现代数学译丛 18

变分分析与广义微分
I: 基础理论

〔美〕 Boris S.Mordukhovich 著

赵亚莉 王炳武 钱伟懿 译

科学出版社

现代数学译丛 18

变分分析与广义微分
I：基础理论

〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著
赵亚莉　王炳武　钱伟懿　译

科 学 出 版 社
北 京

译 者 序

《变分分析与广义微分》是现代变分分析创始人之一的美国州立 Wayne 大学 Boris S. Mordukhovich 教授的最新专著, 涵盖了无穷维空间中变分分析的最新成果及其应用. 国际上许多知名学者都对该著作作出了高度的评价. 原著分两卷, 上卷主要是无穷维变分分析的基础理论, 下卷则主要侧重各方面的应用. 这里翻译的是上卷.

2008 年上半年, 第一译者有幸到东密歇根大学访学, 师从东密歇根大学数学系的王炳武教授, 即本书的第二译者. 王炳武教授是 Mordukhovich 教授的学生, 本书包含了很多他与 Mordukhovich 教授合作的成果. 第一译者在大连理工大学攻读博士学位的时候学习了 Rockafellar 和 Wets 的 *Variational Analysis* (该书主要讲述有限维空间中的内容), 因此到美国访问接触到 Mordukhovich 教授这本书的时候就立刻产生了浓厚的兴趣, 也特别想将本书介绍给国内的读者. 这个想法得到了王炳武教授的支持并亲自参与到翻译工作中来.

该书翻译的具体分工为: 赵亚莉翻译第 1 章和第 3 章; 王炳武负责前言、第 2 章和第 4 章; 钱伟懿参与了各章的综合和协调工作. 承蒙美国 Fayetteville 州立大学的王东教授校对了第 1 章的 1~60 页、第 2 章和第 4 章; 第 1 章的剩余部分和第 3 章由王炳武校对. 在此, 对他们一丝不苟的工作态度和辛勤付出表示感谢!

译者感谢渤海大学对本书翻译工作的大力支持. 其中特别感谢数理学院副院长李春教授的帮助. 本书的翻译也得到 Mordukhovich 教授的支持和鼓励, 在此一并致谢.

希望本译著的出版能帮助更多的读者了解国际变分分析领域, 特别是无穷维空间理论的最新进展, 对我国的变分分析及其相关领域的研究和发展有所裨益. 由于时间仓促及译者水平有限, 错误或不当之处在所难免, 恳请读者批评指正.

译 者
2011 年 4 月 10 日

前　言

这就是说，因为整个宇宙的形式是如此之完美，事实上由最睿智之造物主所创，世上没有任何事情之生发不为极大极小原理的光芒所指引.

Leonhard Euler (1744)

Euler[411] ("...nihil omnino in mundo contingent, in quo non maximai minimive ratio quapiam eluceat") 的这个鲜明观点可作为"变分分析"的最基本原理. 在解决数学和应用科学中的一些本不具有变分特性的问题中，优化和变分方法有各种引人注目的应用，该原理给出了理论的依据. 众所周知，优化曾是微分积分发展的主要动力. 事实上，Fermat 通过函数图像的切线斜率而引入的导数概念就是为了解决一个优化问题，这导出了现在所谓的"Fermat 驻点原理". Fermat 的这个原理除在优化中的应用以外，还在微积分最重要的一些结果的证明中举足轻重，这包括中值定理、隐函数和逆函数定理等. 这样的发展脉络在无限维的情形也可以看到，其中最速降线问题不仅是变分法的第一个问题，也同样是整个泛函分析的起点. 特别地，它催生了无限维空间中的微分及相关领域的各种新概念.

现代变分分析可看为变分法和数学规划的拓展，它致力于在各种约束下的函数优化以及优化相关问题对于扰动的灵敏性和稳定性. 像离给定点或曲线的位移这样的经典概念已不再紧要，而问题的逼近或扰动成了关键.

现代变分分析最具代表性的特征之一是其内蕴的非光滑性，也就是说，必须处理不可微函数，具有非光滑边界的集合和集值映射. 而这种非光滑性是自然而然产生的，它并不仅仅源于优化相关问题 (特别是具有不等式和几何约束的那些) 的初始数据，更多的来自应用于问题的变分原理及其他优化、逼近和扰动等技术，而这些问题的数据却可以是光滑的. 事实上，变分分析框架中经常出现的许多基本概念 (比如距离函数、优化控制中的值函数、极大极小函数、扰动约束和变分系统的解映射等) 都不可避免地是非光滑或是集值的，这就需要发展涉及"广义微分"的新型分析.

要重点强调的是，最优控制问题即便是最简单或是最早期的，也与经典的变分法不同，它们本质上是非光滑的. 这主要是因为控制函数所具有的逐点约束，它经常只取离散的值，比如自动控制中的一些典型问题，而这些问题是最优控制的一个基本动力. 对变分分析和广义微分的高级方法而言，最优控制一直是主要的动力源泉和卓有成效的应用领域.

有限维空间中变分分析的要义在 Rockafellar 与 Wets 的书 *Variational Analysis* 中已经得到论述, 但无限维变分分析的应用及发展中所需要的某些概念和工具在有限维理论中是找不到的. 本书的基本目标就是阐明变分分析在有限维和无限维的统一框架下的基本概念和原理, 发展一套与有限维情形同样完美的广义微分的详尽理论, 并提供变分理论在很多领域中广泛而有意义的应用, 这些领域包括约束优化与均衡、灵敏性与稳定性分析、常微分方程、泛函微分方程、偏微分方程的控制理论, 某些选题涉及了力学与经济模型.

变分分析及其应用的核心是广义微分理论. 本书利用对偶空间几何方法, 系统地建立了一套广义微分理论. 它是围绕着 "极点原理" 展开的, 该原理可以看做经典的凸集分离定理在非凸情形的局部变分对应版本, 它能够处理非凸的集合、集值映射和增广实值函数的类导数结构 (分别是法锥、上导数和次微分). 这些结构是直接在对偶空间中定义的. 因其取值是非凸的, 它们不能由原空间中的类导数结构 (比如切锥和方向导数) 生成. 但是, 基本非凸结构却享有详尽的分析法则, 并远远优于其在原空间中的或凸值的类似结构. 与原空间中的结构相比, 在对偶空间中能促成更多的和谐与美. 从某种意义上讲, 对上面引用的 Euler 基本观念中的完美性, 对偶观点事实上的确达到了这一要求.

在此方向可看到, 对偶结构 (乘子、伴随弧线、影子价格等) 一直就是变分理论及其应用的核心, 特别是在变分法、数学规划、最优控制和经济模型等主要最优条件的表述中. 在原空间中使用最优解的变分只能看做是推导必要最优条件的一个捷径, 这是因为, 在凸和光滑的情形, 原空间中或对偶空间中的类导数结构是等价的, 所以 "原空间" 方法并不会受到限制. 在现代变分分析中就不一样了, 因为即使在原空间中使用非凸的局部逼近 (比如切锥), 通过对偶而得到的法锥和次微分也不可避免地是凸的. 对偶结构的这种凸性在理论和应用上都导致很大的限制. 进一步, 有很多情形, 特别是本书中要指出的那些, 原空间逼近方法在变分分析中根本用不上, 而利用对偶结构却可得到完备的结果. 当然, 切向生成的或原空间中的结构在变分分析的其他方面还是有重要作用的, 特别是在有限维的情形, 可以通过在所研究的点附近取极限而重建这些非凸的对偶结构. 作为例子, 请见前面提到的 Rockafellar 与 Wets 的书 [1165].

在本书所录的文献中, 特别建议读者参考如下专著: Aubin 与 Frankowska[54], Bardi 与 Capuzzo Dolcetta[85], Beer[92], Bonnans 与 Shapiro[133], Clarke[255], Clarke, Ledyaev, Stern 与 Wolenski[265], Facchinei 与 Pang[424], Klatte 与 Kummer[686], Vinter[1289]. 这个领域发展很快, 对本书中未考虑的变分分析的一些重要方面及应用, 请参阅每章最后给出的评注. 特别强调同时出版的具有互补性的 Borwein 与 Zhu 的专著 [164], *Techniques of Variational Analysis*, 它介绍了本书中没有的一些现代变分分析的基本技巧, 囊括了一些重要的理论和应用.

放在读者面前的这本书是自成一体的, 主要集中了尚未见载于专著中的结果, 共两卷八章, 然后每章分成节和小节. 每章都给出了详尽的评注 (这在本书中扮演着一个特别的角色, 其中讨论了基本思想、历史、源动力、各种关系、名词选取、未解决问题等). 给出并讨论了很多关于变分分析各个方面 (本书论及或未论及的) 的文献, 包括最初的贡献和近期的发展. 尽管没有正式的练习题, 大量的注释和例子提供了进一步思考和发展的题材. 主要结果的证明是完整的, 但也预留了一些空间, 以补足细节, 研究特例及导出一些推广, 这时书中经常会给出一些提示.

第一卷"基本理论"包括 4 章, 主要涵盖广义微分的基本结构、基本的极点原理和变分原理、完备的广义微分法则以及非线性分析基本性质的完整对偶刻画及其在约束与变分系统灵敏性分析上的应用, 这些性质相关于 Lipschitz 稳定性和度量正则性.

第 1 章讨论一般 Banach 空间中的广义微分理论. 基本法锥、次微分和上导数是在对偶空间中直接定义的, 这涉及更原始的 Fréchet 类型的 ε- 法向量和 ε- 次微分并求弱* 极限而得到. 该章指出了这些结构在 Banach 空间中的各种优良特性, 此处使用 ε- 法锥是很关键的. 这些性质 (包括一阶与二阶微分法则、有效表示、变分描述、距离函数的次导数微分法、Lipschitz 稳定性和度量正则性的上导数必要条件等) 大多收在本章. 这里也定义了并开始研究所谓的"序列法紧性"(SNC), 它是集合、集值映射和增广实值函数的性质, 在有限维空间中是自动成立的, 但却是无限维空间变分分析及其应用的要素之一.

第 2 章细致研究了变分分析中的"极点原理", 它是本书的主要工具. 这里首先利用"度量逼近"方法通过一个光滑罚函数过程给出了有限维空间中极点原理的直接变分证明. 接着用无限维空间中的变分技巧在具有光滑 Fréchet 范数的 Banach 空间中证明了它, 然后利用可分约化, 将其推广到 Asplund 空间. Asplund 空间在 Banach 空间几何理论中有很细致的研究, 它包括所有的自反空间, 以及具有可分对偶的空间. 这种空间对本书中发展的变分分析理论和应用起着显著的作用. 在这章中, 还建立了 (几何) 极点原理和 (解析) 变分原理的关系, 这包括传统的形式和改进的形式. 应用所得结果, 给出了 Asplund 空间的一些新的变分刻画和基本广义微分结构在 Asplund 空间中一些类似于有限维空间中的有用表示. 最后, 这一章还讨论了恰当 Banach 空间上极点原理的抽象版本, 它由以公理定义的法锥和次微分结构给出. 对一些特殊的结构, 还简要给出了更多的细节.

第 3 章是本书中建立的广义微分理论的基石, 它涵盖了 Asplund 空间中基本法锥、次导数和上导数的完备分析法则. 该章把主要精力放在了在所考虑点极限结构的点基法则, 这既体现在假设中, 也体现在结论中. 这是因为, 点基结果在应用中是至关重要的. 本章中给出的有些结果在有限维中似乎也是新的, 而整体上这些结果在 Asplund 空间中达到了与有限维空间一样的完美和广泛. 区分有限维和无限

维的要点在于在无限维空间中需要足够的紧性, 这在有限维空间中是不需要的. 这里所需的紧性由前面提到的 SNC 性质提供, 这包括在这些微分法则的假设中, 同时也提出了在集合和映射各种运算下 SNC 性质本身分析法则的需求. 这种 SNC 分析法则的缺失是广义微分理论在无限维空间中成功应用的主要羁绊, 这些无限维应用问题包括本书中的优化、稳定性和最优控制. 本章中包括了对这些应用具有决定性意义的广泛的 SNC 法则.

第 4 章详尽研究了集值映射的 Lipschitz 性质、度量正则性和线性开放性/覆盖性, 及其在参数约束和变分系统灵敏性上的应用. 首先证明了基于前面建立的变分原理和广义微分理论, 在第 1 章中给出的这些基本性质在一般 Banach 空间中的那些必要上导数条件, 在 Asplund 空间中就成了这些性质的完整刻画. 进一步, 由变分方法得到计算相应模的可验证的确切公式. 接下来, 在广义微分法则和 SNC 法则的支持下, 提供了这些结果在参数约束和变分系统灵敏性与稳定性上的应用, 这些系统由可行解和最优解的扰动集合给出, 而这些解源于优化与均衡、隐函数、互补条件、变分和半变分不等式等问题以及一些力学系统.

第二卷“应用”也包括 4 章, 主要研讨变分分析基本原理与发展的广义微分理论在许多方面的应用, 这包括约束优化与均衡、常微和分布参数系统的最优控制、福利经济模型等.

第 5 章涉及约束优化和均衡问题, 这里初始数据可能是非光滑的. 即使初始数据是光滑的, 基于极点原理/变分原理与广义微分理论的变分分析的先进方法对约束问题也是非常有用的, 这是因为在应用罚函数、逼近和扰动技术时, 非光滑性会自然而然地产生. 这里的基本目标是, 在有限维和无限维空间中, 对各种类型约束问题导出必要最优和次最优条件. 值得注意的是, 后面的这种次最优条件并不需要假设最优解的存在性 (这在无限维空间中有特别重要的意义), 但保证了“几乎”最优的解“几乎”满足必要最优条件. 这种条件的意义在最优化中似乎被低估了. 除了考虑通常类型的约束问题, 该章还认真研究了一类相当新的问题, 即均衡约束数学问题 (MPEC) 与均衡约束均衡问题 (EPEC), 这些问题具有内蕴的非光滑性, 由广义微分理论可以给出完整的分析. 最后, 该章表述了某些线性次极点和线性次最优的概念, 使得上面以通常概念导出的必要最优条件在新的情形变成了充分必要的.

第 6 章开始研究“动态最优化”和“最优控制”. 正如前面提到的, 这是建立新式变分分析的主要动力之一. 这章主要处理由常微分动力系统控制的最优控制问题, 其状态空间可能是无限维的. 本章的第一部分主要致力于由约束“微分包含”控制的发展系统的 Bolza 类型问题. 这样的模型包括了更常见的由参数发展方程控制的控制系统, 其中的控制区域一般来说依赖于状态变量. 后者不允许使用控制变分来导出必要最优条件. 该章建立了“离散逼近方法”, 它显然在数值分析上有意义, 但在本书中主要是用作一个直接的工具来导出连续时间系统的最优条件, 这

是通过把离散时间量取极限而得到的. 用这个办法, 很强地基于广义微分理论和 SNC 分析法则, 得到了无穷维空间上非凸微分包含的必要最优条件, 这些条件有一般 Euler-Lagrange 的形式, 并由基本微分结构给出.

第 6 章第二部分处理一般 Banach 空间中的约束最优控制系统, 它由光滑动力学的常微分发展方程所控. 与上述微分包含相比, 这类问题具有本质上不同的性质. 本章中两个部分得到的结果 (和所用的方法) 一般来说是独立的. 这里的另一条主线涉及到非凸控制系统极大原理在离散逼近下的稳定性. 这里建立的"近似极大原理"是一个有点令人惊讶的结果, 它对连续时间和离散时间控制系统的关系, 包括定量的与定性的, 都有积极的意义.

第 7 章继续研究变分分析先进方法在最优控制问题上的应用, 这里考虑的系统是分布参数的. 该章首先考察了一类一般的"遗传系统", 其动态约束由延滞微分包含和线性代数方程描述. 一方面, 这类控制系统很有意思且尚无太多的研究, 它可以看做"中性泛函微分包含"变分问题的一个特例, 其中包含系统的时滞不仅存在于状态变量, 也存在于速度变量. 另一方面, 这类系统相关于这样的微分代数系统, 其"慢"和"快"变量之间有线性联系. 利用离散逼近方法和广义微分理论的基本工具, 这里建立了离散逼近的一个强变分收敛性/稳定性, 并导出了连续时间系统广泛的最优条件, 其中包括 Euler-Lagrange 形式和 Hamilton 形式.

第 7 章余下的部分研究了"偏微分方程"控制的最优控制问题, 它具有逐点的控制和状态变量. 这里把主要的注意力放在由"抛物"和"双曲"方程描述的发展系统, 其控制函数作用于 Dirichlet 和 Neumann 边界条件. 这样的"边界控制"问题在 PDE 最优控制中是最有挑战性和最少被研究的, 特别是具有逐点状态约束的情形. 该章利用现代变分分析的近似和扰动方法, 证明了变分收敛性并导出了这样的 PDE 系统各种控制问题的必要最优条件, 其中包括特定摄动下的极大极小控制.

本书最后的第 8 章是关于变分分析在"经济模型"中的应用的. 这里的主要课题是"福利经济学", 所考虑的是一般的非凸情形, 并具有无限维的商品空间. 这类重要的竞争均衡问题得到了经济学家和数学家的重视, 特别是最近, 实际应用中非凸性变得越来越关键. 本书中发展的变分分析方法, 特别是极点原理, 为这种模型中的 Pareto 最优分配和相关联的价格均衡提供了足够的研究工具. 这里由变分分析和广义微分这些工具推导出所谓的"福利经济的第二基本定理"在非凸情形很广泛的扩展, 它以非凸集合广义法向量的极小组合描述了边际均衡价格. 特别地, 该章的方法和广义法向量的变分刻画给出了市场均衡的新经济解释, 这用到了"非线性边际价格", 其在非凸模型中的角色类似于凸模型中通常 Arrow-Debreu 类型的线性价格.

本书包含一个记号表, 这对两卷是一样的, 对每一卷还有一个详尽的名词索引. 由此索引, 读者不但可以找到该概念/记号在书中首次出现的页码, 也能找出其在

书中各处的进一步讨论及应用.

另外, 书中所有的陈述 (包括定义、定理、引理、命题、推论、例子和注解) 都加了题目. 这些陈述在每一章中按顺序加了序号, 比如在第 5 章中, 例 5.3.3 在定理 5.3.4 前面, 该定理后面则是推论 5.3.5. 为方便读者, 所有这些陈述以及加了序号的注释都罗列在每卷后面的陈述表里. 值得一提的是, 缩略词 (依字母序) 也列在名词索引里. 对所用的记号, 书中一般的原则是以小写希腊字母表示数和 (增广) 实值函数, 以小写拉丁字母表示向量和单值映射, 以大写希腊和拉丁字母表示集合和集值映射.

本书的记号和术语大体上和 Rockafellar 与 Wets 的书 [1165] 中的是一样的. 在全书中都尽量区分概念是定义“在”一个点和一个点“附近”, 后者显示了对扰动的鲁棒性/稳定性, 这在本书中的大部分主要结果是很关键的.

本书附录了丰富的文献 (如果可能都是英文的), 这在上下卷里是一样的. 所录文献反映了各种研究课题和许多研究人员的贡献. 这些文献或多或少主要是在每章的评注里讨论的. 读者可以根据作者的评注在文献中找到更多的信息.

本书主要面向数学科学的研究人员和研究生, 这首先包括那些对如下领域感兴趣的: 非线性分析、最优化、均衡理论、控制论、泛函分析、常/偏微分方程、泛函微分方程、连续介质力学和数理经济. 作者也期望本书会对涉及变分分析的研究及应用的更广泛的研究人员、实际应用者、研究生有用, 相关领域可能包括运筹、统计、力学、工程、经济和其他应用科学.

书中的某些部分已被作者用于 Wayne 州立大学的变分分析、最优化和最优控制等研究生课程. 书里的基本材料也曾被集成到最近几年作者在许多学校和学术会议所作的讲座里.

致 谢

首先感谢 Terry Rockafellar, 他多年来一直鼓励我写这样一本书, 并在写作过程的每个时期都给予了建议和支持.

特别感谢 Rafail Gabasov, 我的博士论文导师, 我从他那里学到了最优控制和更多其他知识; 感谢 Alec Ioffe, Boris Plyak 和 Vladimir Tikhomirov, 他们发现了我起初在非光滑分析和优化上的工作并给予了有力的支持; 感谢 Sasha Kruger, 我的第一个研究生和合作者, 我们从那时开始了令人振奋的广义微分之旅; 感谢 Jon Borwein 和 Marián Fabian, 从他们那里学到了泛函分析的高深理论和 Asplund 空间美妙; 感谢 Ali Khan, 他令人鼓舞的工作和热情促进了笔者在经济模型理论上的研究; 感谢 Jiři Outrata, 他的推动和影响使我在均衡和力学问题的兴趣与日俱增, 他并满怀热情地把本书中的广义微分结构具体用于最优化及应用的各个领域; 感谢 Jean-Pierre Raymond, 他使我在现代偏微分方程理论上获益匪浅.

在成书过程中, 我很高兴与许多同事和朋友讨论了本书的许多方面和结果. 除了上面提到的以外, 特别感谢 Zvi Artstein, Jim Burke, Tzanko Donchev, Asen Dontchev, Joydeep Dutta, Andrew Eberhard, Ivar Ekeland, Hector Fattorini, René-Henrion, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Alejandro Jofré, Abderrahim Jourani, Michal Koćvara, Irena Lasiecha, Claude Lemaréchal, Adam Levy, Adrian Lewis, Kazik Malanowski, Michael Overton, Jong-Shi Pang, Teemu Pennanen, Steve Robinson, Alex Rubinov, Andrzej Świech, Michel Théra, Lionel Thibault, Jay Treiman, Hector Sussmann, Roberto Triggiani, Richard Vinter, Nguyen Dong Yen, George Yin, Jack Warga, Roger Wets 和 Jim Zhu, 感谢他们在成书的这些年中的有价值的建议和卓有成效的交流.

衷心感谢国家科学基金 (NSF) 对笔者研究工作的持续支持.

前面提到, 书中的材料曾被用于讲授变分分析和最优化等高等课程, 参加人员主要包括我的博士生和合作者. 我很感谢他们的贡献, 这特别使我能改进讲义和这本专著. 提供特别帮助的包括: Glenn Malcolm, Nguyen Mau Nam, Yongheng Shao, Ilya Shvartsman 和 Bingwu Wang. 有用的反馈和文字修正也来自 Truong Bao, Wondi Geremew, Pankaj Gupta, Aychi Habte, Kahina Sid Idris, Dong Wang, Lianwen Wang 和 Kaixia Zhang.

我非常感谢 Springer 出版社友好的工作人员, 感谢他们在本书准备和出版过程中的大力支持. 特别的感谢给予数学执行编辑 Catriona Byrne, 应用数学高级编

辑 Achi Dosajh, 助理数学编辑 Stefanie Zoeller 和来自计算机科学编辑部的 Frank Holzwarth.

我感谢我的小女儿 Irina, 感谢她对我的书的兴趣并不厌其烦地回答我在英语上的问题. 我也感谢我的小狮子狗 Wuffy, 感谢它和我分享了长期工作的这些日子. 在所有这些谢意之上, 我无法用足够的话感谢我的妻子 Margaret, 感谢她从我们在 Minsk 高中的日子到现在和我分享的一切.

Boris S. Mordukhovich
Ann Arbor, Michigan
2005 年 8 月

目　录

第1章　Banach 空间中的广义微分

本章定义和研究广义微分的基本概念, 这是本书要讨论的变分分析及其应用的核心. 本章给出的大多数性质在任意 Banach 空间成立 (其中一些性质不要求完备性, 甚至不要求赋范结构, 这一点能从证明中看到). 为了建立广义微分的几何的对偶空间方法, 先从几何的法向量开始 (1.1 节), 接着研究集值映射的上导数 (1.2 节), 最后是增广实值函数的次微分 (1.3 节).

除非特别声明, 本书涉及的空间都是 Banach 空间, 其范数总是记为 $\|\cdot\|$. 对给定空间 X, 用 $\mathbb{B}_X$ 表示它的闭单位球, X^* 表示它装备了弱* 拓扑 w^* 的对偶空间, 这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示典范偶对. 如果不发生混淆, $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{B}^*$ 分别表示所讨论的空间及其对偶空间的闭单位球, 而 S 和 S^* 通常表示相应的单位球面; 而且 $B_r(x) := x + r\mathbb{B}, r > 0$. 符号 * 一般表示与对偶空间的关系 (对偶元素, 伴随算子等等).

在下文中, 经常处理 Banach 空间及其对偶空间之间的集值映射 $F : X \rightrightarrows X^*$, 记号

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x}} F(x) := \{x^* \in X^* \mid \exists\text{序列} x_k \to \bar{x}, x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*, \text{满足} x_k^* \in F(x_k)(\forall k \in \mathbb{N})\} \tag{1.1}$$

表示关于 X 的范数拓扑和 X^* 的弱* 拓扑的序列 Painlevé-Kuratowski 上 / 外极限. 注意符号 := 的意思是“定义为”, $\mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\}$ 表示自然数集.

X 的两个子集 Ω_1 和 Ω_2 的线性组合定义为

$$\alpha_1\Omega_1 + \alpha_2\Omega_2 := \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2\},$$

其中实数 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, 这里依惯例 $\Omega + \varnothing = \varnothing, \alpha\varnothing = \varnothing$(若 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$), $\alpha\varnothing = \{0\}$(若 $\alpha = 0$). 为处理空集, 令 $\inf\varnothing := \infty, \sup\varnothing := -\infty, \|\varnothing\| := \infty$.

1.1　非凸集合的广义法向量

在本节中, Ω 是实 Banach 空间 X 的非空子集. 若 $\Omega \neq X$, 则称为真子集. 在下文中,

$$\operatorname{cl}\Omega, \operatorname{co}\Omega, \operatorname{clco}\Omega, \operatorname{bd}\Omega, \operatorname{int}\Omega$$

分别表示 Ω 的闭包、凸包、闭凸包、边界和内部. Ω 的锥包是

$$\operatorname{cone}\Omega := \{\alpha x \in X \mid \alpha \geqslant 0, x \in \Omega\}.$$

符号 cl* 表示对偶空间中集合的弱* 拓扑闭包.

1.1.1 基本定义和一些性质

下面从构造任意集合的广义法向量开始研究广义微分理论. 为描述集合 Ω 在给定点 $\bar{x}$ 的基本法向量, 将分两步走：首先定义 Ω 在点 $\bar{x}$ 附近的点 x 的 ε- 法向量(预法向量), 这种向量更多且相对“粗糙”一些. 然后对 $x \to \bar{x}$ 和 $\varepsilon \downarrow 0$ 取序列极限 (1.1). 全书中应用记号

$$x \xrightarrow{\Omega} \bar{x} \Longleftrightarrow x \to \bar{x}, \text{ 且 } x \in \Omega.$$

定义 1.1 (广义法向量) 设 Ω 是 X 的非空子集.

(i) 给定 $x \in \Omega$ 和 $\varepsilon \geqslant 0$, 定义 Ω 在 x 的 ε- 法向量的集合为

$$\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) := \left\{ x^* \in X^* \,\middle|\, \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x\rangle}{\|u - x\|} \leqslant \varepsilon \right\}. \tag{1.2}$$

当 ε=0 时, (1.2) 式中的元素称为 Fréchet 法向量, 它们的全体记为 $\widehat{N}(x;\Omega)$, 是 Ω 在 x 的预法锥. 如果 $x \notin \Omega$, 那么对所有 $\varepsilon \geqslant 0$, 令 $\widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) := \varnothing$;

(ii) 设 $\bar{x} \in \Omega$, 则称 $x^* \in X^*$ 是 Ω 在 $\bar{x}$ 的一基本/极限法向量, 如果存在序列 $\varepsilon_k \downarrow 0, x_k \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$和 $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$, 满足对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 有 $x_k^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}(x_k;\Omega)$. 这样的法向量的全体

$$N(\bar{x};\Omega) := \mathop{\mathrm{Limsup}}_{\substack{x \to \bar{x} \\ \varepsilon \downarrow 0}} \widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega) \tag{1.3}$$

是 Ω 在 $\bar{x}$ 的 (基本/极限) 法锥. 对 $\bar{x} \notin \Omega$, 令 $N(\bar{x};\Omega) := \varnothing$. 由定义易得

$$\widehat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega) = \widehat{N}_\varepsilon(\bar{x};\operatorname{cl}\Omega) \text{ 和 } N(\bar{x};\Omega) \subset N(\bar{x};\operatorname{cl}\Omega)$$

对任意 $\Omega \subset X, \bar{x} \in \Omega$和 $\varepsilon \geqslant 0$ 成立. 注意到预法锥 $\widehat{N}(\cdot;\Omega)$ 和法锥 $N(\cdot;\Omega)$ 相对于 X 上的等价范数是不变的, 而当 $\varepsilon > 0$ 时 ε- 法向量集合 $\widehat{N}_\varepsilon(\cdot;\Omega)$ 却依赖于给定的范数 $\|\cdot\|$. 还注意到对任意的 $\varepsilon \geqslant 0$, 集合 (1.2) 在 X^* 的范数拓扑下显然是凸的和闭的, 因此当 X 是自反的时, 它们在 X^* 中是弱* 闭的.

与 (1.2) 式不同, 基本法锥 (1.3) 可以是非凸的, 比如非常简单的情形：取 $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant -|x_1|\}$, 则

$$N((0,0);\Omega) = \{(v,v) \mid v \leqslant 0\} \cup \{(v,-v) \mid v \geqslant 0\}, \tag{1.4}$$