奥数题库

美国数学邀请赛试题解答

朱华伟　付云皓 等　编译

科学出版社

奥数题库

美国数学邀请赛试题解答

朱华伟 付云皓 等 编译

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书收录了第1届（1983年）至第28届（2010年）AIME的全部试题，包括英文试题和中文译文，共585道题．对每一道试题均给出详解，有的还给出了多种解法，对部分试题还作了点评．试题的点评不拘形式，或是问题的引申和推广，或是类题、似题的分析比较，或是多种解法的优化点评，或是试题的来源、背景．目的是使读者开阔眼界，加深对问题的理解，培养举一反三的能力．

本书可供高中数学资优生，准备数学高考的考生，准备参加高中数学竞赛的选手，中学数学教师，高等师范院校数学教育专业大学生、研究生、数学教师，数学爱好者及数学研究工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

美国数学邀请赛试题解答／朱华伟等编译．—北京：科学出版社，2011
（奥数题库）
ISBN 978-7-03-030890-0

Ⅰ．美…　Ⅱ．①朱…②付…　Ⅲ．数学—竞赛题—题解
Ⅳ．01-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第073483号

责任编辑：李　敏　赵　鹏／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：黄华斌

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2011年5月第一版　开本：B5（720×1000）
2011年5月第一次印刷　印张：31 1/4　插页：2
印数：1—6 000　字数：614 000

定价：48.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分．这个看法是言之成理的．数学要解题，要发现问题、创造方法．年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态．早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题．竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑．

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话．有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒．我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧．再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训．就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动．这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五．从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可．对于

青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流. 发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了.

摘自《走进教育数学》丛书总序

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　言

美国是数学大国，也是数学竞赛的强国．无论是普及的程度还是提高的程度，它的数学竞赛水平均属上乘．在历届国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad，IMO）中，美国国家队成绩优秀，曾 4 次获得 IMO 团体总分第一，最为辉煌的是 1994 年在香港举办的第 35 届 IMO，美国队夺得团体冠军，6 名队员全部以满分夺取金牌，创下了 IMO 历史上难以超越的记录．

美国的数学竞赛有着悠久的历史，早在 1938 年，美国就开始举行大学低年级的数学竞赛——普特南（William Lowell Putnam）数学竞赛．美国中学生数学竞赛也有 60 多年的历史，美国的中学数学竞赛有：美国高中数学竞赛（AHSME）、美国数学奥林匹克（USAMO）、美国数学邀请赛（American Invitational Mathematics Examination，AIME）及美国初中数学竞赛（AJHSME）．2000 年开始 AHSME 和 AJHSME 改为美国数学竞赛（American Mathematics Competitions，AMC），同时分成了 AMC8，AMC10 和 AMC12. AMC10 供 10 年级和 10 年级以下的同学参加；AMC12 则供 12 年级和 12 年级以下的同学参加，比赛时间在每年 2 月份；AMC8 供 8 年级和 8 年级以下的同学参加，比赛时间在每年 11 月份．

AMC10 和 AMC12 的卷面为 25 个选择题，考试时间 75 分钟，每题答对 6 分，不答 1.5 分，答错 0 分，满分 150 分．在 AMC10 和 AMC12 中获得高分的学生应邀参加 AIME，第一届 AIME 于 1983 年 3 月 22 日举行，AIME 的卷面包括 15 道填空题，每题 1 分，每道题的答案都是 000 到 999 之间的一个整数，不允许使用计算器，要求考生在 3 小时完成（1985 年以前时间为 2 个半小

时）．在 AIME 和 AMC 上表现均突出的美国近300名学生进入 USAMO，USAMO 与 IMO 类似，分两天考试，每天4.5小时，考3道题．在 USAMO 中获得高分的学生组成美国国家集训队，经过约三周的选拔后，选出六名选手参加当年的 IMO.

AIME 的试题新颖别致，内容广泛，灵活性强，其中有些题目具有较高的抽象性，要求学生具有一定的逻辑思维、推理论证、空间想象和分析问题解决问题的能力．AIME 的目的是确定大学之前阶段在数学方面杰出的学生，选拔 USAMO 的参加者．AIME 试图为数学方面有优势的高中生提供挑战并认识其才干的机会，为数学质优者提供进一步发展数学才干、提升数学兴趣的途径．AIME 的价值还在于赛前的准备及赛后对赛题的进一步思考和讨论．

应美国数学协会（MAA）数学竞赛委员会（Committee on the American Mathematics Competitions）的邀请，2009年中国数学会普及工作委员会（AMC 中国区组织委员会）开始组织国内一些知名中学的同学参加 AMC 活动，目的是为“学有余力”和“学有兴趣”的数学爱好者和数学特长生提供一个对外交流及展示自己的窗口和平台，让大家通过这项活动感受不同文化国度对数学学习的要求．由于竞赛时采用的试卷与美国中学生用的完全一样，因此参加 AMC 活动的中学生将与美国的中学生共用一份完全相同的英文试卷，以便大家能够和美国的中学生得到相同的感受，能够使同学们在做数学题的同时也得到语言能力方面的训练，这和实践着的“双语学习”活动是相一致的．

2009年度的 AMC 有两次，AMC10（A），AMC12（A）的时间是2009年2月10日（星期二）；AMC10（B），AMC12（B）的时间是2009年2月25日（星期三）；AIME I 的时间是2009年3月17日（星期二）；AIME II 的时间是2009年4月1日（星期三）．中国区决定选择参加了2009年2月25日举行的 AMC（B）．一般情况下，参加 AMC10 的前1%的考生和参加 AMC12 的

前5%的考生取得参加AIME的资格.2009年的分数线是：AMC12（A）的成绩要达到97.5；AMC12（B）的成绩要达到100；AMC10的成绩要达到120. 全球参加3月17日AIME I的学生有5625人，平均分3.92. 全球参加4月1日AIME II的学生有4400人，平均分4.16. 中国区选择参加了4月1日进行的AIME II. 共有2347人取得资格，实际参赛2157人．中国区最高分：14. 在美国，USAMO index ＝ AMC成绩 ＋ 10 × AIME成绩．参加AMC 12的学生的USAMO index要达到201.0；参加AMC 10的学生的USAMO index要达到215.0（同时AIME的成绩要达到7分）.

“他山之石，可以攻玉”．本书收录了第1届（1983年）至第28届（2010年）AIME的全部试题，包括英文试题和中文译文，共585道题．对每一道试题均给出详解，有的还给出了多种解法，对部分试题还作了点评．试题的点评不拘形式，或是问题的引申和推广，或是类题、似题的分析比较，或是多种解法的优化点评，或是试题的来源、背景．目的是使读者开阔眼界，加深对问题的理解，培养举一反三的能力．

参加本书编译工作的还有郑焕、蔡琳、邹宇、侯煜群、周弋林、杨姗、黄国春、周阳等，在本书的编译中，编译者参考了 *The Contest Problem Book V-American Invitational Mathematics Examinations*（*AIME*）1983－1988，*AIME Solutions Pamphlet* 1995－2000，还参阅了一些中外文书刊，在此向原作者表示衷心的谢意．中国数学会普及工作委员会主任吴建平教授，IMO美国国家队领队冯祖鸣博士对本书的编译提供了很大的帮助，在此向他们表示真诚的感谢．

对于本书存在的问题，恳请读者不吝赐教．

2011年3月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第1章　第一届美国数学邀请赛(1983)

1.1　AIME 试题

1. Let x, y, and z all exceed 1 and let w be a positive number such that

$$\log_x w = 24, \quad \log_y w = 40, \quad \text{and} \quad \log_{xyz} w = 12.$$

Find $\log_z w$.

2. Let $f(x) = |x-p| + |x-15| + |x-p-15|$, where $0 < p < 15$. Determine the minimum value taken by $f(x)$ for x in the interval $p \leqslant x \leqslant 15$.

3. What is the product of the real roots of the equation

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}.$$

4. Points A and C lie on circle of radius $\sqrt{50}$, and point B lies inside the circle with $\angle ABC = 90°$. If $AB = 6$ and $BC = 2$, compute the distance from B to the center of the circle.

5. Suppose that the sum of the squares of two complex numbers x and y is 7 and the sum of their cubes is 10. What is the largest real value that $x + y$ can have?

6. Let $a_n = 6^n + 8^n$. Determine the remainder on dividing a_{83} by 49.

7. Twenty five of King Arthur's knights are seated at their customary round table. Three of them are chosen-all choices of three being equally likely-and are sent off to slay a troublesome dragon. Let P be the probability that at least two of the three had been sitting next to each other. If P is written as a fraction in lowest terms, what is the sum of the numerator and denominator?

8. What is the largest 2-digit prime factor of the integer $n = \binom{200}{100}$①.

9. Find the minimum value of

---

① $\binom{m}{n}$表示组合数 C_m^n.

$$f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}$$

for $0<x<\pi$.

10. The numbers 1447, 1005 and 1231 have something in common: each is a 4-digit number beginning with 1 that has exactly two identical digits. How many such numbers are there?

11. A solid S has square base $ABCD$, two trapezoid faces $ABFE$ and $DCFE$ (with $EF \parallel AB \parallel CD$), and two triangular races AED and BFC. If $AB=AE=ED=BF=FC=6\sqrt{2}$ and $EF=12\sqrt{2}$, what is the volume of S?

12. Diameter AB of a circle has length a 2-digit integer. Reversing the digits gives of the perpendicular chord CD. The distance from their intersection point H to the center O is a positive rational number. Find AB.

13. For $\{1,2,3,\cdots,n\}$ and each of its nonempty subsets a unique alternating sum is defined as follows: Arrange the numbers in the subset in decreasing order and then, beginning with the largest, alternately add and subtract successive numbers. (For example, the alternating sum for $\{1,2,4,6,9\}$ is $9-6+4-2+1=6$ and for $\{5\}$ it is simply 5.) Find the sum of all such alternating sums for $n=7$.

14. Two circles of radii 8 and 6 are drawn with their centers 12 apart. Point P is one of the points of intersection of the circles. Line l passes through P and intersects one circle at Q and the other at R. Given that $QP=PR$, find QP^2.

15. Let AB and BC be two intersecting chords of circle w, with arc $\overset{\frown}{ABD}$ being a minor arc. Suppose that the radius of the circle is 5, that $BC=6$, and that segment AD is bisected by segment BC. Suppose further that AD is the only chord starting at A which is bisected by line BC. It follows that the sine of the central angle of minor arc $\overset{\frown}{AB}$ is a rational number. If this number is expressed as a fraction m/n in lowest terms, what is the product mn?

1.2 AIME 译文

1. 设x,y,z都大于1，w是一个正数，而且有$\log_x w=24$，$\log_y w=40$，$\log_{xyz} w=12$. 求$\log_z w$.

2. 设$f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$，其中$0<p<15$. 若$x\in[p,$

15],求 $f(x)$ 的最小值.

3. 求方程 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$ 的所有实根之积.

4. 一个机器零件的形状是一个有缺口的圆,如图 1-1 所示,这个圆的半径是 $\sqrt{50}$,AB 的长度是 6,BC 的长度是 2,$\angle ABC$ 是直角. 求点 B 与圆心的距离.

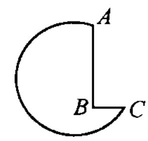

图 1-1

5. 设两个复数 x,y 的平方和是 7,其立方和是 10,$x+y$ 可能取的实数值中最大的是几?

6. 设 $a_n=6^n+8^n$,求 a_{83} 被 49 除的余数.

7. 亚瑟王的 25 位骑士坐在他们的圆桌旁,选出 3 位骑士(选择哪三个,都是等概率的)去斩妖龙. 设 P 是选出的 3 位之中至少有两位座次相邻的概率. 如果 P 写成既约分数,求分子与分母的和.

8. 整数 $n=C_{200}^{100}$ 的两位素数因子的最大值是多少?

9. 求 $f(x)=\dfrac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}(0<x<\pi)$ 的最小值.

10. 1447,1005,1231 这几个数有许多共同之处:它们都是四位数,最高位是 1,都恰有两个相同的数字,一共有多少个这样的数?

11. 图 1-2 中的多面体的底面是边长为 s 的正方形,上面的棱平行于底面,其长为 $2s$,其余的棱长都是 s,已知 $s=6\sqrt{2}$,求这个多面体的体积.

12. 一个圆的直径 AB 的长度是个两位的整数(十进制). 把两个数字颠倒一下,就是与直径 AB 垂直的弦 CD 的长度,如图 1-3 所示. 从交点 H 到圆心 O 的距离是一个正有理数,求 AB 的长度.

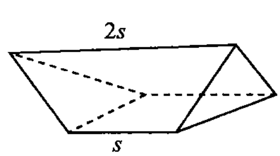

图 1-2

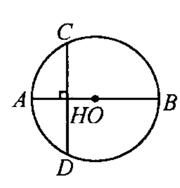

图 1-3

13. 对于 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 和它的每个非空的子集,我们定义"交替和"如下:把子集中的数按从大到小的顺序排列,然后从最大的数开始交替地加减各数(例如 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交替和是 $9-6+4-2+1=6$,而 $\{5\}$ 的交替和就是 5). 对于 $n=7$,求所有这些交替和的总和.

14. 图 1-4 中两圆的半径为 8 和 6,两个圆心的距离是 12,过两圆交点之一

的直线被两圆截出相等的弦 QP 和 PR,求 QP 长度的平方.

15. 如图 1-5 所示,一个圆的两弦相交,其中 B 在$\overparen{AD}$小弧上,设圆半径是 5,$BC=6$,AD 被 BC 等分. 又设从 A 出发的弦只有 AD 能被 BC 等分,这样可以知道 AB 小弧对应的圆心角的正弦是一个有理数. 如果把这个有理数化成既约分数$\frac{m}{n}$,求 mn.

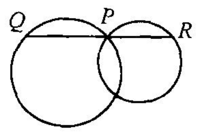

图 1-4

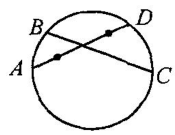

图 1-5

1.3 AIME 解答与点评

1. 答案:60.

解 把已知的对数式写成指数形式,得到

$$x^{24}=w,\quad y^{40}=w,\quad (xyz)^{12}=w.$$

从而

$$z^{12}=\frac{w}{x^{12}y^{12}}=\frac{w}{w^{1/2}w^{3/10}}=w^{1/5},$$

那么 $w=z^{60}$,$\log_z w=60$.

点评 1 设 $\log_z w=t$,则 $\lg z=\frac{\lg w}{t}$. 由已知得

$$\lg x=\frac{\lg w}{24},\quad \lg y=\frac{\lg w}{40},$$

所以

$$\log_{xyz}w=\frac{\lg w}{\lg x+\lg y+\lg z}=\frac{\lg w}{\frac{\lg w}{24}+\frac{\lg w}{40}+\frac{\lg w}{t}}=12,$$

即

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{40}+\frac{1}{t}=\frac{1}{12}.$$

解之得 $t=60$,故 $\log_z w=60$.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com