数学为我们提供了一系列的方法、工具和手段。例如，借助于函数可以描述运动变化过程中变量之间相互联系相互依赖的关系；利用极限可以研究运动变化过程中变量的变化趋势；而利用函数的连续性则可以处理与连续性现象相关的实际问题；借助于导数能解决一个变量关于另一变量的变化率问题以及极大值、极小值问题，等等。

本章主要内容：函数，极限的概念，极限运算法则，极限存在准则和两个重要极限，无穷小与无穷大，函数的连续性。

第一节 函 数

函数是描述变量之间依赖关系的基本数学模型。17 世纪初，数学家从对运动问题（例如行星运动、航海）的研究中引进了函数的概念。此后的两百多年里，这个概念在几乎所有的数学研究工作中占据了中心位置。今天，在涉及量化的所有领域都在使用函数的语言，大学的很多课程都要和函数打交道。

利用高等数学知识处理问题几乎处处与函数打交道，我们需要在中学已有函数知识的基础上，进一步凝练、升华有关函数的系统知识。

本节主要内容：预备知识，函数的基本概念，函数的简单性质，由已知函数构造新函数，初等函数，函数关系的建立。

一、预备知识

1. 点与实数

通过中学阶段的学习我们知道，全体有理数与无理数合称为实数，实数的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$ 。在实数集上进行加、减、乘、除（分母不为零）和乘方运算，运算的结果仍然是实数，因此称实数集 $\mathbf{R}$ 关于上述运算是封闭的。

实数的集合 $\mathbf{R}$ 与数轴之间可以建立对应关系，即实数与数轴上的点一一对应（图 1-1）。由于存在这样的一一对应，在数学上往往将实数与数轴（直

线)上的点不加区别.

由于上述的对应, 从代数的观点看, $|x-a|$ 是一个数, 表示两个数 x 与 a 之差的绝对值; 从几何的观点看, 它表示直线上两点 x 与 a 之间的距离.

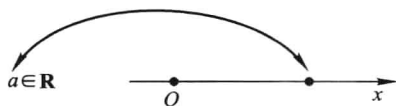


图 1-1 实数与数轴上的点一一对应

例 1. 求不等式 $|x-2| + |x-5| < 5$ 的解.

解 从几何的观点看, 不等式的解是到点 2 的距离与到点 5 的距离二者之和小于 5 的点 x 的变化范围. 如图 1-2 所示, 由于 2, 5 两点间的距离是 3, 数轴上点 1 及其左侧的点不满足不等式, 点 6 及其右侧的点也不满足不等式, 所以不等式的解是 $1 < x < 6$.



图 1-2

如果采用代数的方法求解上述不等式, 过程是繁还是简? 读者不妨试一试.

有关实数的理论表明, 实数点能铺满整个数轴, 而不会留下任何空隙, 实数的这种性质称为实数的连续性. 高等数学主要研究反映客观世界中连续变化的事物在数量方面的相互依存关系, 因而采用具有连续性的实数系统来刻画事物连续变化的特性. 今后除非特别申明, 高等数学所处理的数一般都指的是实数.

2. 常量与变量

在生产实践和科学研究中, 会遇到各种各样的量. 在对一个特定问题的研究过程中, 有些量保持不变, 取常值, 这样的量称为**常量**; 有些量是变化的, 可取不同的数值, 这样的量称为**变量**. “变与不变”是可以转换的. 例如人的身高在很短的时间范围内几乎不变, 可看作常量, 但将时间范围拉长, 身高是变化的, 就得看作变量了. 又例如在银行存款, 选择不同的存款种类(如活期、零存整取、二年或五年定期等等), 对应的存款利率将取不同的数值, 这时利率是变量; 但在选定存款类型存款以后计算利息时, 利率就得看作常量.

3. 区间与邻域

通常, 变量的取值是实数的一个集合. 高等数学中常用的是区间和邻域.

(1) **区间** 任意取定实数 $a, b, a < b$. 以下等式给出的是以 a, b 为端点的各种区间的定义, 其中等式左端是相应区间的记号.

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$. **闭区间** $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

左闭右开区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;

左开右闭区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

上述区间统称为**有限区间**, 如图 1-3(a), (b), (c), (d)所示, 它们可以用