经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

（一）

微积分

李天胜◎主编

电子科技大学出版社

经济数学基础（一）

微 积 分

李天胜 主编

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/李天胜主编.—成都：电子科技大学出版社，2002.8

ISBN 7-81065-926-X

Ⅰ.微… Ⅱ. 李… Ⅲ. 微积分—高等学校—教材

Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 057973 号

经济数学基础（一）

微　积　分

李天胜 主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市建设北路二段四号，邮编：610054）

责任编辑：陈松明

发　　行：电子科技大学出版社

印　　刷：成都青羊区火炬印刷厂

开　　本：850×1168　1/32　印张 17.375　字数 392 千字

版　　次：2002 年 8 月第一版

印　　次：2002 年 8 月第一次印刷

书　　号：ISBN 7—81065—926—X/O・46

印　　数：1—6000 册

定　　价：24.60 元

前言

《经济数学基础》(包括《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》)是财经管理类专业的核心课程之一,是一门重要的基础课。学好这门课程不但能为学生将来从事经济计量分析提供一个有力的工具,而且对于学生逻辑思维能力的培养和创新思维的开发都有着不可替代的作用。

近年来,随着时代的发展和教学改革的不断深入,如何在数学教学中推行素质教育,努力培养学生的创新意识与创新精神,是我们必须面对的一个新课题。过去,我们往往只注重数学知识的传授,但怎样用数学方法解决实际问题却讲得不多,因而学生只会算题,不知道怎么用,而一旦到用的时候,很多数学知识又忘掉了。这是一个很深刻的教训!之所以会形成这种局面,除了课时的限制之外,现行教材中缺乏数学在实际中应用的实例也是一个重要的原因。我们编写这套教材就是为了改变这个现状所作的一种努力和尝试。

这套教材以原国家教委高等教育司审定的"高等学校财经管理类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲"为依据,遵循"以应用为目的,以必需够用为度"的原则,吸收了国内外同类教材的优点,并揉进了我们教学改革的经验。在编写的过程中,对这门课程的一些经典内容,我们在叙述的时候力求做到结合实际、深入浅出、简明扼要,同时还增加了数学方法的介绍及其在经济应用方面的比重。为了巩固学习效果,每节之后都附有一定数量的课后练习,每章之后还配有习题。书后附有练习及习题的答案与提示,可

供教与学的参考。

这套教材的另一个主要特色是每一章后面都附有与教材内容配套的数学应用实例。这些实例都具有一定的针对性，力求理论与实际应用相结合，既可以在课堂上讲授，也可以作为学生的课外阅读材料。希望通过这些实例的阅读和讲授，能缩短数学方法和实际应用的距离，使学生确实感到数学有用，并知道怎样去用，以培养“用数学”的意识。我们衷心希望通过本课程的学习，能使学生在为后续课程奠定良好基础的同时，数学素养和应用数学知识解决实际问题的能力都能得到提高。

《微积分》是《经济数学基础》的第一部分。本书由李天胜任主编，各章的编写人员为：李柏年编写第一章、第二章和第七章，邹洁编写第三章和第四章，冯守平编写第五章和第六章，李天胜编写第八章、第九章、第十章和大部分应用实例。全书由主编总纂、修改定稿。

本书在编写过程中，得到了安徽财贸学院教务处、基础部的领导和数学教研室各位同仁的大力支持，在此一并致以诚挚的谢意。

由于我们水平有限，书中谬误及不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002 年 7 月

目 录

第一章　函　数

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是高等数学中最重要的基本概念之一. 本章将给出函数的一般定义，讨论函数的基本性质，并介绍经济学中常用的函数.

1.1　函数概念

一、常量与变量

在数学和日常生活中，我们常遇到各种不同的量. 例如：长度、面积、体积、价格、销售量、时间、速度等等. 它们大体上可分为两类：一类是它的数值在某一变化过程中保持不变；另一类是它的数值是可以变动的. 我们称前者为常量，后者为变量. 例如，在讨论某种产品的总成本时，我们把总成本分成两部分：一部分是固定成本，它是由折旧费、企业管理费等构成，这些费用不随产品产量的增减而变化，因此它是一个常量；另一部分是变动成本，它是由原材料费、动力费以及直接参加生产的工人工资等构成，这些费用是随着产品产量的增减而增减的，因此它是一个变量.

必须注意，上述常量与变量的概念要依赖于研究这个现象所在的场合. 同一个量，在某种情况下可以认为是常量，而在别的情况下，就可能是变量. 例如，商品的价格在短期内可以看成是常量，而在一个较长的时期内就是一个变量.

二、函数的概念

现实世界中各种不同变化着的量不是孤立的，而是相互联系、并遵循一定的规律变化着. 下面，我们就两个变量之间变化的规律举几个例子.

例 1 圆的周长 C 与它的半径 r 之间的关系由公式

$$C=2\pi r$$

给定. 当半径 r 取定某一正数时，圆的周长也就跟着有一个确定的值.

例 2 某水文站统计了某河流在 40 年内的平均月流量 V 如下表：

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
流量 V（亿立方米）	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由表可看出，由平均月流量 V 与月份 t 之间建立了明确的对应关系，当 t 取 1—12 中任一个整数时，由表即可得到平均月流量 V 的惟一的一个对应值.

例 3 图 1—1 是某地用温度自动记录仪记录的该地某天 24 小时的气温变化曲线. 对于任何 $t_0\in[0,24]$，从图 1—1 中都可以找到此时刻对应的气温 T_0.

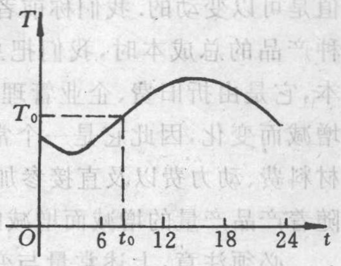

图 1—1

例 4 某工厂每日最多生产产品 1200 件，固定成本为 200 元，且每生产一件产品，总成本增加 9 元，则每日的总成本 y 与日产量 x 之间有如下关系：

$$y=9x+200 \quad (\text{元})$$

当 x 取 $[0,1200]$ 中任一整数时，日总成本 y 就有惟一确定的值与

之对应.

虽然以上四个例子中变量的实际意义各不相同,但它们都表达了两个变量间共同变化的相依关系,这种相依关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在某范围内每取一个数值时,另一变量就有惟一确定的值与之对应.两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设 D 为一个非空实数集,如果存在一个对应规则 f,使得对于每一个 $x\in D$,都能由 f 惟一地确定一个实数 y,则称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数.其中 x 称为自变量,y 称为因变量.自变量 x 的变化范围 D 称为函数 f 的定义域,记为 $D(f)$.

如果 $x_0\in D(f)$,则称函数 f 在点 x_0 处有定义;如果 $x_0\overline{\in} D(f)$,则称函数 f 在点 x_0 处没有定义.若对于每一个 $x_0\in D(f)$,因变量 y 相应取值为 y_0,则称 y_0 为 x_0 所对应的函数值,记为

$$y_0=f(x_0) \quad 或 \quad y_0=y|_{x=x_0} \tag{1.1}$$

因此,对应于自变量 x 的函数值可记为

$$y=f(x) \quad x\in D(f) \tag{1.2}$$

全体函数值所构成的集合,称为函数的值域,记为 $z(f)$.

根据以上定义,函数是指定义域 D 上的对应规则 f,而 $f(x)$ 为函数值.由于我们通常是通过函数值 $f(x)$ 的变化来研究函数 f 的性质,因此习惯上直接称 $f(x)$ 是 x 的函数,或 y 是 x 的函数,并把 D 上的函数 f 记为

$$y=f(x) \quad x\in D \tag{1.3}$$

为了进一步理解函数的概念,我们对上述函数的定义再作几点说明:

(1)函数的实质是指定义域 D 上的对应规则 f,因此定义域和对应规则是确定函数的两个要素.对两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应规则完全相同时,这两个函数才是相同的.

(2)不同的函数，常采取不同的字母表示其对应规则，如 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=F(x)$、…，有时为了方便，也可采用不同的下标来区分，如 $y=f_1(x)$、$y=f_2(x)$…等.

(3)给定一个函数 $y=f(x)$，其定义域是使表达式有意义的所有 x 构成的集合；而在实际问题中，函数的定义域要根据所考虑的问题的实际意义来确定.

(4)由于定义中规定，对于每一个 $x\in D$，有且仅有 y 的一个值与之对应，因而我们定义的函数也称为单值函数；若对于每一个 $x\in D$，有 y 的多个值与之对应，则称该函数为多值函数. 一般地，一个多值函数可以折分成几个单值函数，每一个单值函数都叫做原多值函数的"单值支". 例如，由 $x^2+y^2=1$ 可得到两个单值支 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$，在几何上它们分别表示单位圆的上半圆周和下半圆周. 今后，如无特别说明，我们所说的函数都是指单值函数.

例 5 求函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)}$ 的定义域.

解 由

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(x_2-3x+2)\geqslant 0\\ x^2-3x+2>0\end{cases}.$$

可得 $0<x^2-3x+2\leqslant 1$，解之，即得

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant x<1 \quad 或 \quad 2<x\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

故所求函数的定义域为

$$D(y)=\left\{x\,\middle|\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant x<1 \quad 或 \quad 2<x\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

三、函数的表示方法

函数定义中，对表示函数的方式并未加任何限制，它既可以用

解析法(也称公式法,如例 1)表示,也可以通过反映自变量与因变量之间对应关系的表格(例 2)、图像(例 3)或其他方法表示.

特别需要指出的是,用解析法表示函数时,经常会遇到在自变量不同的取值范围内,对应规则必须用不同的数学式子来表达的函数,这类函数通常称为分段函数.

例 6 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

是定义在实数集 R 上的一个分段函数(图 1－2).

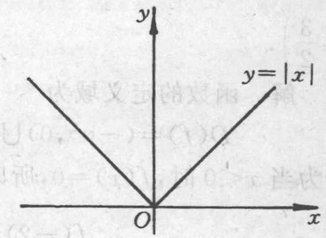

图 1－2

例 7 取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数,即

$$y=k \quad (k\leqslant x<k+1,\ k\in \mathbf{Z})$$

它的定义域 $D_y=(-\infty,+\infty)$,值域 $z(y)=\mathbf{Z}$. 取整函数 $[x]$ 也是一个分段函数,其图形如图 1－3 所示,该图形称为阶梯曲线,在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1.

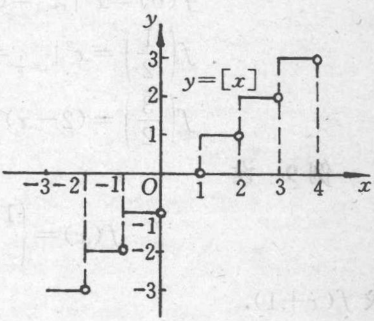

图 1－3

关于分段函数,我们需要强调的是:

(1) 分段函数是用几个不同的解析式表示的一个函数,而不是几个函数;

(2) 分段函数的定义域是各段解析式中自变量取值集合的并集.

例 8 设

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

试指出 $f(x)$ 的定义域，并计算 $f(-2)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(0)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$ 与 $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

解 函数的定义域为

$$D(f)=(-\infty,0)\cup[0,1]\cup(1,2]=(-\infty,2]$$

因为当 $x<0$ 时，$f(x)=0$，所以

$$f(-2)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

同理可得

$$f(0)=x^2|_{x=0}=0^2=0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=x^2|_{x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=(2-x)|_{x=\frac{3}{2}}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

例 9 设

$$f(x)=\begin{cases}1-x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$$

求 $f(x+1)$.

解 将 $f(x)$ 表达式中的 x 换成 $x+1$，即得

$$f(x+1)=\begin{cases}1-(x+1) & x+1<0\\ (x+1)^2 & x+1\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x & x<-1\\ x^2+2x+1 & x\geqslant -1\end{cases}$$

练习 1—1

1. 单项选择：

(1) 与函数 $y=x$ 有相同图像的函数是（ D ）.

A. $y=\sqrt{x^2}$　　　B. $y=\dfrac{x^2}{x}$

C. $y=a^{\log_a x}$ $(a>0, a\neq 1)$　　D. $y=\log_a a^x$ $(a>0, a\neq 1)$

(2) 若 $f(x)=\lg(x^2-3x+2)$ 的定义域为 F，函数 $g(x)=\lg(x-1)+\lg(x-2)$ 的定义域为 G，则（　）.

A. $F\cap G=\varnothing$　B. $F=G$　C. $F\subset G$　D. $G\subset F$

(3) 当 $-2\leqslant x<3$ 时，$f(x)=kx+3k-2<0$，则 k 的取值范围是（　）.

A. $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$　　B. $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)\cup[2, +\infty)$

C. $\left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{3}, 2\right]$

2. 填空：

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2]$，则函数 $y=f(\sqrt{x}-2)$ 的定义域是________. (4,16]

(2) 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，则对于 $0<a<\dfrac{1}{5}$，函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为________ (0,?)

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & -2<x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & 0<x\leqslant 2 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的定义域，并计算 $f(1)$、$f(0)$、$f(-1)$ 及 $f(x-1)$.

4. 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$ 称为符号函数，它根据 x 的符号来确定函数值. 试画出它的图像.

5. 画出下列函数的图像：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant 1\\ x^2 & 1<|x|<2\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -x & |x|>1\end{cases}$

6. 我国的个人所得税法规定，月收入在 800 元以内(含 800 元)不必纳税，月收入超过 800 元时应缴纳个人所得税. 应纳税所得额(即月收入减去 800 元后的余额)与税率如下表所示：

应纳税所得额	税率 (%)
不超过 500 元	5
超过 500 元到 2000 元的部分	10
超过 2000 元到 5000 元的部分	15
…	…

已知某企业职工月收入最高不超过 4000 元，若以 x 表示该企业某职工的月收入，试将其应缴纳的个人所得税 y 表示为 x 的函数.

1.2 函数的简单性质

一、单调性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在某区间 D 上有定义. 对于任意的 x_1、$x_2\in D$，且 $x_1<x_2$.

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加；

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，使函数单调的区间称为函数的单调区间.