

赵晓东 著

鲁棒控制中的正交化 方法及其应用



科学出版社

鲁棒控制中的正交化 方法及其应用

赵晓东 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要讨论正交有理函数及其在鲁棒控制中的应用。从广为人知的经典控制理论中的 Jury 稳定判据出发,构造特定严格真有理函数空间的正交基,利用该组正交基研究 Hankel 算子的矩阵表达形式及其奇异值分解问题,从而进一步研究最优与次最优的 Nehari 问题,给出该问题矩阵代数解的形式并统一该问题解的表达形式。在此基础上,得到最优与次最优的 Hankel 逼近问题的统一形式的解,并研究鲁棒控制器设计问题。本书还通过把参数化的鲁棒控制器问题转化为 Nehari 问题而得到基于正交基的鲁棒控制器解集形式。最后,探讨用多项式方程来求解 Nehari 问题的方法。本书遵循由浅入深的写作思路,力争做到在内容上相互衔接,在理论上互相补充,以形成较完备的鲁棒控制理论正交化方法研究体系。

本书可作为控制理论与控制工程专业以及控制、机械、通信、计算机、数学等相关专业的研究生教材,也可作为从事鲁棒控制研究的科研、教学和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒控制中的正交化方法及其应用/赵晓东著. —北京:科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-032419-1

I. 鲁… II. 赵… III. 正交化-应用-鲁棒控制 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 194693 号

责任编辑:姚庆爽/责任校对:宋玲玲

责任印制:赵 博/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 10 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 10 月第一次印刷 印张: 11 1/4

印数: 1—2 500 字数: 212 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

实际工程的系统由于种种原因总是存在不确定性。这种不确定性就使得系统难以用精确的数学模型来描述。如果系统中存在能够引起系统结构和参数变化的不确定性,那么该实际系统即可描述为标称系统(模型精确已知部分)和不确定因素的集合。所谓鲁棒性,是指标称系统所具有的某一性能品质对于具有不确定性系统集的所有成员都成立。鲁棒分析是指根据给定的标称系统和不确定性集合找出保证系统鲁棒性所需的条件;而鲁棒性能综合(鲁棒控制器设计问题)就是根据给定的模型,基于鲁棒性分析的结果来设计控制器,使得闭环系统满足期望的性能要求。

迄今为止,人们研究鲁棒控制理论主要从四种方法入手,即多项式代数方法、 μ 分析方法、状态空间方法和频域方法。其中,多项式代数方法局限于系统鲁棒稳定分析,不适合矩阵空间和鲁棒镇定问题; μ 分析方法对综合问题也没有太完善的结论;状态空间方法是现代鲁棒控制研究中最有效的手段,基于系统状态空间形式的描述,采用状态反馈的 H_∞ 控制问题可以通过求解代数 Riccati 方程来获得;而频域方法则采用因子分解方法得到所有稳定控制器的参数化形式,再将模型匹配问题转化为广义距离或最优 Hankel 逼近问题,最后转化为 Nehari 问题求解。频域方法的缺点是数学工具烦琐、计算量大,因此,在工程实践中很难应用。

正交函数系由于其特殊的结构,能起到简化问题描述、降低计算量的作用,在各类科学和工程问题中扮演着重要角色。本书针对鲁棒控制中频域方法求解复杂的问题,从经典控制理论基础入手,由简入深,由易到难,系统地阐述如何运用正交函数来研究离散系统的鲁棒稳定性问题,设计 H_∞ 控制器,并利用正交函数系结构给出鲁棒控制器的多项式代数求解方法。

本书重点突出,基于经典控制理论的正交函数系构造方法;在分析该正交函数系特点的基础上,研究 Hankel 算子的紧矩阵表达及其奇异值分析问题,进而给出 Nehari 问题的正交函数基下的简单求解方法;最后,运用上述结果进行离散系统鲁棒综合问题的阐述。在把握重点的基础上,本书在内容上相互衔接、注重逻辑性;在结构上,试图建立较完备的理论体系。本书的结构以正交函数基和 Hankel

算子的矩阵表达形式为主线，围绕这条主线，系统阐述 Nehari 问题、Hankel 范数逼近问题、鲁棒镇定等问题的求解方法，试图建立一个完整的理论体系。在写作上，循序渐进、层次分明、深入浅出、由易到难、层层深入。

在本书完成过程中，先后得到了国家自然科学基金 (60974138)、浙江省重中之重学科建设以及杭州电子科技大学学术专著出版基金等项目的资助。作者在此对国家自然科学基金委员会、浙江省以及杭州电子科技大学科技处的支持深表谢意。特别感谢科学出版社给予的支持，使作者有机会把自己的想法和成果加以系统归纳并总结出版。另外，感谢同事薛安克教授、文成林教授、柴利教授、周绍生教授、鲁仁全教授、陈云副教授等的帮助与支持。最后，特别感谢我的导师丘立教授把我引入鲁棒控制领域，他渊博的知识、严谨的治学精神和高尚的人格使我受益终身。

由于作者水平有限，书中的缺点和不足之处在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

作 者

2011 年 6 月

于杭州电子科技大学

符号与标记

$\mathbf{R}(\mathbf{C})$	实 (复) 数域
$\mathbf{D}$	复平面上开单位圆盘
$\mathbf{T}$	复平面上单位圆
$\deg a(z)$	多项式 $a(z)$ 的次数
$\mathcal{X}_a$	分母为 $a(z)$ 的严格真有理函数集
$\operatorname{Im} A$	A 的象 (值域)
$\operatorname{Ker} A$	A 的核 (零域)
$A^\perp$	子空间 A 的正交补
$\mathcal{L}_2$	单位圆上平方可积函数空间
$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{L}_2$ 的在 $\mathbf{D}$ 外解析的函数子空间
$\mathcal{H}_2^\perp$	$\mathcal{L}_2$ 的在 $\mathbf{D}$ 上解析的函数子空间
$\mathcal{L}_\infty$	单位圆上有界函数空间
$\mathcal{H}_\infty$	$\mathcal{L}_\infty$ 的在 $\mathbf{D}$ 外解析的函数子空间
I_n	$n \times n$ 单位矩阵
$\{a_{ij}\}$	以 a_{ij} 作为第 i 行第 j 列元素的矩阵
$\det A$	A 的行列式值
$\mathcal{F}_l (\mathcal{F}_u)$	下 (上) 线性分式变换
$\oplus$	线性空间的直和
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	内积
P_+, P_-	从 $\mathcal{L}_2$ 到 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_2^\perp$ 上的投影算子
J	反转算子
S	反向移动算子
Γ_G	$G(z)$ 的 Hankel 算子
Γ_G^*	$G(z)$ 的伴随 Hankel 算子
前缀 $\mathcal{R}$	实有理
$V^\sim(z)$	$V^T(z^{-1})\alpha - z$

目 录

前言

符号与标记

第 1 章 绪论	1
1.1 背景与动机	2
1.2 本书主要内容	3
参考文献	4
第 2 章 基础知识	6
2.1 线性代数基础	7
2.1.1 向量、内积和范数	7
2.1.2 正交矩阵与酉矩阵	9
2.1.3 向量空间的基	10
2.1.4 正交化过程	12
2.2 矩阵分解	20
2.2.1 QR 分解	20
2.2.2 LU 分解	24
2.2.3 SVD 分解	30
2.3 信号与系统	33
2.3.1 基本概念	33
2.3.2 z 变换和传递函数	35
2.4 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 空间	36
2.4.1 函数空间	36
2.4.2 范数计算	41
参考文献	42
第 3 章 系统变换与分解	43
3.1 线性分式变换	44
3.1.1 下分式变换	44

3.1.2 上分式变换	47
3.1.3 HM 变换	49
3.2 系统分解理论	51
3.2.1 互质分解	51
3.2.2 正则分解	56
3.2.3 内外分解	58
3.2.4 J -谱分解	60
参考文献	62
第 4 章 基于 Jury 表构造的正交有理函数	64
4.1 函数空间的正交基	65
4.1.1 函数空间的基	65
4.1.2 Gram-Schmidt 正交化	67
4.2 内函数的状态空间平衡实现	69
4.3 基于 Jury 表的单位正交有理函数	71
4.4 不同正交函数构造方法之间的关系	73
4.5 用扩展 Jury 表计算 $\mathcal{H}_2$ 范数	79
参考文献	82
第 5 章 Hankel 算子和紧 Hankel 矩阵	84
5.1 Hankel 算子和 Hankel 矩阵	85
5.1.1 Hankel 算子和伴随 Hankel 算子	85
5.1.2 Hankel 矩阵与 Hankel 奇异值	86
5.1.3 Hankel 算子的施密特对	87
5.2 紧 Hankel 矩阵	89
5.2.1 紧 Hankel 算子	89
5.2.2 基于 Jury 表的紧 Hankel 矩阵	91
5.2.3 矩阵 H_G 的迭代算法	98
参考文献	104
第 6 章 最优与次最优 Nehari 问题	105
6.1 最优 Nehari 问题	106
6.2 次最优 Nehari 问题的状态空间解	107

6.3	用 H_G 来求解次最优 Nehari 问题	109
6.4	两块 Nehari 问题的中心解	118
6.5	Hankel 范数逼近问题	123
	参考文献	127
第 7 章	鲁棒镇定问题	128
7.1	H_∞ 标准问题	129
7.2	H_∞ 标准控制包含的控制问题	131
7.2.1	跟踪问题	131
7.2.2	鲁棒确定性问题	133
7.2.3	灵敏度极小化问题	135
7.2.4	混合灵敏度问题	136
7.2.5	模型匹配问题	137
7.3	间隙测度与鲁棒性	139
7.4	控制器参数化	142
7.5	将鲁棒镇定问题转化为 Nehari 问题	143
	参考文献	149
第 8 章	用多项式方法求解 Nehari 问题	150
8.1	一块 Nehari 问题	151
8.2	两块 Nehari 问题	155
8.2.1	连续系统的 J -谱分解	157
8.2.2	离散系统的 J -谱分解	163
	参考文献	167

第 1 章

绪 论

本书主要研究一类特殊的正交有理函数及其在鲁棒控制中的一些应用问题。该类正交函数可以比较简单地通过 Jury 表来构造, 利用该类正交函数作为 Hankel 算子的基函数, 我们给出了 Hankel 算子的紧矩阵表达形式。在此基础上尝试重新求解最优与次最优 Nehari 问题, 并将之推广到 Hankel 范数逼近、鲁棒镇定等问题。

本章预览

1.1 背景与动机

1.2 本书主要内容

参考文献

1.1 背景与动机

在各类科学和工程问题中, 正交函数始终起着非常重要的作用, 扮演着特殊的角色, 如最常见的正交多项式^[1]、傅里叶级数和冥级数中的标准正交函数^[2]、小波函数^[3]等。本书主要研究正交有理函数及其在鲁棒控制中的应用。

正交有理函数的研究已经有相当长的历史, 将一个线性系统分解成为正交形式 (如 Laguerre 函数), 而不是傅里叶级数中标准正交函数的方法可以追溯到 Lee^[4] 和 Wiener^[5] 的早期工作。Kautz^[2] 构造了一类具有两个参数的更一般形式的正交有理函数。海森伯格 (Heuberger) 等^[6] 则采用内函数的平衡实现方法构造了多参数的正交有理函数。冥级数中的标准正交基、Laguerre 函数和 Kautz 函数都是这一方法的特例。Ninness 和 Gustasson^[7] 对该方法进行了进一步的推广, 文献 [6] 和文献 [7] 的构造方法在系统辨识中有着不少应用。

上述的几种构造正交有理函数的方法都是在内函数的平衡实现中得到的, 因而都需要读者通晓状态空间理论, 并有较深的数学基础。尤其是对于那些刚刚涉足控制理论的本科生而言, 现代与后现代控制理论需要的数学基础太深奥, 很难将这些理论和方法传授给他们。那么, 现代与后现代控制理论与经典控制理论之间真的存在很深的隔阂与鸿沟? 能否用经典控制理论的工具来解决像鲁棒控制理论这样的问题呢? 对于线性连续系统, Qiu^[8] 给出了肯定的答案。

劳斯 (Routh) 稳定判据^[9] 几乎在所有的本科生控制教材中都会提及, 劳斯稳定判据可以用来判定给定多项式的稳定性。用给定多项式的系数构造劳斯表, 根据第一列表符号改变的情况可以判断该多项式不稳定的根的个数。然而, 正如大多数教科书所涉及的, 劳斯表通常仅局限于稳定判别这一功能。事实上, 劳斯表可以用来构造正交函数。文献 [3] 证

明了对于由给定的稳定多项式做分母而构成的严格真有理函数空间，可以用劳斯表构造该空间的一组正交基。而这样一组基可以有很多非常好的用途，如计算函数的 $\mathcal{H}_2$ 范数、求取 Hankel 奇异值、求解模型降阶和 H_∞ 优化问题^[8] 等。这就为使用诸如劳斯表这样的基础工具来系统和完备地求解线性最优和鲁棒控制理论问题打开了一扇门。

类似于劳斯表和劳斯稳定判据，Jury 表和 Jury 稳定判据^[10] 是线性离散系统的稳定性判据。本书将继续沿着这条线路探索用 Jury 表这个基础工具来解决鲁棒控制理论问题的方法。Jury 表也将用来构造正交有理函数，并用该正交基函数来研究 Hankel 算子的紧矩阵表达形式、奇异值分解、Nehari 问题、Hankel 范数逼近、鲁棒镇定等问题。

1.2 本书主要内容

第 2 章：基础知识 给出本书需要的一些基础数学知识。首先是一些有用的线性代数知识，然后回顾一些信号与系统的基础，并由此引出 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 空间的概念以及反馈系统的概念，最后简单介绍一些非常有用的分解理论。

第 3 章：系统变换与分解 主要介绍在鲁棒控制中非常有用的系统变换和系统分解理论，包括线性分式变换、互质分解、正则分解、内外分解和 J 谱分解的定义及其求解方法。

第 4 章：基于 Jury 表构造的正交有理函数 首先回顾经典控制中的 Jury 表以及 Jury 稳定判据，然后利用 Jury 表构造严格真有理函数空间的一组正交基，并证明这组基就是由标准基经过格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 正交化得到的同一组基，还将给出这组基与内函数平衡实现方法之间的关系。最后，利用扩展的 Jury 表计算 $\mathcal{L}_2$ 和 $\mathcal{H}_2$ 范数。

第 5 章：Hankel 算子和紧 Hankel 矩阵 首先了解 Hankel 算子，然后给出两种基于第 3 章正交基的 Hankel 算子的紧矩阵表达形式。利

用奇异值分解, 进一步研究 Hankel 奇异值和施密特对 (Schmidt pair) 的性质。

第 6 章: 最优与次最优 Nehari 问题 研究最优与次最优 Nehari 问题。首先给出该问题的描述和状态空间的解; 然后采用正交基和紧 Hankel 矩阵来重新求解该问题; 最后将该问题扩展到 Hankel 范数逼近问题, 给出相应的解。

第 7 章: 鲁棒镇定问题 研究采用正交基和紧 Hankel 矩阵来求解鲁棒镇定问题。首先采用互质分解将该问题转化为 Nehari 问题, 然后给出次最优鲁棒镇定问题的解。

第 8 章: 用多项式方法求解 Nehari 问题 给出单块和两块次最优 Nehari 问题的多项式解法。

参 考 文 献

- [1] Fuhrmann P A. A Polynomial Approach to Linear Algebra. New York: Springer, 1996.
- [2] Kautz W H. Transient synthesis in the time domain. IRE Trans. on Circuit Theory, 1954, CT-1: 29-39.
- [3] Calvez L C, Vilbé P, Derrien A, et al. General orthogonal sequences via a Routh-type stability array. Electronics Letters, 1992, 28: 19.
- [4] Lee Y W. Synthesis of electrical networks by means of the Fourier transforms of Laguerre functions. J. Math. Physics, 1933, 11: 83-113.
- [5] Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Cambridge: MIT Press, 1949.
- [6] Heuberger P, Van den Hof P M J, Bosgra O. A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems. IEEE Trans. Auto. Contr., 1995, 40: 451-465.
- [7] Ninness B, Gustasson F. A unifying construction of orthonormal bases for system identification. IEEE Trans. Auto. Contr., 1997, 42: 515-521.
- [8] Qiu L. What can Routh table offer in addition to stability? Journal of Control Theory and Application, 2003, 1: 9-16.

-
- [9] Åström K J. Introduction to Stochastic Control Theory. New York: Academic Press, 1970.
- [10] Jury E I, Blanchardy J. A stability test for linear discrete systems in table form. Proc. IRE, 1961, 50: 1947–1948.

第2章

基础知识

本章主要介绍鲁棒控制中要用到的一些数学基础中与控制系统相关的基本概念、定理和性质。了解这些基础知识和基本理论对理解本书后面的内容将有很大的帮助。

本章预览

2.1 线性代数基础

2.2 矩阵分解

2.3 信号与系统

2.4 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 空间

参考文献

2.1 线性代数基础

本节介绍与正交概念相关的一些线性代数基础知识。

2.1.1 向量、内积和范数

定义 2.1 令 $\mathbf{R}$ 表示实数集合, $\mathbf{C}$ 表示复数集合。一个按照列方式排列的实数或复数集合

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

称为一个列向量。类似地, 按照行方式排列的实数或复数集合称为行向量。

定义 2.2^[1] 以向量为元素的集合 X 称为向量空间, 若加法运算定义为两个向量之间的加法, 乘法运算定义为向量与标量之间的乘法, 并且对于向量集合 X 中的向量 x, y, z 和标量 a, b , 满足以下两个闭合性和关于加法、乘法的八个公理:

- (1) 若 $x \in X$ 和 $y \in X$, 则 $x + y \in X$ (加法闭合性)。
- (2) 若 a 是一个标量, $y \in X$, 则 $ay \in X$ (标量乘法闭合性)。
- (3) $x + y = y + x, \forall x, y \in X$ (加法交换律)。
- (4) $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in X$ (加法结合律)。
- (5) 在 X 中存在一个零向量 0 , 使得 $y + 0 = y, \forall y \in X$ 。
- (6) 给定一个向量 $y \in X$, 存在另一个向量 $-y \in X$, 使得 $y + (-y) = 0 = -y + y$ 。
- (7) $a(by) = (ab)y$, 对 $\forall y \in X$ 和所有标量 a, b 成立 (标量乘法结合律)。

(8) $a(x+y) = ax + ay$, 对 $\forall x, y \in X$ 和标量 a 成立 (标量乘法分配律)。

(9) $(a+b)y = ay + by$ 和对 $\forall y \in X$ 和标量 a, b 成立 (标量乘法分配律)。

(10) 在 X 中存在一个单位向量 1 , 使得 $1y = y, \forall y \in X$ 。

定义 2.3 令 X 是复向量空间, 函数 $\langle x, y \rangle : X \times X \rightarrow \mathbf{C}$ 称为向量 x 和 y 的内积, 若对所有的 $x, y, z \in X$ 满足以下公理:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ 。

(2) $\langle x, x \rangle = 0$, 当且仅当 $x = 0$ 。

(3) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ 。

(4) $\langle x, y \rangle = c^* \langle x, y \rangle$ 。

(5) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ 。

其中, $*$ 表示共轭复数。

定义 2.4 令 X 是复向量空间, 函数 $\|x\| : X \rightarrow \mathbf{R}$ 称为向量 x 的范数, 如果对所有的 $x, y \in X$, 下面的范数公理都成立:

(1) $\|x\| \geq 0$ 。

(2) $\|x\| = 0$, 当且仅当 $x = 0$ 。

(3) $\|cx\| = |c|\|x\|$, 对所有复数 c 成立。

(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

根据定义 2.3, 两个常数向量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 和 $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 的内积定义为

$$\langle x, y \rangle = x^* y = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \quad (2.2)$$

定义 2.5 如果两个常数向量 x, y 的内积等于零, 则称它们正交, 并记作 $x \perp y$ 。

定义 2.6 令 X 是向量空间, 一个向量 $x \in X$ 的正交补, 记作