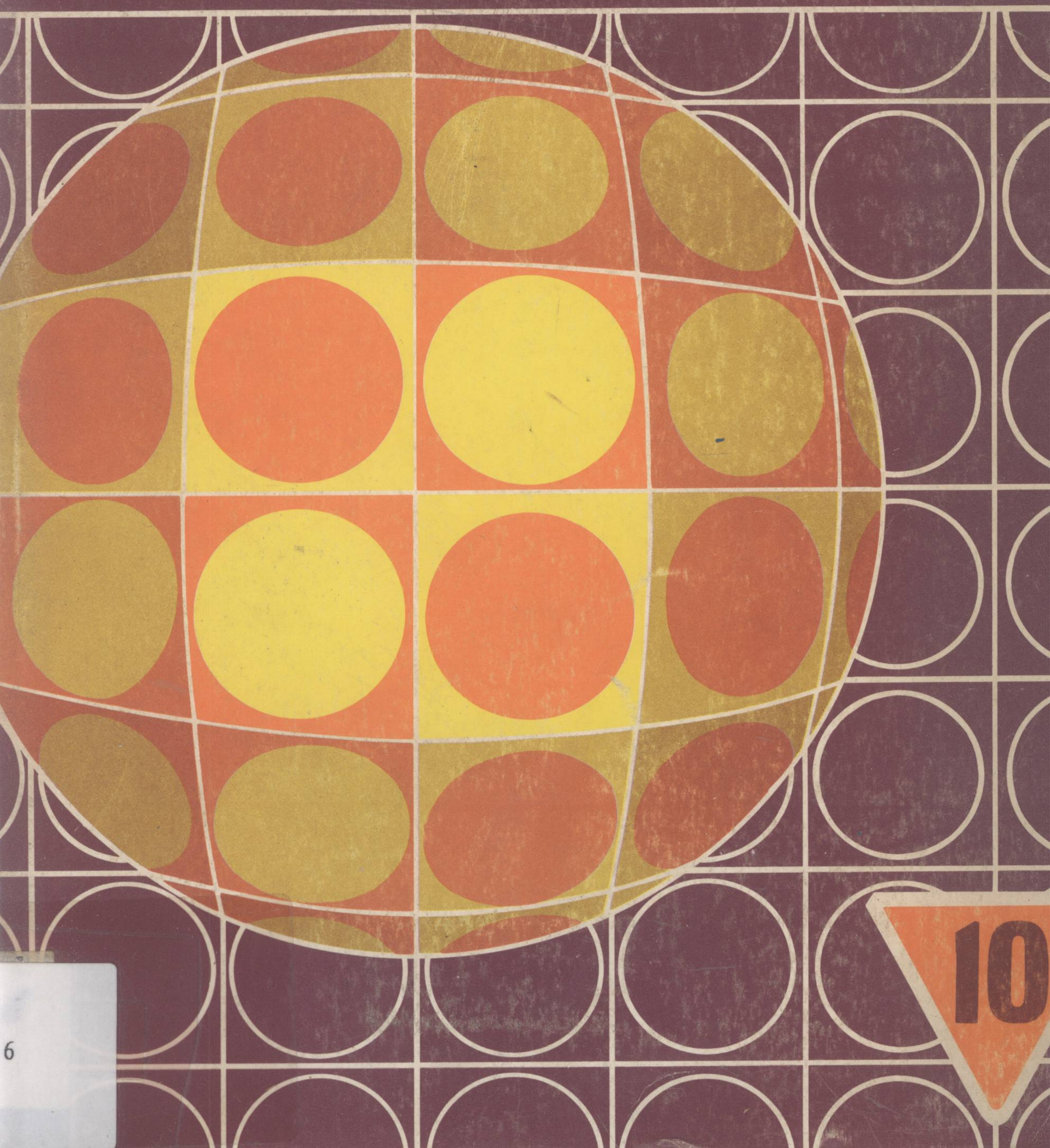
香港中學適用

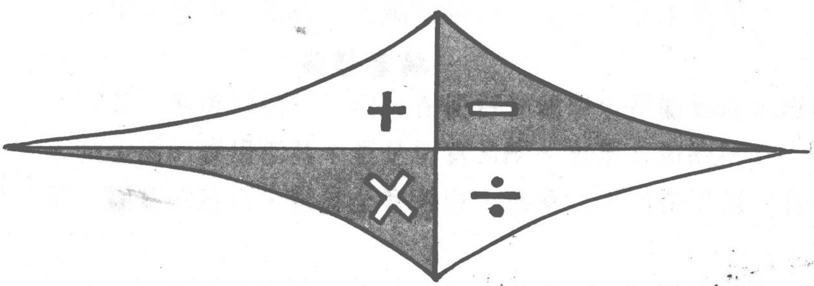
數學



數學

第十冊

勞國維　廖滌塵



香港人人書局有限公司印行

致　謝

承蒙香港葛量洪師範學院前任校長郭煒民先生 B. Sc., Dip. Ed. (H.K.), Dip. C. S. (Leeds) 校訂本書，並担任編纂顧問，在内容取材，風格體制，行文表達，和教學配合等方面，指導詳盡，提供具體幫助，使本書順利完成，謹申謝忱。

編者謹識

本書的使用方法——代編輯例言

本書依照教育司署課程發展委員會最新課程而編寫。也是一本配合香港考試局數學科會考課程三的中學數學課本，適合各校中一至中五年級採用。特在這裏說明本書的編輯目標、原則和使用方法，給教師和同學做參考。

（一）本書第一至六册適合中一至中三年級學生使用，第七、八兩册適合中四年級學生使用。第九、十兩册適合中五年級學生使用。

（二）本書的編寫目標，在使每一個學生都能夠從本書中體會到，數學不但是人類生活的實用工具，更是切實易學、有用有趣的科目。所以，本書對資料的選取，編寫的技巧，都曾全盤考慮，務使同學們在學習上有更强的適應力。

（三）本書編寫原則除著重數學在商業、科學和工藝方面的應用外，並爲學生奠定數學基礎，使有升讀中六的能力。

（四）本書教材的處理，由具體到抽象，由特殊到一般，透過討論展開教材，鼓勵學生自動尋求問題的結論。盡量利用直觀方法以培養學生的創造及欣賞能力，但又不失數學應有的邏輯性。

（五）我們構想數學教學，可以分爲「課前預習」、「課內講習」和「課後練習」等三個過程。所以，本書各章各節教材都是環繞這三個教學過程而編寫。爲使教者易教，學者易學，特分別說明如下：

甲、本書有不少教材，學生應在課前進行預習或準備，使在上課時能夠討論得更深入和活動得更順利。

凡在課堂上進行提問教學，教師應讓學生有適當的時間去思考或展開討論。必要時，教師也可選取適當的時機，採用自問自答的方式進行總結。

乙、「例題」示算原是教學過程中，不可或缺的步驟，既可藉此探究計算技巧、演算層次和解題規律，更可養成獨立思考和計算能力。所以本書對「例題」的編擬和佈置，十分重視，部分「例題」的計算過程、答案、甚至作圖畫線、公式、定理和結論等，有時故意沒有排印在課本裏，只預留出空白的位置，好讓學生在教師的輔導下，進行學習思考和計算，把應塡的自己塡上去。

丙、本書第一至六册在「例題」之後，即編擬若干「問題」，讓學生在課內試算（第七至第十册的課內試算題，則編在練習題內。教師可因應實際教學需要在其中揀選若干題目，讓學生在課內計算），這是幫助學生克服學習困難，評量

學習心得，和了解教學情況而特別佈置的教材。所以，「例題」和「問題」從教學上看，正是教師在堂上講，學生在堂上練的資料。

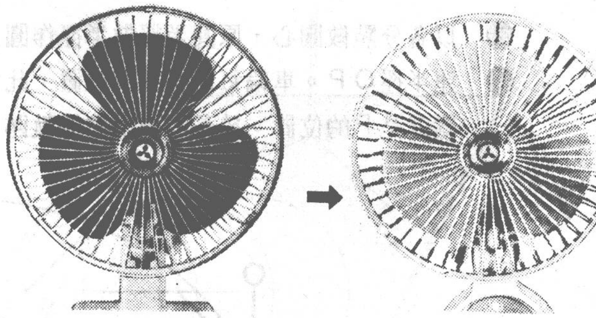
丁、本書習題編有多樣化的題目，以適應不同程度的實際要求，每教一課，教師可選擇若干題着學生在堂上或課外演算，這樣，本書的教材才會重點突出，在教學應用上才能掌握重心，在學習上才會獲得良好的成果。

戊、第七、八册附有中四年級學生適用數學作業一册，第九、十册也附有中五學生適用的作業簿一本。將全部教材作扼要整理，其中包括複習、測驗及附有答案，以方便學生溫習，希望有溫故知新、準備會考的功效。

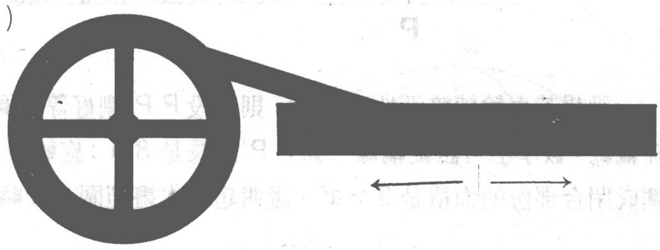
附帶請各位注意的，在本書各章各節中，雖然並沒有特別闢出“討論”一欄，其實，須要使用討論教學的地方，處處都是。在這裏所說的討論，並不是簡易的口頭問答，而是同學們透過思考說出自己的見解和不明白的地方，在教師的輔導下進行分析和總結。又本書每册編有教學手册，專供教師使用。

目次

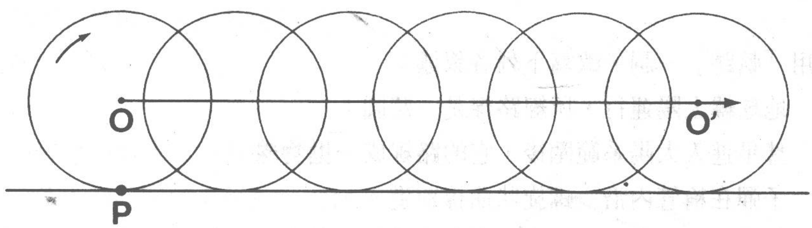
d) 開動風扇，扇葉構成一個圓形。
（開動風扇時，扇葉的軌跡是一圓形。）



e) 飛輪拖動活塞，當飛輪轉動時，活塞在槽內往復推動。
（槽內活塞的軌跡是一線段。）



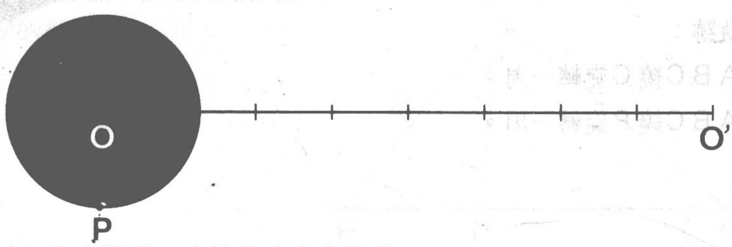
f) 車輪在平地滾動，它的軸心循一水平線移動，但車輪邊一定點的運動路線是一道曲線。



（車輪在平地滾動，它軸心的軌跡是一水平線，車輪邊一定點的軌跡是一曲線——旋輪線。）

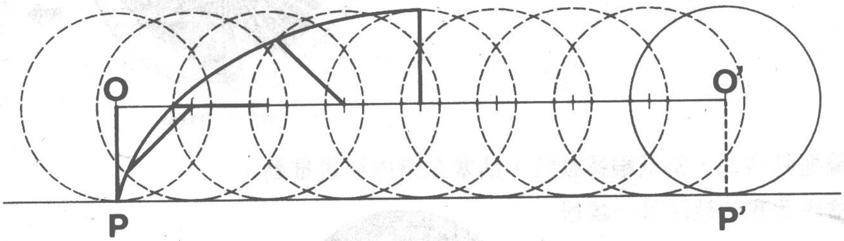
旋輪線（cycloid）畫法

● 將上圖直線 O O′ 等分做八個等長的線段。



點 P 表示車輪邊上有定點 P，車輪尚未向右前進。

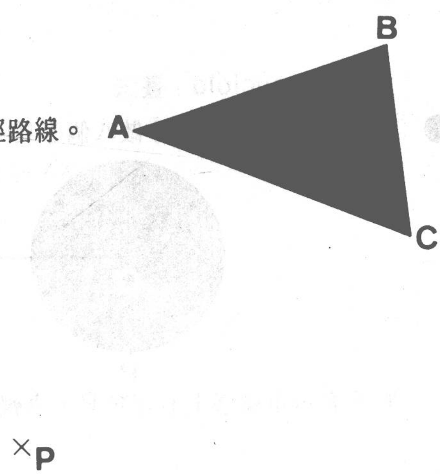
- 以各分點做圓心，原圓半徑做半徑作圓。各圓順次表示車輪的不同位置。
- 連半徑ＯＰ。車輪每前移一個位置，此半徑的順時針方向轉４５°角，此等半徑的端點位置就是Ｐ的位置。於是可描出它的軌跡。



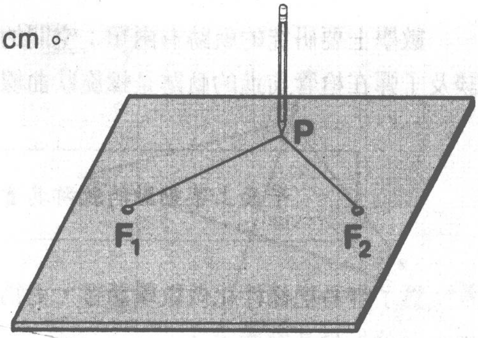
設想若車輪純粹沿地面滾動，則線段ＰＰ'剛好等於圓的周界，這時候，Ｐ的軌跡稱為一旋輪線。數學上可證旋輪線一弧ＰＰ'的長是８ａ；旋輪線一弧與它的弦（例如線段ＰＰ'）所圍成閉合部份的面積是$3\pi a^2$。證明超出本書範圍，從略。

習題　５·１（ａ）

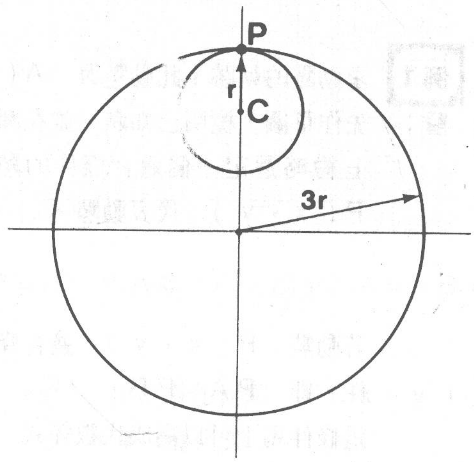
1. 用「軌跡」一詞，改寫下列各敘述：
   a) 地球繞太陽運行，所經路線是一橢圓。
   b) 彗星進入太陽系範圍後，它的路線成一拋物線。
   c) 子彈在槍管內沿一螺旋狀曲線前進。
   d) 仰觀天象，只見水星在天空左右擺動，其實，它是繞太陽轉動，成橢圓形狀。
2. 簡單描述下列軌跡：
   a) 升降機內的一顆按鈕。
   b) 機械時鐘面上分針針尖在半小時內所經路線。
   c) 上樓梯時你的鼻尖。
   d) 傾斜４５°角射出一砲彈，砲彈墮地爆炸前所經路線。
3. 描繪軌跡：
   a) △ＡＢＣ繞Ｃ旋轉一周；
   b) △ＡＢＣ繞Ｐ旋轉一周。



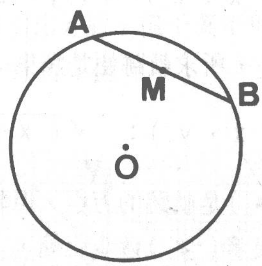
4. 於軟木板上固定兩顆圖釘 F_1 及 F_2，相距 1 2 cm。兩釘間繫一尼龍線，長約 2 0 cm。用鉛筆將線張緊，即可移動畫出一軌跡。此軌跡稱爲橢圓。
試在紙上設法畫一橢圓。
（提示：用作三角形方法即可求出許多 P 點）。



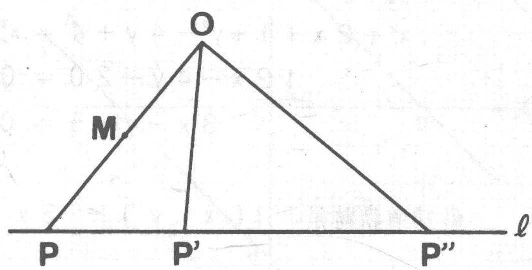
5. 設想一半徑爲 r 的圓 C 內切於一半徑爲 3 r 的大圓環內。P 是圓 C 的圓周上一點。
圓 C 在大圓環內滾動一周，P 和 C 都回到原來位置。
a) C的軌跡是甚麼？
b) 用你的想像力（可用硬幣一枚幫助思考），略描點 P 的軌跡。（這軌跡稱爲三點內旋輪線。）



6. A B 是圓 O 內一可移動的弦，但長度不變。M 是 A B 中點。A、B 在圓周上移動，求 M 的軌跡。（不用證明）



7. P 在直線 ℓ 上移動，O 是線外一定點，求 P O 的中點 M 的軌跡。
（不用證明）



數學上要研究的軌跡有兩類：空間的軌跡和平面上的軌跡，習題第5·1(a)第1題(c)談及子彈在槍管前進的軌跡是螺旋狀曲線，這就屬於前者，但本書只能討論後者。

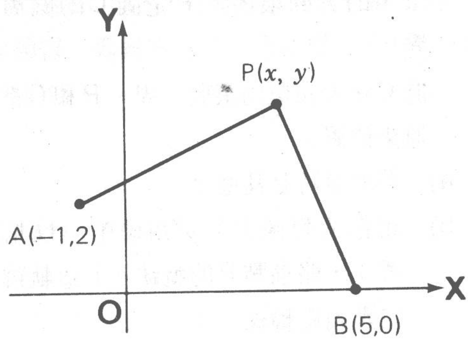
平面上某動點的軌跡其實就是平面上適合某一條件的點集。

爲了容易把條件化做數學語言，更爲了便於分析，數學家發現，把軌跡問題放在直角坐標上討論，最是簡便。

以下是兩個求軌跡的範例。

例 1 求動點的軌跡，此動點與 $A(-1,2)$ 及 $B(5,0)$ 等距。

解： 先作草圖，標明已知點，並在圖上約略選定一個適合條件的點 $P(x,y)$ 代表動點。



若動點 $P(x,y)$ 適合條件，即 $PA=PB$，

這條件馬上可以寫成代數等式

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2} \qquad (*)$$

於是，所求軌跡便是點集

$$\{(x,y):\ \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}\}$$

$(*)$是軌跡的方程，但軌跡究竟是怎樣的，還不能看得出來。

如果將$(*)$逐步化簡，

$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x-5)^2+y^2 \qquad (**)$$

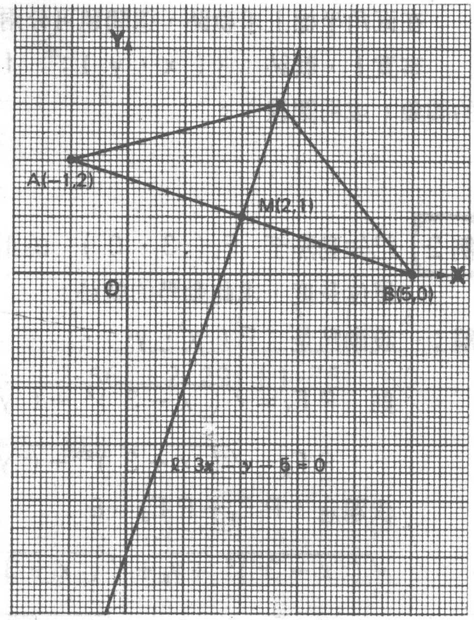
$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=x^2-10x+25+y^2$$

$$12x-4y-20=0$$

$$3x-y-5=0$$

就知道軌跡是 $\{(x,y):\ 3x-y-5=0\}$

也就是右圖中的直線 ℓ，
此直線過AB的中點 M(2，1)，
同時又垂直於AB。



與兩已知點等距的點的軌跡是此兩點連線的垂直平分線。

大家會注意到(＊)與(＊＊)兩式並非等價，將

$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(y-5)^2+y^2}$

兩邊自乘化為：

$(x+1)^2+(y-2)^2=(y-5)^2+y^2$

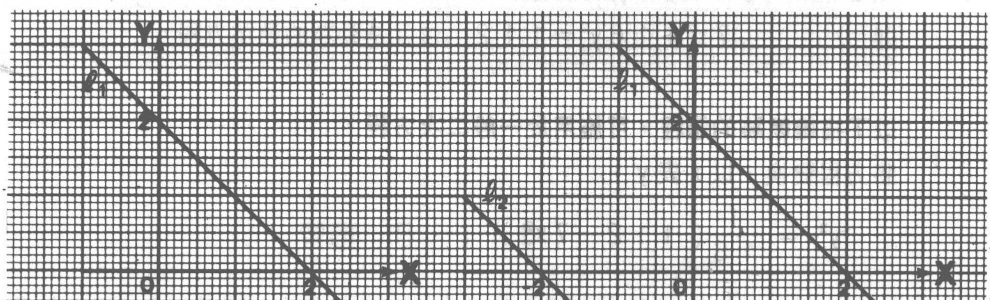
會不會引入了不適合原有條件的點呢？

答案是：不會。因為將 $A=B$ 自乘變為 $A^2=B^2$ 的時候，引入的是 $A=-B$。也就是說，將(＊)化為(＊＊)，引入的是

$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=-\sqrt{(y-5)^2+y^2}$，但沒有任何點 P(x，y)滿足它，因此，適合(＊＊)的點全部都適合(＊)。由(＊＊)簡化成

$3x-y-5=0$ 也就是所求點集(軌跡)的條件。

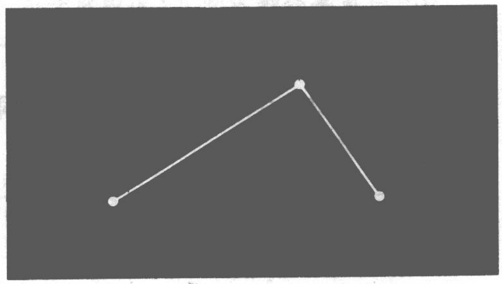
通常，將軌跡的方程兩邊自乘以消去根式，都不會引出矛盾，但千萬不可將有理式自乘。例如，$\{(x,y):\ x+y=2\}$ 是下圖中的 ℓ_1，但 $\{(x,y):\ (x+y)^2=4\}$ 卻是 ℓ_1 及 ℓ_2。



在直角坐標上求軌跡，這問題可分兩階段，首先求得軌跡的方程，其次是將軌跡作出。

事實上，軌跡 $\{(x, y): f(x, y)=0\}$ 也就是方程 $f(x, y)=0$ 的圖象（或稱圖線）。

例 2 已知動點至 $F_1(3, 0)$ 的距離與它至 $F_2(-3, 0)$ 的距離的和恒等於 8 單位長度，求此動點的軌跡。



解：設動點是 $P(x, y)$，

則 $PF_1=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$

$PF_2=\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}$

依題意 $PF_1+PF_2=8$

$$\sqrt{(x-3)^2+y_2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=8$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=8-\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

兩邊自乘，

$$(x-3)^2+y^2=64-16\sqrt{(x+3)^2+y^2}+(x+3)^2+y^2$$

$$x^2-6x+9+y^2=64-16\sqrt{x^2+6x+9+y^2}+x^2+6x+9+y^2$$

$$16\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=64+12x$$

$$4\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=16+3x$$

再兩邊自乘，

$$16(x^2+6x+9+y^2)=256+96x+9x^2$$

即 $7x^2+16y^2=112$ 這就是動點的軌跡方程。

以下描繪軌跡的過程，可施用於一般二次方程。

將方程變換，以 x 表 y，

$$y^2=\frac{1}{16}(112-7x^2)$$

$$=\frac{7}{16}(16-x^2)$$

$$\therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{7(16-x^2)}}{4}$$

根式內的數不可以小於 0，即

$$16-x^2 \geq 0$$

$$x^2-16 \leq 0$$

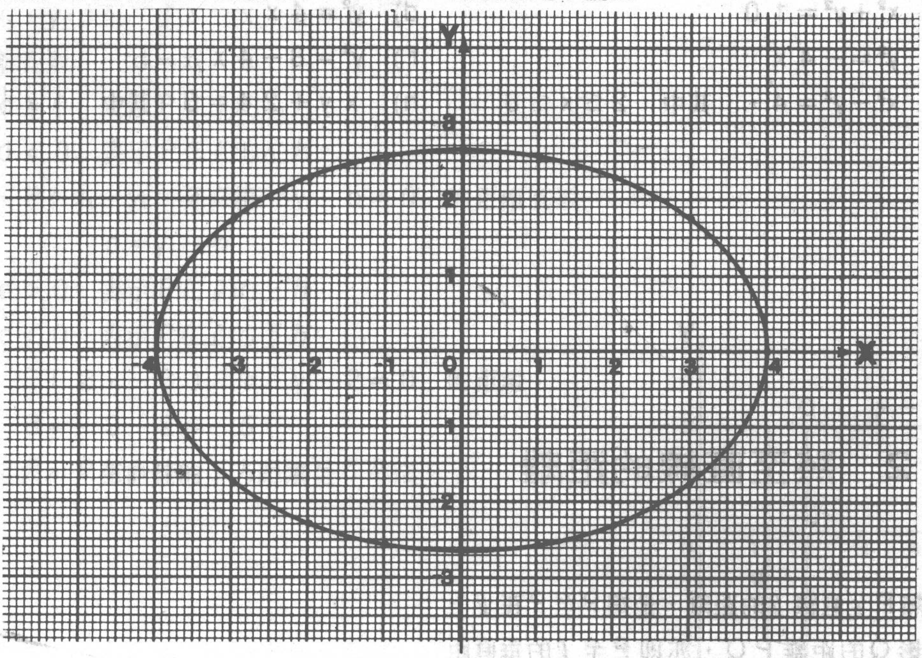
$$(x+4)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore \quad -4 \leq x \leq 4$$

法定了 x 的範圍後，便可以設 x 值，求 y 值。

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0	±1·75	±2·29	±2·56	±2·65	±2·56	±2·29	±1·75	0

描點，將各點連成平滑曲線，如下圖，這軌跡是一橢圓。



習題 5·1(b)

1. 動點 P 至下列兩定點等距，求 P 的軌跡（求軌跡方程並繪圖）。
   a) A(5，1)，B(1，7)
   b) B(1，7)，C(−3，−2)
   c) A(5，1)，C(−3，−2)

2. 動點P至下列兩定點等距，求P的軌跡：

a) A(8，4)，B(0，10)　　b) B(0，10)，C(−6，2)

c) C(−6，2)，D(2，−4)　　d) A(8，4)，C(−6，2)

3. 求滿足下列條件的動點P的軌跡方程，不用繪圖。

a) $F_1(3,0)$，$F_2(-3,0)$是定點，　$PF_1+PF_2=10$

b) $F_1(2,0)$，$F_2(-2,0)$是定點，　$PF_1^2+PF_2^2=20$

c) A(1，0)，B(4，0)是定點，　PA：PB＝1：2

d) $F_1(5,0)$，$F_2(-5,0)$是定點，　$|PF_1-PF_2|=6$

4. 仿例2描繪下列方程的圖象：

a) $4x^2+9y^2=36$　　b) $9x^2+4y^2=36$

c) $x^2+y^2=10$　　d) $y^2=4x$

e) $y^2=-4x$　　f) $y^2=8-4x$

g) $x^2-y^2=4$，　其中　$2\le x\le 6$　　h) $xy+24=0$，其中　$|x|<8$

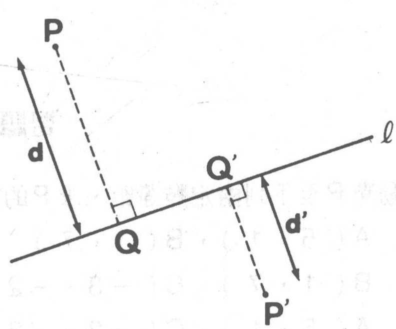
5·2　點至直線的距離

點P至直線ℓ的距離，是指P至P在ℓ上的投影Q的距離PQ，亦即P至ℓ的垂直距離。

如右圖，

P至ℓ的距離　　$d=PQ$

P′至ℓ的距離　　$d'=P'Q'$



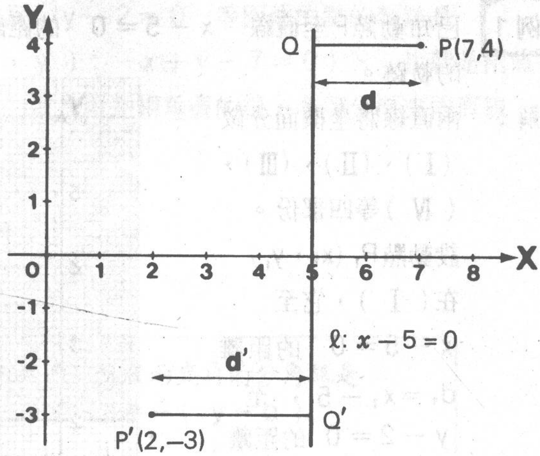
在直角坐標上，P（ x_1，y_1 ）至直線 $x - a = 0$ 的距離是 $x_1 - a$ 或 $a - x_1$。

例如P（ 7，4 ）至 ℓ： $x - 5 = 0$ 的距離是

$d = 7 - 5 = 2$

P′（ 2，－3 ）至 ℓ 的距離是

$d' = 5 - 2 = 3$



距離本來是無向量（ scalar ），通常取正值，在分析一般問題時，P（ x_1，y_1 ）至 ℓ： $x - a = 0$ 的距離宜取 $d = x_1 - a$

$d > 0$ 表示P在 ℓ 的右方，

$d < 0$ 表示P在 ℓ 的左方。

同樣，P（ x_1，y_1 ）至直線 $y - b = 0$ 的距離宜取

$d = y_1 - b$

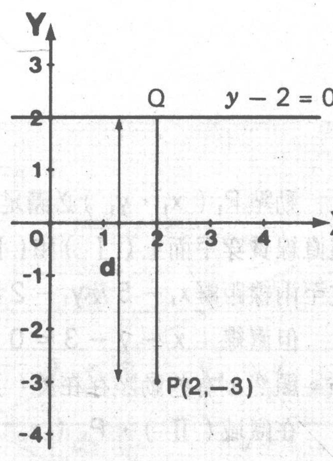
$d > 0$ 表示P在 ℓ 的上方，

$d < 0$ 表示P在 ℓ 的下方。

例如 P（ 2，－3 ） 至 $y - 2 = 0$ 的距離，

$d = -3 - 2 = -5$

這表示P在直線的下方距離是5單位。



以下例題是一些與點至直線距離有關的軌跡問題。