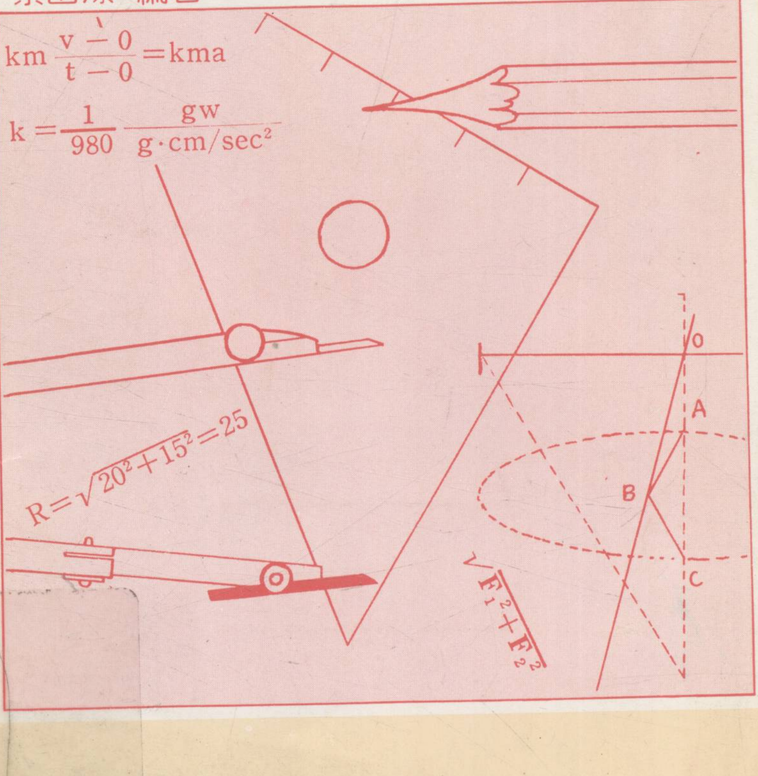
華視叢書・教學輔導系列

高中課業輔導

數　學

蔡國湶 編著　　蔡義忠 主編



中華民國七十二年十一月初版
華視叢書•教學輔導系列
高中課業輔導　數學科
工本費　140元
編著者　蔡國淥
主編者　蔡義忠
發行人　吳寶華
出版者　華視文化事業股份有限公司
附設中華出版社
地　址　臺北市松山區光復南路100號
電　話　7811618　7413871　7315653
郵政劃撥　第524524華視世界帳號
門市部　華視世界
地　址　臺北市松山區光復南路306號
出版登記證　行政院新聞局局版臺業字第0279號
法律顧問　翁國樑　律師

目　　錄

第一章　基礎數學

一、證明的方法

設 P，Q 為集合，p，q 為敘述，E，F 為命題。

" $p \Rightarrow q$ "表"若 p 成立，則 q 成立"也就是由 p 可以推演得 q

" $E \equiv F$ "表 E 與 F 同義，也就是兩者中之一為眞時另一亦必為眞

U 代表基集，先有了基集以後，在基集的範圍內去討論集合問題。

$\overline{P} = \{ x \mid x \in U$ 且 $x \notin P \}$ 為 P 的補集。

敘述" $\sim p$ "表敘述" p 不成立"

若 $p \Rightarrow q$，則稱 p 為 q 的充分條件，q 為 p 的必要條件。

而 $p \Rightarrow q$ 與 $q \Rightarrow p$ 均成立時，稱 p，q 互為充要條件，記作 $p \Leftrightarrow q$

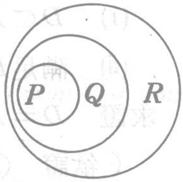
1.直接證法

① 設 $P = \{ x \mid x$ 具性質 $p \}$，$Q = \{ x \mid x$ 具性質 $q \}$

則" $P \subset Q$ "與" $p \Rightarrow q$ "表同一回事。

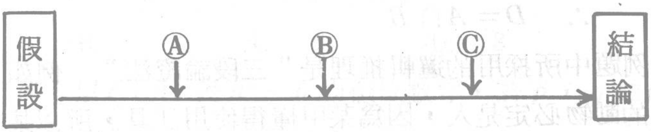
② 集合的觀點：設 $P \subset Q$ 且 $Q \subset R$，則 $P \subset R$

邏輯的觀點：設 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow r$，則 $p \Rightarrow r$



型態Ⅰ. 從假設出發，逐步推演到結論，在中途用到數學的性質——定義、定理或已被解決的數學事實。

（在下圖中，以ⒶⒷⒸ等來表示）



例 1　用 R 及 Q 表示實數系及有理數系，考慮如下的兩個敍述：

甲. 若 $x \in R$，$x^7 \in Q$，$x^{12} \in Q$，則 $x \in Q$

乙. 若 $x \in R$，$x^9 \in Q$，$x^{12} \in Q$，則 $x \in Q$

請分別判斷其正誤，並加以證明。

證：甲. $x=0$ 時顯然爲正確，$x \neq 0$ 時敍述亦爲正確，證之如下

$$\boxed{\begin{array}{c} x^7 \in Q \\ x^{12} \in Q \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} (x^7)^5 \in Q \\ (x^{12})^3 \in Q \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x^{35} \in Q \\ x^{36} \in Q \end{array}} \longrightarrow \boxed{x = \frac{x^{36}}{x^{35}} \in Q}$$

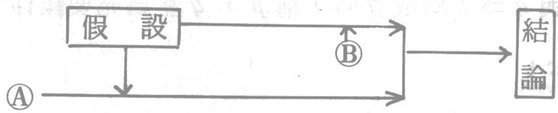
乙. 由甲中的想法可知 $x^3 \in Q$，但 $x \in Q$ 未必成立。

例如 $x = \sqrt[3]{2}$ 時，$x \in R$，$x^9 = 2^3 \in Q$，$x^{12} = 2^4 \in Q$

但 $x \notin Q$　∴乙爲不正確。

● 欲證明一敍述或命題爲不正確，可以舉出一個例子說明之。

型態 Ⅱ. 從基本的數學性質出發邁向結論，在中途用到假設中的條件，有時必須再與型態Ⅰ配合，雙管齊下導出結論。



例 2　設 A，B 爲所予的集合，若一集合 D 滿足下列二性質：

(i)　$D \subset A$ 且 $D \subset B$

(ii)　滿足 $E \subset A$ 及 $E \subset B$ 的任一集合 E，必有 $E \subset D$ 的結果。

求證　$D = A \cap B$

（欲證　① $D \subset A \cap B$　② $A \cap B \subset D$）

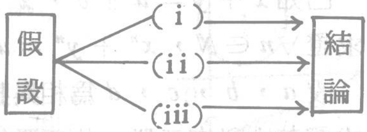
證：①　由(i)　$D \subset A$ 且 $D \subset B \Rightarrow D \subset A \cap B$

②　因 $A \cap B \subset A$ 及 $A \cap B \subset B$ 均成立，由(ii)知 $A \cap B \subset D$

∴　$D = A \cap B$

● 本例題中所採用的邏輯推理是“三段論證法”　例如：懂得使用工具的動物必定是人，因爲某甲懂得使用工具，所以某甲是人。

型態Ⅲ. 將假設分為若干種情形，每一種情形都可以導出結論來。



● 對於實數 x，y，$Max(x, y)$ 表 x，y 中較大的一數（含同大）

$min(x, y)$ 表 x，y 中較小的一數（含同小）

例 3 設 x，y，$z \in R$，求證

$$Max\{min(x, y), min(x, z)\} = min\{x, Max(y, z)\}$$

證： ∵上列等式是 y，z 的對稱式

∴若 y 大於 z 時等式成立，則 z 大於 y 時等式亦成立。

(i) $x \geq y \geq z$ 時，$\begin{cases} 左 = Max(y, z) = y \\ 右 = min(x, y) = y \end{cases}$ ∴左＝右

(ii) $y \geq x \geq z$ 時，$\begin{cases} 左 = Max(x, z) = x \\ 右 = min(x, y) = x \end{cases}$ ∴左＝右

(iii) $y \geq z \geq x$ 時，$\begin{cases} 左 = Max(x, x) = x \\ 右 = min(x, z) = x \end{cases}$ ∴左＝右

由(i)(ii)(iii)知，等式恆成立。

練習題 1

1. 設 f 為一函數，$\forall m$，$n \in N$ 恆有 $f(m, 1) = m$ 及 $f(m, n) = f(m+1, n-1)$，則 $f(137, 42) =$

Ⓐ 177　Ⓑ 178　Ⓒ 179　Ⓓ 180

2. 以 O_m 表從 1 算起的第 m 個正奇數，並定義 $a \circ b = c$ 意指 $O_a \times O_b = O_c$，若 $4 \circ x = 39$，則 x 的值為

Ⓐ 2　Ⓑ 4　Ⓒ 6　Ⓓ 8

3. 設 $n \in N$，以 $F(n)$ 表 $n^2 + n$ 的個位數字，若 p，$q \in N$ 且 $p + q = 9$，求證 $F(p) = F(q)$

4. 已知$x+y=u+v$，$x^2+y^2=u^2+v^2$

求證$\forall n\in N$，$x^n+y^n=u^n+v^n$恆成立。

5. 設a，b，c，d爲相異整數，

求證其中必有二數，此二數的差爲 3 的倍數。

6. 設$Max(x,y)=2x+3y-1$，$min(x,y)=-2x-y+6$，則

(1) $x=$Ⓐ 4 Ⓑ 2 Ⓒ -1 Ⓓ -3

(2) $y=$Ⓐ 4 Ⓑ 2 Ⓒ -1 Ⓓ -3

7. 對於相異實數a，b，c定義$[a,b,c]=\dfrac{a-c}{b-c}$，已知

$[a,b,c]=x$，則

(1) $[b,a,c]=$ Ⓐ $\dfrac{1}{x}$ Ⓑ $-\dfrac{1}{x}$ Ⓒ $1+\dfrac{1}{x}$ Ⓓ $1-\dfrac{1}{x}$

(2) $[b,c,a]=$ Ⓐ $\dfrac{1}{x}$ Ⓑ $-\dfrac{1}{x}$ Ⓒ $1+\dfrac{1}{x}$ Ⓓ $1-\dfrac{1}{x}$

8. 設$n\in Z$，若n及$n\pm1$均不爲 5 的倍數，

求證 n^2+1必爲 5 的倍數。

9. 設$n\in N$，則由$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$顯然可以看出n^2+n+1不爲完全平方數，據此證明連續四個自然數的積不爲完全平方數。

10. 設a，b，c，$d\in Q$，$cd\neq0$，x爲無理數，

求證 $\dfrac{ax+b}{cx+d}\in Q$的充要條件爲$ad=bc$

11. 設一三角形的三邊的長a，b，c滿足$\dfrac{a^4+b^4}{c^4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$

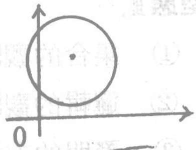
試問此三角形的形狀爲何？

12. 設S爲R的子集，滿足(i) $1\notin S$，$2\in S$，$3\in S$ (ii)若$a\in S$

則$\dfrac{1}{1-a}\in S$二性質，則S中至少含有六個元素，寫出這六個元素。

【練習題 1.解答】 1. Ⓑ 2. Ⓒ 6. (1)Ⓐ(2)Ⓒ 7. (1)Ⓐ(2)Ⓓ 11. 等腰直角三角形
12. 2，-1，$\frac{1}{2}$，3，$-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$

2.間接證法(反證法)──先否定結論

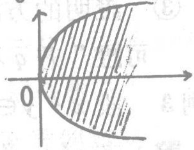


● 坐標平面上的幾何圖形

(1)　$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$的圖形為一圓。

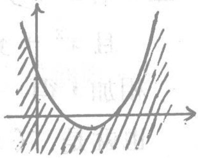
$(x-h)^2+(y-k)^2<r^2$表圓的內部。

$(x-h)^2+(y-k)^2>r^2$表圓的外部。



(2)　$y^2<4x$ 的圖形 ⟶

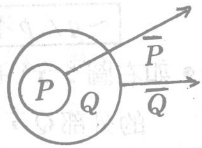
$y<x^2-3x+2$ 的圖形 ⟶



型態 I.

① 集合的觀點：$P\subset Q \Longleftrightarrow \overline{Q}\subset\overline{P}$

② 邏輯的觀點：$p\Rightarrow q\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$



③ 證明的方法：欲證“若 p 成立，則 q 成立”

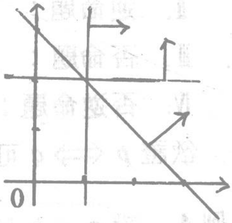
可證“若 q 不成立，則 p 不成立”

例 1　設 x，$y\in R$，$x+y>3$，則 $x>1$ 或 $y>2$

證：若“ $x>1$ 或 $y>2$ ”不成立，也就是 $x\leq1$ 且 $y\leq2$

則　$x+y\leq3$，假設不成立。 $\boxed{\sim q\Rightarrow\sim p}$

$\therefore$　若 $x+y>3$，則 $x>1$ 或 $y>2$



型態 II.

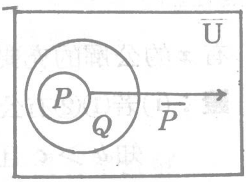
① 集合的觀點：$P\subset Q \Longleftrightarrow \overline{P}\cup Q=U$

② 邏輯的觀點：$p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

據此　$p\vee q\equiv\sim p\Rightarrow q$

③ 證明的方法：欲證“ $p\vee q$ ”成立

可證“若 p 不成立，則 q 成立”



例 2　用上述方法，證明例 1

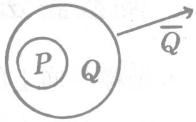
證：已知 $x+y>3$，若“ $x>1$ ”不成立，也就是 $x\leq1$，

則 $y>3-x\geq2$， $\boxed{\sim p\Rightarrow q}$ $\therefore$“ $x>1$ 或 $y>2$ ”成立。

型態Ⅲ.

① 集合的觀點：$P\subset Q \Longleftrightarrow P\cap \overline{Q}=\phi$

② 邏輯的觀點：$p\Rightarrow q \equiv (p\wedge \sim q)$不成立。



③ 證明的方法：欲證"若p成立，則q成立"

可證"若q不成立且p成立"則為不合理。

例3 設x，$y\in R$，若$x^2+y^2<1$，則$x^2+y^2-4x+3>0$

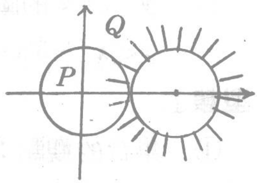
證：若$x^2+y^2-4x+3\leq 0$（$\sim q$）

且$x^2+y^2<1$ （p）

相加，得 $2x^2+2y^2-4x+2<0$

也就是 $(x-1)^2+y^2+1<0$（不合理）

$\boxed{\sim q\wedge p\text{不成立}}$ ∴本題得證。



● 如右圖：$x^2+y^2<1$表一圓的內部P，$(x-2)^2+y^2>1$表一圓的外部Q，因$P\subset Q$，本題得證。

命題的四種形式

Ⅰ. 原命題： $p\Rightarrow q$

Ⅱ. 逆命題： $q\Rightarrow p$

Ⅲ. 否命題： $\sim p\Rightarrow \sim q$

Ⅳ. 否逆命題：$\sim q\Rightarrow \sim p$

$\begin{cases}\text{原命題}\equiv\text{否逆命題}\\ p\Rightarrow q\equiv \sim q\Rightarrow \sim p\end{cases}$

$\begin{cases}\text{逆命題}\equiv\text{否命題}\\ q\Rightarrow p\equiv \sim p\Rightarrow \sim q\end{cases}$

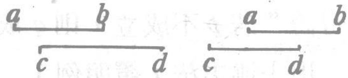
欲證$p\Longleftrightarrow q$可證$p\Rightarrow q$及$\sim p\Rightarrow \sim q$兩者均成立。

例4 設$a<b$且$c<d$，求$\begin{cases}a<x<b\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ c<x<d\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$

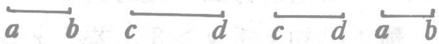
有x的公解的充要條件。

證：(i)若①②有公解，如右圖

知$b>c$且$d>a$



(ii)若①②無公解，如右圖



知$b\leq c$或$d\leq a$ ∴$b>c$且$d>a$為所求的充要條件。

練習題 2

1. 設 a，$b \in Q$，$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$，求證(1) $a = 0$　(2) $b = 0$

2. 求證　(1)若 $n \in Z$，則"n 爲奇數"$\Longleftrightarrow$"n^2 爲奇數"

(2)若 x，$y \in N$ 且 $x^2 - 4y = 1$，則 x 爲奇數，y 爲偶數。

(3)若 a，b，c，$d \in Z$，

則　$S = |a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$ 爲偶數。

3. 設集合 $M = \{ m^2 + 3n^2 | m，n \in Z \}$，求證

(1) $7 \in M$，$10 \notin M$　(2)若 x，$y \in M$，則 $xy \in M$

4. 求證　(1)若 α，β，γ 爲 $x^3 + px^2 + qx + t = 0$ 的三根，

則　$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -t$

(2)設 a，b，$c \in R$ 且 $ab + bc + ca = 1$，則 $a + b + c \neq abc$

5. 設 a，b，$c \in N$ 且其中任意二數互質，若 $a^2 + b^2 = c^2$，求證

(1) a，b 中有一奇數及一偶數。

(2) a，b 中至少有一數爲 3 的倍數。

(3) a，b 中至少有一數爲 4 的倍數。

(4) a，b，c 中至少有一數爲 5 的倍數。

6. (1) $n \in N$ 時，n^2 被 7 除得的餘數可爲＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)設 a，$b \in N$ 且 $a^2 + b^2$ 爲 7 的倍數，求證 a，b 均爲 7 的倍數。

7. 對於自然數 n，若 $2^n - 1$ 爲質數，求證 n 必爲質數。

8. 若聯立不等式 $\begin{cases} 2x^2 - 4nx + x + 2n - 1 < 0 \\ x^2 - nx < 0 \end{cases}$ 沒有整數解

則自然數 $n =$＿＿＿＿＿＿＿＿

9. 設 x，$y \in R$，$0 < xy < 1$，$0 < x + y < 1 + x^2y^2$

求證　$0 < x < 1$ 且 $0 < y < 1$

10. (1)若 $|x-1|<a$ 為 $0<x<2$ 的充分條件，則 a 的範圍為______

(2)若 $|x|+|y|\leq a$ 為 $x^2+y^2\leq 1$ 的必要條件，則 a 的範圍為______

(3)若 $|ax+b|<1$ 為 $-2<x<4$ 的充要條件，則 $a=$___，$b=$____

11. 設 x，$y\in R$，三命題 p，q，r 如下所示：

$p:|x+y|\geq a$ $q:|x-y|\geq a$ $r:x^2+y^2\geq 1$

(1)若 $p\wedge q\Rightarrow r$，則 a 的範圍為__________

(2)若 $p\vee q\Rightarrow r$，則 a 的範圍為__________

(3)若 $r\Rightarrow p\vee q$，則 a 的範圍為__________

12. 設 a，$b\in R$，則 (1) $a+b<1$ 為 $x^2-ax-b=0$ 有虛根的_____條件。

(2) $a^2+b<0$ 為 $x^2-ax-b=0$ 有虛根的_____條件。

13. 設 x，$y\in R$，若 $x^2+y^2+6x-8y\leq 39$，求證 $x^2+y^2\leq 169$

14. 設 x，$y\in R$，若命題"$x^2+y^2+y\leq 0\Rightarrow x+y+a\leq 0$"成立。

則 a 的最大值為__________

15. 坐標平面上的任一直線和坐標平面上的所有的格子點（x 坐標，y 坐標皆為整數的點）可能有_______個交點。

16. 下列命題中那些為真？

Ⓐ若複數 x，y，z 滿足 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=0$，

則 $x=y=z=0$

Ⓑ若實數 x，y，z 滿足 $x+y+z=3$，$x^2+y^2+z^2=3$，

則 $x=y=z=1$

Ⓒ若實數 x，y，z 滿足 $x+y+z=3$，$x\leq 1$，$y\leq 1$，$z\leq 1$，

則 $x=y=z=1$

Ⓓ $\cos^{69}x+\cos^{1980}6x+\cos^{365}7x=3$ 在 $[-3\pi, 3\pi]$ 內有 3 個解。

【練習題 2.解答】 6.(1) 0，1，2，4 8. 1 10.(1) $a\leq 1$ (2) $a\geq\sqrt{2}$ (3) $a=\pm 1/3$，$b=\mp 1/3$ 11.(1) $a\geq 1$ (2) $a\geq\sqrt{2}$ (3) $a\leq 1$ 12.(1)必要 (2)充分 14. $(1-\sqrt{2})/2$ 15. 0，1，∞ 16.ⒷⒸⒹ

3. 數學歸納法

I. ①歸納法原理：設 $S \subset N$，具下列二性質，則 $S = N$

(i) $1 \in S$ (ii) 若 $k \in S$，則 $k+1 \in S$

證：由(i) $1 \in S \xrightarrow{\text{由(ii)}} 2 \in S \xrightarrow{\text{由(ii)}} 3 \in S \longrightarrow \cdots\cdots$

②數學歸納法：欲證 $\forall n \in N$，命題成立，可

(i)第一步：先檢查一下，$n = 1$（或最初數）時命題是對的。

(ii)第二步：假定 $n = k$ 時命題是對的，據此證明

$n = k+1$ 時命題亦是對的。

例 1 求證 $\forall n \in N$，(1) $1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \dfrac{1}{2} n(n+1)$

(2) $(1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots\cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots\cdots + n^7)$

$= 2(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n)^4$

證：(1)(i) $n = 1$ 時，左 $= 1$，右 $= \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$，左 $=$ 右，

等式成立。

(ii)設 $n = k$ 時等式成立，即 $1 + 2 + \cdots\cdots + k = \dfrac{1}{2} k(k+1)$

則 $n = k+1$ 時，左 $= 1 + 2 + \cdots\cdots + k + (k+1)$

$= \dfrac{1}{2} k(k+1) + (k+1)$

$= \dfrac{1}{2} k(k+1)(k+2) =$ 右

$\therefore n = k+1$ 時等式亦成立，由數學歸納法得證。

(2)證明 $(1^5 + \cdots\cdots + n^5) + (1^7 + \cdots + n^7) = \dfrac{1}{8} n^4 (n+1)^4$ 即可

(i) $n=1$ 時，$1^5+1^7=\frac{1}{8}\cdot 1^4\cdot 2^4$ $\therefore$ 等式成立

(ii)設 $(1^5+\cdots+k^5)+(1^7+\cdots+k^7)=\frac{1}{8}k^4(k+1)^4$

則 $n=k+1$ 時，左 $=\{1^5+\cdots+k^5+(k+1)^5\}+\{1^7+\cdots+k^7+(k+1)^7\}$

$=\frac{1}{8}k^4(k+1)^4+(k+1)^5+(k+1)^7$

$=\frac{1}{8}(k+1)^4\{k^4+8(k+1)+8(k+1)^3\}$

$=\frac{1}{8}(k+1)^4(k^4+8k^3+24k^2+32k+16)$

$=\frac{1}{8}(k+1)^4(k+2)^4$

$\therefore n=k+1$ 時等式成立，得證。

例 2 求證 $\forall n\in N$

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$

$=-n(2n+1)$

證：(i) $n=1$ 時，$1^2-2^2=-1\cdot 3$ $\therefore$ 等式成立。

(ii)設 $1^2-2^2+\cdots\cdots-(2k)^2=-k(2k+1)$

則 $n=k+1$ 時，左 $=1^2\cdots\cdots-(2k)^2+(2k+1)^2-(2k+2)^2$

$=-k(2k+1)+(2k+1)^2-(2k+2)^2$

$=-2k^2-5k-3$

$=-(k+1)(2k+3)$

$=-(k+1)\{2(k+1)+1\}=$ 右

$\therefore n=k+1$ 時等式成立，得證。

例 3　設 $n \in N$，$n > 1$，求證

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

證：(i) $n=2$ 時，$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\frac{1+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

∴不等式成立

(ii)設 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$　（$k>1$），

兩邊加 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

得 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

（欲證 $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$）

$$\because \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}=\frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2}}{\sqrt{k+1}}>0$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

∴ $n=k+1$ 時不等式成立，得證。

Ⅱ. 相減證法：

欲證 $\forall n \in N$，$f(n)$ 恆爲 r 的倍數，可證

(i) $f(1)$ 爲 r 的倍數，(ii) $f(k+1)-f(k)$ 恆爲 r 的倍數。

說明：若“ $f(k+1)-f(k)$ 爲 r 的倍數”已經成立，

令 $f(k+1)-f(k)=rq$　（$q \in N$），

則由 $f(k+1)=f(k)+rq$ 知

當 $f(k)$ 爲 r 的倍數時，$f(k+1)$ 必爲 r 的倍數。

例 4　求證 $\forall n\in N$，$f(n)=10^n+3\cdot 4^{n+2}+5$ 恆爲 9 的倍數。

證：(i) $f(1)=10+3\cdot 4^3+5=207$ 爲 9 的倍數。

(ii) 設 $f(k)=10^k+3\cdot 4^{k+2}+5=9q$（9 的倍數）

則 $f(k+1)=10^{k+1}+3\cdot 4^{k+3}+5$

$=10(10^k+3\cdot 4^{k+2}+5)$

$-30\cdot 4^{k+2}-50+3\cdot 4^{k+3}+5=10f(k)-18\cdot 4^{k+2}-45$

$=9(10q-2\cdot 4^{k+2}-5)$

$\therefore f(k+1)$ 爲 9 的倍數，得證。

本例題可用相減證法證明 (ii) 如下：

(ii)

$$\begin{array}{rcl} & f(k+1) = & 10^{k+1}+3\cdot 4^{k+3}+5 \\ -) & f(k) = & 10^k+3\cdot 4^{k+2}+5 \\ \hline f(k+1)-f(k) & = & 9\cdot 10^k+3(4-1)\cdot 4^{k+2} \\ & = & 9(10^k+4^{k+2}) \end{array}$$

$\therefore$ 若 $f(k)$ 爲 9 的倍數，則 $f(k+1)$ 亦爲 9 的倍數。

Ⅲ. 數學歸納法的推廣：

欲證 $\forall n\in N$，命題成立，可

(i) 先檢查一下，$n=1$ 及 $n=2$ 時命題是對的。

(ii) 假定 $n=k$ 及 $n=k+1$ 時命題是對的，據此證明 $n=k+2$ 時命題亦是對的。

例 5　求證 $\forall n\in N$，$f(n)=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 爲 2^n 的倍數

證：令 $a=3+\sqrt{5}$，$b=3-\sqrt{5}$，則 $a+b=6$，$ab=4$

$f(n)=a^n+b^n$　(i) $f(1)=a+b=6$，

$\therefore f(1)$ 爲 2^1 的倍數，

$f(2)=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=36-8=28$，

$\therefore f(2)$ 爲 2^2 的倍數。

(ii)設 $f(k)=a^k+b^k=2^k\cdot p$，

$f(k+1)=a^{k+1}+b^{k+1}=2^{k+1}\cdot q$

則 $f(k+2)=a^{k+2}+b^{k+2}$

$=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)$

$=6f(k+1)-4f(k)$

$=6\cdot 2^{k+1}q-4\cdot 2^k p=2^{k+2}(3q-p)$

$\therefore f(k+2)$ 爲 2^{k+2} 的倍數，得證。

練習題 3

用數學歸納法證明下列各題：($n\in N$)

1. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

3. $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$

4. $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$ ($n>1$)

5. $3^n>n^3$ ($n\geq 4$)

6. $2^{3n+3}-7n+41$ 爲 49 的倍數

7. $(3n+1)\cdot 7^n-1$ 爲 9 的倍數

8. $3^{2n+1}+2^{n+2}$ 爲 7 的倍數

9. $\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}\geq mn+1$ (m，$n\in N$)

10. 設 α，β 爲二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根，

試證 $\forall n \in N$，$\alpha^n + \beta^n$ 恆可表爲 a，b，c 的有理式。

11. $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$　（ $a > 0$，$b > 0$ ）

12. $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$　（ $n \geq 3$ ）

二、集合與邏輯

1.集合定律

① 交換律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

② 結合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

③ 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

④ 排中律：$A \cup \overline{A} = U$

⑤ 矛盾律：$A \cap \overline{A} = \phi$

⑥ 補　集：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

⑦ 差　集：$A - B = \{ x \mid x \in A$ 且 $x \notin B \} = A \cap \overline{B}$

⑧ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

證：$A - (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$

$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A - B) \cap (A - C)$

同法可證：$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

⑨ 冪　集：$2^A = \{ X \mid X \subset A \}$

⑩ 積　集：$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$

$A^2 = A \times A$

例 1　$\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B = C$

證法一：（先證 $B \subset C$ ），設 $x \in B$ （欲證 $x \in C$ ）