



测绘科技专著出版基金资助

CEHUI KEJI ZHUANZHU CHUBAN JIJIN ZIZHU

WAVELET ANALYSIS THEORIES AND METHODS FOR
NON-LINEAR GEODETIC SIGNALS

曲国庆 党亚民 章传银 著

非线性大地测量信号
小波分析理论与方法



测绘出版社

测绘科技专著出版基金资助

非线性大地测量信号 小波分析理论与方法

Wavelet Analysis Theories and Methods for
Non-linear Geodetic Signals

曲国庆 党亚民 章传银 著

测绘出版社

· 北京 ·

©曲国庆 党亚民 章传银 2011

所有权利(含信息网络传播权)保留,未经许可,不得以任何方式使用。

内 容 提 要

本书针对非线性大地测量时间序列中的特征信息分析问题,围绕小波多分辨率分析,建立了一套较为系统的大地测量信号小波分析理论与方法。主要内容包括:非线性大地测量信号小波包估计理论与方法,利用改进的小波包单子带重构算法,提取非线性大地测量信号的特征信息;针对高精度大地测量信号,建立 M 带小波包和有理小波的分解与重构算法,采用 M 带小波包单子带重构特征提取方法,探索弱大地测量特征信号提取的新途径;针对两列非平稳大地测量信号,利用小波相关性,在时频两域内分析两列信号的相似程度;利用小波相干性,分析两列信号在不同频率、不同时间分辨率下的相关程度;利用小波相位相干性,比较两列信号间的相位变化关系。

本书主要面向从事大地测量、工程测量、地震、地球物理等方面的科技工作者,也可供相关领域的研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性大地测量信号小波分析理论与方法 / 曲国庆,
党亚民,章传银著. —北京:测绘出版社,2011.2
ISBN 978-7-5030-2218-0

I. ①非… II. ①曲… ②党… ③章… III. ①小波分
析—应用—非线性—大地测量—信号分析 IV. ①P22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 006273 号

责任编辑	贾晓林	封面设计	李 伟	责任校对	董玉珍 李 艳
出版发行	测绘出版社				
地 址	北京市西城区三里河路 50 号	电 话	010—68531160(营销) 010—68531609(门市)		
邮政编码	100045	网 址	www.sinomaps.com		
电子信箱	smp@sinomaps.com	网 址	www.sinomaps.com		
印 刷	北京民族印务有限责任公司	经 销	新华书店		
成品规格	169mm×239mm				
印 张	10.25	字 数	195 千字		
版 次	2011 年 2 月第 1 版	印 次	2011 年 2 月第 1 次印刷		
印 数	0001—1500	定 价	33.00 元		

书 号 ISBN 978-7-5030-2218-0/P·514

本书如有印装质量问题,请与我社联系调换。

前 言

在大地测量中,大多数问题属于非线性问题,用线性模型理论研究和处理非线性问题存在一定的局限性,往往得出与实际不符的结论。现代大地测量提供了大范围、长时间,甚至不间断地对地动态观测,观测环境愈来愈复杂,影响因素较多,函数关系复杂,这种复杂性几乎无法在参数模型中考虑,从而影响了参数模型的解释能力。若能正确地识别、提取这些复杂信息,则不仅能够提高参数估计精度,而且能为其他学科的研究提供资料。

小波研究与应用的热潮始于 20 世纪 80 年代。传统的傅里叶变换只能对信号进行频域分析,无法突出信号在局部时域的特征。而小波函数能对信号进行时频联合局部分析,且这种分析具有自适应“变焦”功能:分析高频分量时,时窗变窄,中心频率增加;分析低频信号时,时窗变宽,中心频率减小。因此,适用于信号的局部分析。基于多分辨率分析理论的正交尺度函数和正交小波互为正交补,能细致划分频带,能将信号分解成不同频带上的分量,为深入分析信号的特征提供了可能。基于框架理论的离散小波函数族在满足一定条件时,可作为函数的逼近基,甚至是正交基。可通过基函数系数重构原信号,逼近误差有明确的上界,而非正交小波基对非线性函数的冗余表示,也能完全刻画原函数,并重构之。为解决某类问题,人们还提出了许多有针对性的小波函数,研究者可根据实际的应用情况选择相应的小波。另外,对传统小波函数的各种改进也在不断出现。

20 世纪 90 年代初,小波概念被引入大地测量。随后,大地测量学界掀起了小波应用研究的热潮,国际大地测量和地球物理学联合会(International Union of Geodesy and Geophysics, IUGG)、国际大地测量协会(International Association of Geodesy, IAG)先后成立了以小波应用为主题的专门研究组,致力于应用小波分析方法解决大地测量学中的相关问题。

小波分析为解决非线性、非参数问题提供了有效的方法。本书研究非线性大地测量信号小波分析理论及应用,对发展现代大地测量数据处理理论与技术具有重要的理论价值和现实意义。

本书是在作者结合中科院百人计划子课题“小波分析理论及其在大地测量中的应用研究”和山东省自然科学基金项目(2004XZ31)而作的博士论文的基础上完善而成的。

由于作者水平有限,错误和不足之处在所难免,敬请读者指正。

作 者

2010 年 3 月

目 录

第 1 章 绪 论	1
§ 1.1 非线性问题的提出及其研究进展	1
§ 1.2 半参数估计的研究进展	3
§ 1.3 小波分析理论及其在大地测量信号处理中应用的研究现状	5
§ 1.4 本书研究的主要内容	10
§ 1.5 本章小结	11
第 2 章 希尔伯特空间与小波分析原理	12
§ 2.1 希尔伯特空间理论	12
§ 2.2 傅里叶变换	18
§ 2.3 小波变换	19
§ 2.4 多分辨率分析与正交小波变换	23
§ 2.5 小波包基本理论	25
§ 2.6 本章小结	30
第 3 章 非线性大地测量信号小波包估计	31
§ 3.1 大地测量信号小波估计	31
§ 3.2 时序信号小波包估计方法	31
§ 3.3 系统性干扰信号小波包估计	40
§ 3.4 突变性干扰信号小波包估计	41
§ 3.5 改进的 Penalty 阈值信号估计	42
§ 3.6 基于 Schur 凹花费函数小波包估计	46
§ 3.7 本章小结	49
第 4 章 非平稳大地测量信号特征信息小波识别	50
§ 4.1 傅里叶谱分析	50
§ 4.2 小波谱分析	58
§ 4.3 小波熵分析	60
§ 4.4 特征信息识别与分析	63
§ 4.5 本章小结	67

第 5 章 大地测量信号特征项分离与提取	68
§ 5.1 大地测量信号的频率混淆现象	68
§ 5.2 小波包变换中的频率混淆	69
§ 5.3 消除频带交错	72
§ 5.4 消除频率重叠	73
§ 5.5 消除其他频率混淆	80
§ 5.6 单子带重构提取大地测量信号特征项	82
§ 5.7 本章小结	86
第 6 章 弱大地测量信号 M 带小波分析	87
§ 6.1 强噪声背景下的大地测量信号	87
§ 6.2 M 带小波理论	87
§ 6.3 M 带小波包理论	91
§ 6.4 基于 M 带小波包的特征信息提取	98
§ 6.5 本章小结	107
第 7 章 有理小波理论及信号估计	108
§ 7.1 有理多分辨率分析	108
§ 7.2 塔形分解与重构算法	110
§ 7.3 有理小波包分析	112
§ 7.4 算法实现	116
§ 7.5 本章小结	118
第 8 章 大地测量信号小波相关性分析	119
§ 8.1 信号的时频相关性	119
§ 8.2 时间序列信号小波相关性分析	122
§ 8.3 时间序列信号小波相干性分析	123
§ 8.4 时间序列信号小波相位相干性分析	128
§ 8.5 大地测量信号小波相关性分析	129
§ 8.6 本章小结	145
参考文献	146

Contents

Chapter 1	Introduction	1
§ 1.1	Proposing and researching of non-linear problems	1
§ 1.2	Research on semi-parametric estimation	3
§ 1.3	Wavelet analysis theory and its present application in processing geodetic signals	5
§ 1.4	Contents of this book	10
§ 1.5	Summary	11
Chapter 2	Hilbert space and wavelet analysis theory	12
§ 2.1	Hilbert space theory	12
§ 2.2	Fourier transform	18
§ 2.3	Wavelet transform	19
§ 2.4	Multi-resolution analysis and orthogonal wavelet transform	23
§ 2.5	Basic wavelet packet theory	25
§ 2.6	Summary	30
Chapter 3	Wavelet packet estimation for non-linear geodetic signals	31
§ 3.1	Wavelet estimation for geodetic signals	31
§ 3.2	Wavelet packet estimation for time series signals	31
§ 3.3	Wavelet packet estimation for systematic jamming signals	40
§ 3.4	Wavelet packet estimation for abrupt changing signals	41
§ 3.5	Wavelet packet estimation with improved Penalty threshold	42
§ 3.6	Wavelet packet estimation based on Schur concave cost function	46
§ 3.7	Summary	49
Chapter 4	Feature information within non-stationary geodetic identification based on wavelet	50
§ 4.1	Fourier spectrum analysis	50
§ 4.2	Wavelet spectrum analysis	58

§ 4.3	Wavelet entropy analysis	60
§ 4.4	Identification and analysis for feature information	63
§ 4.5	Summary	67
Chapter 5	Extraction and separation of feature items within geodetic signals	68
§ 5.1	Frequency aliasing within geodetic signals	68
§ 5.2	Frequency aliasing within wavelet packet transform	69
§ 5.3	Reordering nodes to avoid frequency interleaving	72
§ 5.4	Single sub-band reconstruction to weaken frequency folding ...	73
§ 5.5	Improved single sub-band reconstruction to avoid other aliasing	80
§ 5.6	Extraction of feature item within geodetic signals with single sub-band reconstruction algorithm	82
§ 5.7	Summary	86
Chapter 6	<i>M</i>-band wavelet analysis for weak geodetic signals	87
§ 6.1	Geodetic signals with strong background noise	87
§ 6.2	<i>M</i> -band wavelet theory	87
§ 6.3	<i>M</i> -band wavelet packet theory	91
§ 6.4	Feature information extraction based on <i>M</i> -band wavelet packet	98
§ 6.5	Summary	107
Chapter 7	Rational wavelet theory and the estimation by it	108
§ 7.1	Rational multiresolution analysis	108
§ 7.2	Pyramid decomposition and reconstruction algorithm	110
§ 7.3	Rational wavelet packet analysis	112
§ 7.4	Algorithm realization	116
§ 7.5	Summary	118
Chapter 8	Wavelet correlation analysis for geodetic signals	119
§ 8.1	Time-frequency correlation between signals	119
§ 8.2	Wavelet correlation analysis for time series	122
§ 8.3	Wavelet coherence analysis for time series	123

§ 8.4	Wavelet phase coherence analysis for time series	128
§ 8.5	Wavelet correlation analysis for geodetic time series	129
§ 8.6	Summary	145
References		146

第1章 绪论

§ 1.1 非线性问题的提出及其研究进展

1.1.1 非线性问题的提出

非线性科学在过去的 30 多年间激励了自然科学、工程技术与社会科学的研究人员,并向人们提出了划时代的挑战。中国科学院院长周光召在《迈向科技大发展的新世纪》一文中指出:“非线性科学是关于体系总体本质的一门新学科,它着重于总体、过程和演化。”“非线性科学不仅在认识论上有重大的哲学意义,也在求解基本问题时有重大科学意义。”非线性科学是研究复杂现象的一类新学科,涉及自然科学的方方面面,近些年许多理论相继问世,并得到发展,如耗散结构、混沌力学、分形和分维、自组织、协同学、超循环与微循环、奇异吸引子与混沌动力学等。非线性科学贯穿于信息科学、生命科学、空间科学、地球科学和环境科学等领域,广泛应用于描述自然界的各种现象。近 30 年来,非线性科学在探求自然界的非线性现象的普遍规律,发展普适的非线性模型以及处理方法方面取得了丰富的成果。但是,由于非线性问题的复杂性,在相当长的一段时间内,非线性理论和方法将仍是一个重要的研究领域。

现实世界中,严格的线性模型并不多见,它们或多或少都带有某种程度的近似。随着科学技术和近代统计学的飞速发展,人们对非线性问题的认识不断加深,非线性模型的研究越来越多,农业、生物、经济、工程技术等领域的学者都提出了许多非线性模型以及其他非线性统计问题。因此,积极开展非线性模型估计的研究在理论与实践中日趋重要。非线性模型估计是线性模型估计的自然推广,目前对线性参数模型估计的理论研究已日臻完善,而对非线性参数模型估计理论的研究还不成熟。所以,对非线性模型估计理论与方法进行研究具有重要的意义。

测绘科学领域同样存在大量的非线性问题。对于测量中的非线性模型,传统的处理方法是进行线性近似,即将其展开为泰勒级数,取至一次项,而略去二次以上各项。随着测绘科学技术的不断发展,测量精度已大大提高,致使线性近似所引起的模型误差与观测误差相当,甚至还会大于观测误差。因此,用线性近似的理论、模型和方法去处理现代测量的观测结果,可能会导致精度损失。另外,有些非线性模型对参数的个数及其近似值十分敏感,若近似值的精度较差,线性近似时就

可能会产生较大的模型误差甚至导致解算结果发散。再者,由于没有顾及线性近似所引起的模型误差,有时用线性模型的精度评定理论去评定估计结果的精度,会得到一些虚假的优良统计性质。因此,传统的线性近似方法不能满足当今科学技术的要求。

1.1.2 非线性问题的研究进展

线性模型参数估计问题,可以追溯到18世纪初。1806年著名数学家勒让德从代数观点提出了最小二乘法,而早在1794年,高斯就提出用最小二乘法从带有误差的观测值中找出待定量最优值,但高斯直到1809年才在《天体运动理论》中正式发表他的方法。后来,马尔可夫于1900年证明了最小二乘估计的方差最小的性质,形成了著名的高斯-马尔可夫定理,从而奠定了最小二乘法在线性参数模型估计中的地位。非线性参数模型估计理论的研究始于20世纪60年代初期,直到1980年,统计学家Bates和Watts引入曲率度量以后,它才得到较快的发展。

测绘学领域内的非线性参数模型估计理论的研究相对较晚,较深入的研究是20世纪80年代后期。1985年以来,国际著名大地测量学者Teunissen在非线性参数模型估计方面作了卓有成效的研究,他先后研究了非线性模型最小二乘估计的一、二阶矩,提出了从舍去项中寻找对函数模型和参数的影响,然后对函数模型和参数的估值进行修正的思想。Blahs研究了非线性最小二乘的无迭代求解理论。Lohse研究了非线性模型的参数估计理论。Athanasios Dermanis和Fernando Sanso研究了可容许和不可容许非线性估计原理,提出了非线性估计的贝叶斯方法。

我国的测量学者对非线性参数模型估计问题作了一系列的研究:徐培亮研究了非线性函数的协方差传播公式。刘大杰、黄加纳研究过非线性最小二乘的迭代解法。周世健研究了广义方差-协方差的传播问题。刘国林、陶华学在非线性参数模型估计方面作了一些较系统的研究工作,对非线性模型展开后取至二次项,研究了这种新模型下的平差问题(如秩亏自由网平差)和协因数的传播问题。胡圣武、陶本藻对非线性参数模型估计的统计性质进行了研究,并将其应用到GIS中。王新洲对非线性参数模型估计理论作了系统的研究,研究了非线性参数模型估计的算法和非线性模型中单位权方差的估计,提出了非线性模型线性近似时的容许曲率概念,给出了非线性模型能否线性近似的实用判据,导出了非线性参数模型估计的直接解法和非线性参数模型估计中单位权方差的估计公式。张勤研究了用于求解非线性最小二乘模型、非线性秩亏模型和非线性病态方程的参数估值的同伦算法。姚琦伟定量地总结了非线性时间序列预报不同于线性预报的三次特征,即预报误差对初始条件的依赖性、敏感性以及在多步预报中的非单调性。

§ 1.2 半参数估计的研究进展

参数、非参数及半参数估计的提法源于数理统计学,在数理统计学领域先后形成了参数统计、非参数统计和半参数统计分支。统计学的基本任务是利用观测的样本去推断总体的一些性质,推断过程中经常要对研究的总体作一些假定,然后估计未知参数或未知函数或对它们作某种假设检验。非参数及半参数统计广泛应用于经济、工业技术、气化学等领域的数据处理中。

1.2.1 参数、非参数及半参数统计

基础数理统计的许多方法是对总体的分布假定了一个参数模型,未知的是模型中的参数,要解决的问题是估计这些未知参数或对它们作某种假设检验。参数统计,粗略地说,就是常见的一套基于正态假设的统计方法,包括假设检验和统计推断,如线性回归、狭义多元回归分析、 χ^2 检验、 t 检验、 F 检验等。

在一个统计问题中,若所假定的总体分布的数学形式已知,而只包含有限个(通常为不多)未知的实参数,其余均为已知,则是参数统计问题。设模型为

$$L = f(X) + \Delta \quad (1.1)$$

式中, Δ 为随机误差,常假设为独立同分布(independently-identically distributed, iid)向量。参数估计要解决的问题是由观测值来估计未知函数 $f(X)$ 或对 $f(X)$ 的假设作统计检验。若 $f(X)$ 为线性函数,则为线性参数模型估计;若 $f(X)$ 为非线性函数,则为非线性参数模型估计。线性模型的参数估计问题,已有很完善的理论,对于非线性模型的参数估计问题,也有较丰富的研究成果。

参数模型对待估函数提供了大量的额外信息,因此当假设成立时,其推断有较高的精度;但当假设与实际情况背离时,基于假设模型所作的推断效果可能很差,这就促进了非参数统计的发展。

非参数统计是参数统计的对立面。非参数统计一般对研究的总体不作具体的模型假设,对总体的分布极少限制,只有一些定性的描述,在这样比较弱的假定下对总体的一些未知特征进行统计推断,这里的统计量是指非分布参数或非分布参数的函数。两样本检验问题、对称分布的对称中心的估计、形状未知的回归函数的估计、拟合优度检验问题等,都是非参数统计问题。可见,非参数统计中的统计量往往是与分布无关的。

设非参数统计模型为

$$L = g(t) + \Delta \quad (1.2)$$

式中, $g \in \zeta$, ζ 为 $\mathbf{R}^n$ 上某函数空间, Δ 为独立同分布随机误差变量, $\{t_i\}$ 是从具有未知的密度函数 $f(X)$ 的总体中抽取的独立同分布样本。

对于参数估计,不论是线性模型还是非线性模型,其估计函数的形式是已知的,只是参数待定。非参数估计函数的形式是未知的。非参数估计的理论和方法,自 Stone 以后已取得重大进展,相对于参数估计有一些优点,且与参数估计有互补的功效,但从实际应用来说,有它的局限性:当观测值与参数的函数形式未知,观测值无法表达为某些参数的函数时,非参数模型能较准确地描述观测值,有较大的适应性;但当二者之间有明确的关系时用非参数估计进行处理,则信息损失太多;当观测值与部分参数之间的关系很明确,而与另一部分参数的关系因为复杂而无法用一明确的关系式表达时,可以用参数模型和非参数模型的综合模型——半参数模型来表达,其一般形式为

$$L = f(X) + g(t) + \Delta \quad (1.3)$$

式中, f 为观测值与部分参数间的明确关系,是模型的参数分量,可为线性或非线性函数; g 用来表达观测值与参数之间无明确函数关系的部分,称为模型的非参数部分; Δ 独立同分布随机误差变量。

以往研究的半参数模型中的参数分量均为线性函数,故以往研究的半参数模型都是线性半参数模型,有人也称之为偏线性回归模型。对于参数、非参数和半参数模型,各有其适用范围,离开各自的适用范围就无法评价这些模型的优劣。只能一般的说,这些模型在其适用的范围内都是十分有用的,其理论和方法都尚在发展之中。

1.2.2 半参数模型的研究现状

半参数模型估计是当今理论数理统计研究的热点。一些统计学者的研究重点是设法在自然合理的条件下获得参数分量和非参数分量估值的大样本性质及最优收敛速度,主要是在理论上讨论半参数估计结果的大样本性质。例如:杨善朝和秦永松研究了相依样本下非参数估计的极限性以及应用经验似然方法研究若干常见半参数模型的经验似然估计和置信区间。施沛德构造出了半参数回归模型的 M 估计,并证明了参数分量的 M 估计是渐近有效的。朱仲义、韦博成主要研究半参数非线性回归模型的几何结构的建立,并在此基础上研究与统计曲率有关的某些渐进推断。施云驰、柴根象利用最小二乘局部多项式方法建立了半参数回归模型参数分量、非参数分量和误差方差的局部多项式估计,在适当的条件下,得到它们的渐近正态性和最优收敛速度。高集体主要研究半参数回归模型的大样本理论。陈宏主要研究了半参数回归模型中的有效估计。艾春荣主要研究完全与截尾样本半参数回归模型估计的强相合性,并应用到计量经济学领域中。Yang Lijian 研究了半参数模型和非参数时间序列分析。孙海燕研究了半参数回归模型在测量中的应用,如将半参数估计方法用于平差模型的精化和 GPS 相位观测中系统误差的处理等。童恒庆主要研究半参数模型的大样本性质。

§ 1.3 小波分析理论及其在大地测量信号处理中应用的研究现状

1.3.1 小波分析理论及其应用的发展

1807年法国数学家傅里叶在热传导理论研究中提出的傅里叶分析,对数学和工程科学的发展都起到了很大的影响和推动作用。在傅里叶变换(Fourier transform, FT)中引入频率的概念,发展了频谱分析理论。但FT是一种全时域变换,无法提取局部时间段上的信号特征。1946年, Gabor提出了一种加时间窗的短时傅里叶变换(short time Fourier transform, STFT),以高斯函数为窗口的Gabor变换,日后被发展为Morlet小波。因此,小波是一类能进行伸缩和平移操作的紧支局部函数,而小波分析就是以小波函数为变换核的一类积分变换的统称,本质上是对傅里叶分析的继承与发展(Gabor, 1946)。

小波研究与应用的热潮始于20世纪80年代。1983年法国工程师Morlet用Gabor变换处理地震波数据的局部特性时,遇到高频成分振荡很大,致使系数计算不稳定;遇到低频成分振荡很小,无法重构信号。为此,引入了小波概念。通过物理、直观的经验 and 信号处理的实际建立了反演公式,当时未能得到数学家的认可。正如1807年傅里叶提出任一函数都能展开成三角函数的无穷级数的创新概念未能得到著名数学家拉格朗日、拉普拉斯以及勒让德的认可一样。幸运的是,早在20世纪70年代,Calderon表示定理的发现、Hardy空间的原子分解和无条件基的深入研究为小波变换的诞生作了理论上的准备,而且Stromberg还构造了历史上非常类似于现在的小波基;理论物理学家Grossmann对该小波的分解可行性作了研究,提出了确定函数 $W(t)$ 的伸缩与平移展开理论,为小波分析理论的形成奠定了基础。1985年,Meyer关注Grossmann和Morlet提出的小波变换,构造了具有衰减性的光滑函数——Meyer小波,其二进伸缩和平移构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的规范正交基。1986年Meyer偶然构造出一个真正的小波基,并与Mallat合作把小波变换放入更广的空间来分析,将多分辨率分析思想引入到小波函数构造,研究了小波变换的离散化形式和滤波器组概念,提出了信号小波分解与重构的Mallat算法。小波分析才开始蓬勃发展起来。其中比利时女数学家Daubechies撰写的小波十讲(《Ten Lectures on Wavelets》)对小波的普及起了重要的推动作用。它与傅里叶变换、窗口傅里叶变换(Gabor变换)相比,是一个时间和频率的局域变换,因而能有效地从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析,解决了傅里叶变换不能解决的许多困难问题,它是调和与分析发展史上里程碑式的进展(Daubechies, 1990)。

小波(wavelet)顾名思义,就是小的波形。所谓“小”是指它具有衰减性;而称为“波”则是指它具有波动性,其是振幅正负相间的振荡形式。与傅里叶变换相比,小波变换是时间(空间)频率的局部化分析,它通过伸缩平移运算对信号(函数)逐步进行多尺度细化,最终达到高频处时间细分,低频处频率细分,能自动适应时频信号分析的要求,从而可聚焦到信号的任意细节,解决了傅里叶变换的困难问题,成为继傅里叶变换以来在科学方法上的重大突破。有人把小波变换称为“数学显微镜”。

小波主要经历了以下发展阶段(李建平,2004)。

1. 1983 年 Morlet 提出小波基本概念

20 世纪 80 年代初期,法国工程师 Morlet 提出了一种新的时间-频率分析方法,它称为“形状不变的小波”(wavelet of constant shape)。Morlet 当时正在法国的 Elf Aquitaine 石油公司工作。石油公司找油通常向地下打炮,通过地下沉淀物层面反馈的信息来判断地下是否有石油。这种处理方法要处理大量数据。开始, Morlet 用 Gabor 变换来处理,很快他发现 Gabor 处理数据时,遇到高频时成分振荡很大,致使系数计算不稳定;遇到低频成分振荡很小,从而无法重构信号。后来, Morlet 采用伸缩取代频率平移的思想取得了满意的实践效果。

Morlet 使用他自己定义的小波函数 $\hat{\psi}(\xi) = \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}} (\xi > 0)$, 此函数正是他引进的分析信号函数,它是高斯函数的二阶导数。如果说 Morlet 引进上述小波是他的第一思想,那么他的第二个思想则是离散取样,为计算机取值处理作准备。之后通过确定信号重构足够小的值,来建立信号分解的系数计算公式。至此,小波宣告诞生。

2. 1984 年 Grossmann 建立马赛小波研究中心

数值试验表明,1983 年 Morlet 构造的小波变换具有很好的信号分析效果,也就是说 Morlet 的方法在应用方面取得了成功。为进一步探究小波数学原理,他向在法国国家科学研究中心(National Center for Scientific Research, CNRS)实验室 CPT 研究中心工作的理论物理学家 Grossmann 请教,并与 Grossmann 一起工作, Grossmann 所在的研究中心位于马赛市。Grossmann 及其合作者将 Morlet 小波变换与量子物理凝聚态理论联系起来,他们引进所谓连续小波变换来代替 Morlet 离散伸缩函数集,这样一来, Morlet 小波变换就成为对凝聚态展开的离散取样,并从样本中重构信号。仿射群凝聚态概念早在 1986 年就由 Aslaksen 与 Klauder 引进,故并不是什么新奇的东西。但基于仿射群构造的高效 Morlet 重构算法却是一项创举,影响深远。

Grossmann 的第二项重要思想是基于框架理论解决由离散小波系数精确重构原来的信号。框架概念是由 Duffin 与 Schaeffer 在研究非调和傅里叶级数时引进的。

Morlet 与 Grossmann 的马赛研究梯队的合作研究大大地丰富了 Morlet 小波

变换内容。Grossmann 等人很快认识到 Morlet 算法可能是多尺度分析十分有用的工具。在 Morlet 与 Grossmann 周围,有一批来自不同领域的科学家,他们开始探索小波多尺度分析,马赛小波研究中心也吸引了许多有名的科学家。

由于得到 CNRS 研究经费的强大支持,同时分别于 1987 年和 1989 年举办了两次小波分析国际会议和多次小波分析研讨班,故马赛成为小波理论重要研究中心。该中心最有影响的成果之一是建立了山脉骨架算法,此算法用于提取渐进信号的调制规律。马赛中心另一个重要成果是 Arneodo 等人用小波方法证明紊流中 Frisch 和 Parisi 提出的关于多分支结构假设。目前,该论文是基于小波分析计算紊流信号奇异性的经典文献。

3. 1986 年 Mallat 提出 MRA

1985 年 9 月, Meyer 为了完善他建立的小波理论,他在 Haar 基的基础上用类推的方法试图给出高维小波基的构造。不久以后,研究构造量子场论的 Battle 与 Lemarie 各自独立构造出具有指数衰减的样条正交小波,由此再构造高维小波并形成 $L^2(\mathbf{R}^d)$, $H^p(0 < p \leq 1)$ 的无条件基就变得很容易。

Mallat 把小波变换放入更宽广的空间来分析,基于 Laplacian 金字塔算法,他提出了一种新型快速算法,此算法很自然地用于数据压缩、边缘检测、纹理分析等, Mallat 和 Meyer 合作提出多分辨率分析(multi-resolution analysis, MRA)。

4. 1987 年 Daubechies 给出 FIR 滤波器

Mallat 研究工作的重点是关于快速小波变换(fast wavelet transform, FWT)算法的镜像共轭滤波器。构造紧支集小波在算法上与构造满足精确重构条件且具有有限脉冲响应的镜像共轭滤波器等价。Mallat 与 Mayer 合作完成 MRA 及 FWT 以后,并没有完成紧支集正交小波的构造, Daubechies 利用著名的 Riese 引理和 Heerman 最大平滑滤波器完成了这一任务。Daubechies 对滤波器构造的论文发表在《Communication on Pure and Applied Mathematics》上,并成为经典、必读的文献。后来 Daubechies 将滤波器应用于信号及图像处理,取得极佳的应用效果。

小波分析的应用领域十分广泛,如数学领域信号分析、图像处理、量子力学、理论物理、军事电子对抗与武器的智能化、计算机分类与识别、音乐与语言的人工合成、医学成像与诊断、地震勘探数据处理、大型机械的故障诊断等方面。在数学方面,它已用于数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等;在信号分析方面已应用于滤波、去噪声、压缩、传递等;在图像处理方面已应用于图像压缩、分类、识别与诊断、去污等;在医学成像方面已应用于 B 超、CT、核磁共振,减少了成像的时间,提高了分辨率等。

1.3.2 小波分析特点及其在大地测量数据处理应用中的研究现状

由于小波分析具有时频局部化和多分辨率分析的能力,因此它已经在众多科

学领域得到了广泛的应用。20 世纪 90 年代以来,基于小波理论的大地测量数据处理的研究备受重视。小波及小波分析的特点如下(郑军,2005):

(1)在时频域具有局部分析功能。传统的傅里叶变换只能对信号进行频域分析,无法突出信号在局部时域的特征,而小波函数能对信号进行时频联合局部分析,且这种分析具有自适应“变焦”功能:分析高频分量时,时窗变窄,中心频率增加;分析低频信号时,时窗变宽,中心频率减小,因而适用于信号的局部分析。

(2)具有多分辨率分析功能。基于多分辨率分析理论的正交尺度函数和正交小波两者互为正交补,能细致划分频带,能将信号分解成不同频带上的分量,为深入分析信号的特征提供了可能。

(3)是一种良好的非线性系统局部逼近基。基于框架理论的离散小波函数族满足一定条件时,可作为函数的逼近基,甚至是正交基。可通过基函数系数重构原信号,逼近误差有明确的上界,而非正交小波基对非线性函数的冗余表示,也能完全刻画原函数,并重构之。

(4)具有多样性。为解决某类问题,人们提出了许多有针对性的小波函数,如 Daubechies 族小波、墨西哥草帽小波、Gabor 小波、Meyer 小波、样条小波等,研究者可根据实际的应用情况选择相应的小波,且对传统小波函数可进行各种改进。

小波分析已经形成了一套较完善的理论,为实际应用提供了工具。目前,小波理论与技术在大地测量信号处理领域的应用日趋广泛。

在非线性模型小波估计方面,由于小波的优良特性,小波估计有误差小、收敛速度快等优点,许多学者对其作了探讨和研究,并取得了许多研究成果。例如用核估计法与最小二乘法讨论了半参数模型误差序列为 NA 序列的一些大样本性质(任哲等,2000);用小波方法讨论了非参数回归的一些大样本性质(Antoniads et al,1994);将小波光滑成功地应用到半参数模型中对 f 和 g 的估计,也得到了一些重要的大样本性质(柴根象等,1999);把小波光滑和偏残差法结合在一起并综合最小二乘法(潘雄,2003),得到了 f 和 g 的小波估计的统计量 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$;数学界对半参数回归模型的小波估计的强逼近、误差分布小波估计的渐近理论、弱相合速度、随机加权逼近速度、局部多项式估计的渐近性质、误差为 NA 序列时的 R 阶矩相合性、随机删失半参数回归模型小波估计的渐近性等性质(刘元金等,1999;陈敬雨等,1999;钱伟民等,2000;徐初斌等,2000;施云驰等,2001;薛留根,2003;潘雄等,2004;潘雄,2006)作了详尽的研究;小波在非参数统计中也得到一定的应用(Hardle et al,1998);研究了概率密度函数的小波估计和非参数回归函数的小波估计;对强相关函数(Hall et al,1995,1996a;Donoho et al,1995,1996,1998),研究了非参数回归函数的小波估计(Johnstone et al,1997;Johnstone,1999),证明了估计量达到最优收敛率,提出了它的小波估计量,并且得到了它的均方误差的近似展开表达式。以上成果,从数学理论上给予了严格的证明,为应用研究提供了理论保